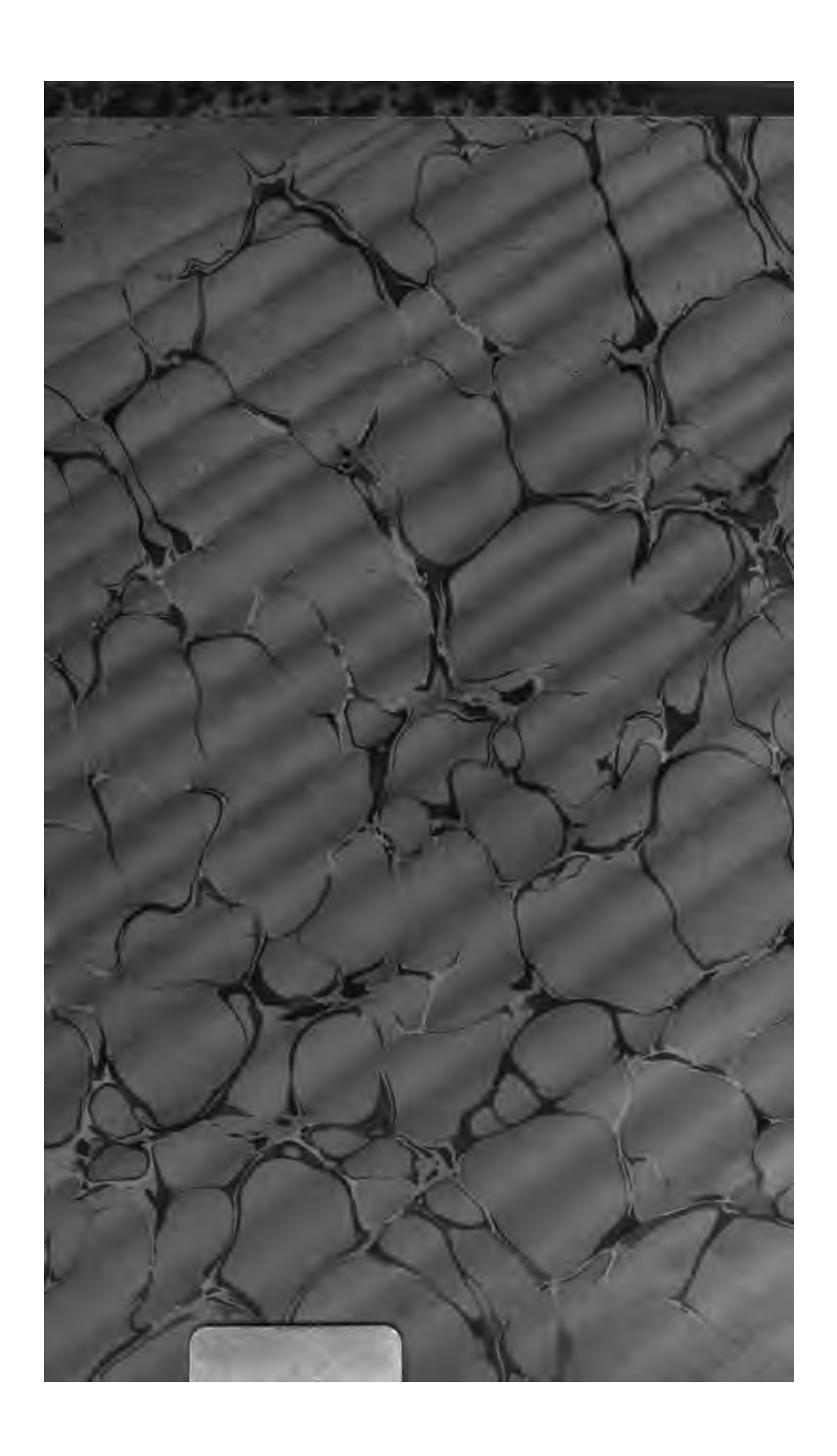
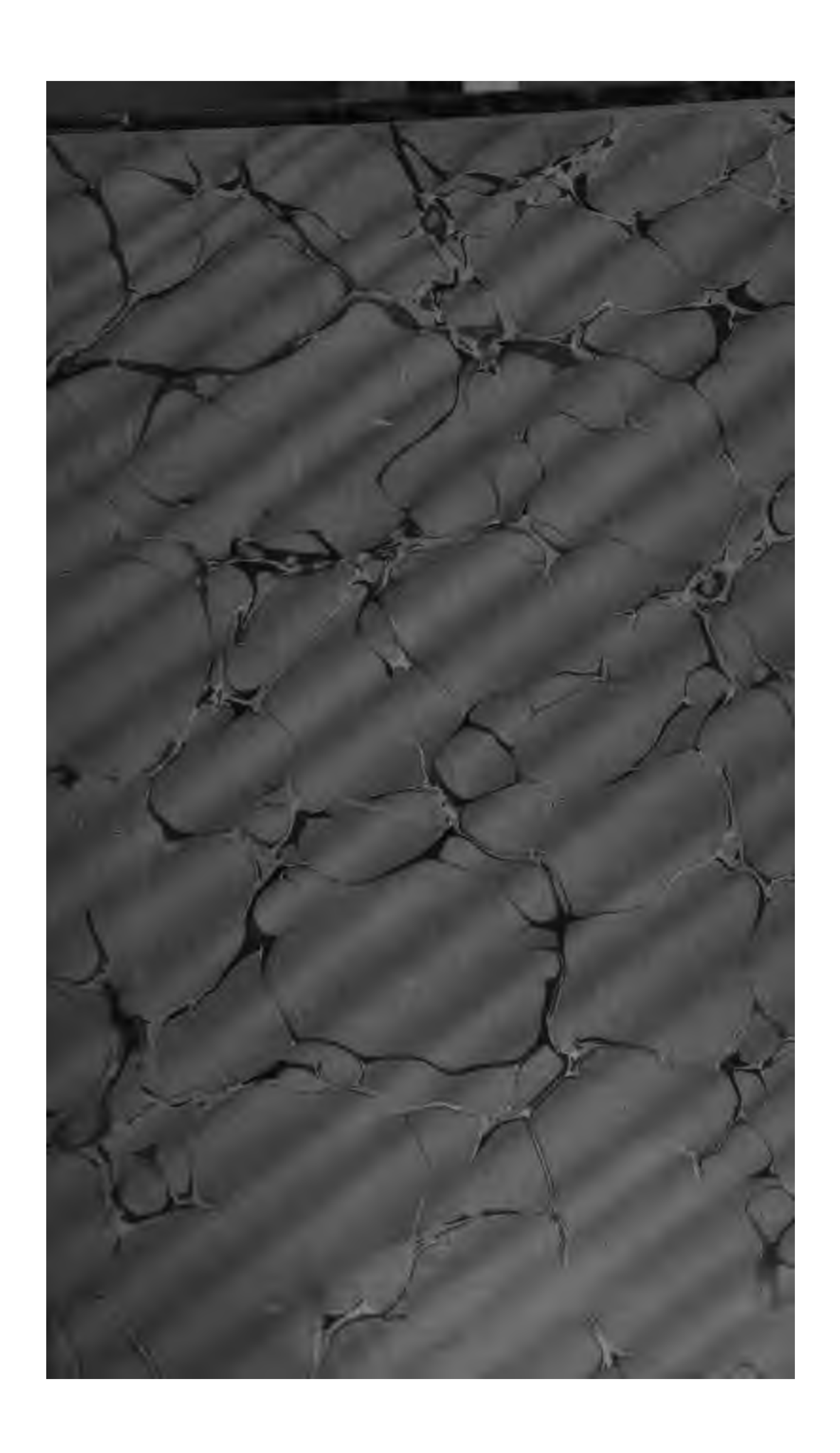

Stanford University Libraries
3 6105 027 441 224







BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66.

[illegible] Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME VII. — ANNÉE 1883.
(TOME XVIII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOENIGSBERGER (A.) — ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN AUS DER THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. — 1 vol. in-8°; Leipzig, 1882.

Dans ces dernières années, M. Koenigsberger a publié une suite d'importantes recherches sur la théorie des équations différentielles et notamment des équations différentielles linéaires; on trouvera, dans le Volume dont nous rendons compte, les résultats de ses recherches réunis, développés et généralisés; elles se rapportent principalement à la notion d'irréductibilité des équations différentielles algébriques, à l'extension du théorème d'Abel aux intégrales des équations différentielles, à l'étude des intégrales des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, en tant qu'elles peuvent s'exprimer par des combinaisons de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes.

La notion d'irréductibilité s'est offerte comme d'elle-même à M. Frobenius dans ses recherches sur la théorie des équations différentielles linéaires, recherches dont le point de départ est dans les découvertes de M. Fuchs et dont M. Floquet a développé les

principaux résultats dans un Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. VIII, p. S.3.

Voici comment M. Koenigsberger étend cette notion aux équations différentielles algébriques quelconques.

L'équation différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\rho, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

dans laquelle $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ sont des fonctions algébriques irréductibles de x, où f désigne une fonction rationnelle entière des quantités qui figurent entre les parenthèses, sera dite irréductible si, relativement à $\frac{d^m z}{dx^m}$, elle est irréductible en sens algébrique et si, en outre, elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle d'ordre moindre et du même caractère

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\rho, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0,$$

où φ désigne encore une fonction rationnelle entière et où μ est plus petit que m.

L'auteur établit ensuite la proposition suivante :

Si une équation différentielle algébrique a une intégrale commune avec une autre équation différentielle de même nature, irréductible au sens algébrique par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure, intégrale qui ne vérifie aucune équation différentielle d'ordre moindre, toutes les intégrales de la seconde équation différentielle satisferont à la première.

Cette proposition permet de transformer comme il suit la définition de l'irréductibilité : une équation différentielle algébrique est dite irréductible si elle est irréductible au sens algébrique par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure et si elle n'admet aucune intégrale algébrique d'*ordre quelconque*.

Ces définitions établies, la question suivante se pose immédiatement :

Étant donnée une équation différentielle algébrique, reconnaître si elle est irréductible ou non.

Après avoir répondu à cette question pour quelques types simples d'équations différentielles, l'auteur traite, à ce point de vue, des équations différentielles linéaires et montre qu'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre réductible admet toujours comme intégrale algébrique du premier ordre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre [1]; que, si une équation différentielle linéaire homogène du $m^{\text{ième}}$ ordre, étant réductible, admet une intégrale algébrique du $\rho^{\text{ième}}$ ordre, et si entre les m intégrales fondamentales particulières de l'équation considérée et leurs $\rho - 1$ premières dérivées il n'existe aucune relation algébrique, cette intégrale algébrique est une équation différentielle linéaire du $\rho^{\text{ième}}$ ordre.

M. Koenigsberger établit ensuite deux propositions qui servent de base à ses recherches ultérieures sur l'extension du théorème d'Abel, à la théorie de la transformation des transcendantes définies par des équations différentielles et généralement à l'étude de la nature de ces transcendantes; voici, tout au long, l'énoncé de ces deux théorèmes :

Soit donné un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad f_i\left(x_i, y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i,\rho_i}, z, \frac{dz}{dx_i}, \ldots, \frac{d^{m_i} z}{dx_i^{m_i}}\right) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des variables indépendantes, où $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,\rho_i}$ sont des fonctions algébriques irréductibles de la variable x_i; supposons que ces équations différentielles soient irréductibles, au sens algébrique, relativement aux dérivées d'ordre le plus élevé qui y figurent; soient $z_1, z_2, \ldots, z_k$ une suite d'intégrales particulières déterminées de ces équations différentielles, intégrales dont chacune est supposée ne vérifier aucune équation différentielle de même nature d'ordre moindre; une telle suite existera toujours si les équations différentielles (1) sont irréductibles.

Soient de plus données les équations différentielles

$$(2) \quad \mathrm{F}_j\left(x_{k+j}, y_{k+j,1}, y_{k+j,2}, \ldots, y_{k+j,\rho_{k+j}} z, \frac{dz}{dx_{k+j}}, \ldots, \frac{dz^{n_j} z}{dx_{k+j}^{n_j}}\right), \ (j = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Frobenius dans le 79ᵉ Volume du *Journal de Crelle*.

dans lesquelles les variables indépendantes $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+\lambda}$ sont liées algébriquement aux variables indépendantes du système (1) par des équations telles que

$$\varphi_j(x_{k+j}, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et où

$$y_{k+j,1}, y_{k+j,2}, \ldots, y_{k+j,\varrho_{k+j}}$$

désignent des fonctions algébriques irréductibles de x_{k+j}; soient maintenant $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{k+\lambda}$ λ intégrales particulières des équations différentielles (2).

Supposons enfin que, entre les $k+\lambda$ intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+\lambda}$ des équations différentielles (1) et (2) et leurs dérivées il existe une relation algébrique

$$(3) \quad F\left(z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots, \frac{d^{m_1} z_1}{dx_1^{m_1}}, \ldots, z_{k+\lambda}, \frac{dz_{k+\lambda}}{dx_{k+\lambda}}, \ldots, \frac{d^{m_{k+\lambda}} z_{k+\lambda}}{dx_{k+\lambda}^{m_{k+\lambda}}}\right) = 0;$$

le premier théorème consiste en ce que cette relation subsistera, si l'on remplace les intégrales particulières du système (1) par d'autres intégrales particulières *quelconques* de ce système, pourvu qu'on remplace en même temps les intégrales particulières du système (2) par des intégrales *convenablement choisies de ce même système*; il ne suppose aucune restriction imposée aux équations différentielles algébriques du système (2); le second théorème, au contraire, suppose que les équations de ce système sont, au sens algébrique, irréductibles par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé et relativement aux intégrales particulières des équations de ce système qui figurent dans la relation (3), qu'il n'y ait aucune relation algébrique entre ces intégrales et leurs dérivées prises, pour chacune, jusqu'à un degré inférieur d'une unité à l'ordre de l'équation différentielle correspondante; sous ces conditions, l'équation (3) subsistera quand on remplacera les intégrales particulières du système (2) par d'autres intégrales particulières quelconques, pourvu qu'on remplace les intégrales particulières du système (1) par d'autres intégrales particulières convenablement choisies.

De ces propositions, M. Koenigsberger déduit facilement que la relation algébrique possible entre des intégrales abéliennes (en

considérant comme telles les logarithmes de fonctions algébriques) est une relation linéaire à coefficients constants, où le second membre est une fonction algébrique; il montre aussi qu'une relation algébrique ne peut pas exister entre des intégrales abéliennes et des fonctions analytiques admettant un théorème d'addition. La méthode qu'il suit le conduit à un problème intéressant en lui-même et qui jouera d'ailleurs un rôle important dans ses recherches ultérieures.

On peut regarder comme le caractère distinctif des équations différentielles dont la solution se ramène immédiatement à effectuer une quadrature, et aussi des équations différentielles linéaires, la façon dont l'intégrale générale dépend d'une ou plusieurs constantes arbitraires et d'une ou plusieurs intégrales particulières: on est donc amené à se demander quelles sont les classes d'équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction algébrique d'intégrales particulières et de constantes arbitraires; cette question en comprend deux autres suivant que l'on admet que, dans cette fonction algébrique, la variable indépendante peut ou ne peut pas figurer explicitement. Par exemple, M. Koenigsberger établit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation algébrique du premier ordre

$$\frac{dv}{dw} = f(v, w)$$

soit telle que son intégrale générale soit une fonction algébrique d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire, fonction où ne figure pas explicitement la variable indépendante, consiste en ce que l'on ait

$$f(v, w) = \varphi(v)\chi(w),$$

$\chi(w)$ étant une fonction algébrique quelconque de w et $\varphi(v)$ une fonction algébrique de v, telle que $\frac{dv}{\varphi(v)}$ soit une différentielle de première espèce et de genre 1. Une relation algébrique ne peut pas exister entre des intégrales abéliennes et l'intégrale d'une pareille équation.

Ces recherches se relient d'ailleurs par le lien le plus étroit avec celles qui concernent l'extension aux intégrales des équations différentielles algébriques du théorème d'Abel relatif aux quadratures.

Soit, par exemple, z une intégrale particulière d'une équation différentielle algébrique entre z et x et soient z_1, z_2, Z les valeurs de cette intégrale pour les valeurs x_1, x_2, X de la variable x, valeurs dont les premières sont indépendantes et dont la dernière est liée à celles-ci par une relation algébrique

$$X = \varphi(x_1, x_2),$$

s'il existe entre z_1, z_2, Z une relation algébrique

$$Z = f(z_1, z_2, x_1, x_2).$$

M. Koenigsberger dit que l'équation différentielle considérée possède un théorème abélien du *genre* 1 ; on aura de même un théorème abélien du genre 2. Si z_1, z_2, z_3, Z_1, Z_2 étant des valeurs de l'intégrale particulière z pour les valeurs x_1, x_2, x_3, X_1, X_2 de la variable x, valeurs dont les deux dernières sont données algébriquement au moyen des trois premières, il existe une relation algébrique de la forme

$$F(Z_1, Z_2; z_1, z_2, z_3; x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \ldots.$$

Le principe de cette extension une fois admis, les questions suivantes se posent immédiatement : Quelles sont les équations différentielles algébriques qui admettent un théorème abélien d'un genre donné? Quelle est la forme de la relation algébrique qui constitue ce théorème?

Si le genre du théorème abélien est égal à 1, l'équation différentielle doit, tout d'abord, être du premier ordre et son intégrale générale doit être une fonction algébrique d'une constante arbitraire et d'une intégrale particulière, fonction où la variable indépendante doit figurer explicitement ou non, selon que les variables x_1, x_2 doivent figurer ou non explicitement dans le théorème abélien, suivant que, en d'autres termes, ce théorème peut s'exprimer par une relation de la forme

$$Z = f(Z_1, Z_2; x_1, x_2)$$

ou de la forme

$$Z = f(Z_1, Z_2).$$

Ce dernier cas est évidemment le plus simple; alors, ainsi qu'on

l'a déjà dit, l'équation différentielle doit avoir la forme

$$\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

où $\lambda(x)$ et $\mu(z)$ sont des fonctions algébriques; en outre, les différentielles $\frac{dz}{\mu(z)}$ et $\lambda(x)\,dx$ doivent être de première espèce et de genre 1.

Dans le premier cas, M. Koenigsberger montre que, si l'intégrale générale est une fonction *entière* d'une constante et d'une intégrale particulière, cette fonction est nécessairement linéaire par rapport à l'intégrale particulière, le coefficient de l'intégrale étant une constante, et le second coefficient étant une fonction algébrique de x; l'équation différentielle est alors linéaire.

Si l'intégrale générale est une fonction rationnelle d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire, cette relation est nécessairement de la forme $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, où α, β, γ, δ sont des fonctions algébriques de la variable x et la constante arbitraire; l'équation différentielle est alors de la forme

$$\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C,$$

où A, B, C sont des fonctions algébriques de x; si une équation différentielle de cette forme admet deux intégrales algébriques, l'intégrale générale est toujours liée algébriquement à une intégrale particulière transcendante, en supposant qu'une telle intégrale existe, et, de plus, toute intégrale transcendante admet un théorème abélien.

L'examen du cas où le théorème abélien est du genre 2 conduit l'auteur à des propositions et à des recherches analogues.

Le reste du Volume se rapporte à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques qui admettent comme intégrales des fonctions composées algébriquement de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes : on sait qu'Abel a montré que, si l'intégrale d'une fonction algébrique pouvait être ramenée à des fonctions algébrico-logarithmiques et à des intégrales elliptiques, les variables des fonctions réduites pouvaient s'exprimer rationnellement au moyen de la variable de

l'intégrale abélienne et de l'irrationnalité correspondante; et ce théorème est le fondement de la théorie de la réduction des intégrales d'une fonction algébrique. M. Koenigsberger parvient à une suite de propositions analogues pour les intégrales de la nature considérée des équations différentielles linéaires, propositions qui lui permettent de fonder la théorie de la réduction de ces intégrales. Ainsi, lorsqu'une équation différentielle algébrique linéaire à second membre admet une intégrale de la forme $A \log v$, où A est une constante et v une fonction algébrique, l'auteur montre qu'elle admet nécessairement une intégrale de la forme $\frac{A}{\delta} \log w$, où δ est un nombre entier et w une fonction rationnelle des coefficients de l'équation; plus généralement, supposons qu'une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, y$ sont des fonctions algébriques de x, admette une intégrale de la forme

$$z = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_k \log v_k + \int^{\xi_1} y_1\, ds + \int^{\xi_2} y_2\, ds + \ldots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda\, ds,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des constantes; $u, v_1, v_2, \ldots, v_k; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$ des fonctions algébriques de x; $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ des fonctions algébriques de s; on voit d'abord que, si Y_m n'est pas nul, z s'exprimera algébriquement au moyen de x. Supposant $Y_m = 0$, M. Koenigsberger montre que l'équation proposée admettra une intégrale de la forme

$$z = U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \ldots + B_\mu \log V_\mu + \frac{1}{\delta} \sum_{\rho=1}^{\rho=p_1} \int^{\eta_1^{(\rho)}} y_1\, ds + \ldots + \frac{1}{\delta} \sum_{\rho=1}^{\rho=p_\lambda} \int^{\eta_\lambda^{(\rho)}} y_\lambda\, ds,$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ sont des constantes, où $U, V_1, \ldots, V_\mu$ sont des fonctions rationnelles de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y$, où $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ désignent les nombres qui caractérisent les genres, où δ est un nombre entier; enfin les limites supérieures $\eta_a^{(\rho)}$ sont les racines d'une équation de degré p_a dont les coefficients sont des fonctions

rationnelles de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y$, tandis que, inversement, les valeurs de l'irrationnalité y_a qui correspondent à ces limites s'expriment rationnellement au moyen de ces limites elles-mêmes et des coefficients de l'équation différentielle. Relativement aux sommes d'intégrales abéliennes qui figurent dans l'expression de z et dont l'une quelconque peut être représentée par le symbole

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int^{\eta^{(\rho)}} Y\,ds,$$

M. Koenigsberger établit la formule de réduction suivante :

$$\int^x F(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y)\,dx = \sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int^{\eta^{(\rho)}} \Omega(s, Y)\,ds;$$

dans le second membre $\Omega(s, Y)$ est une fonction rationnelle de s et de Y telle que $\Omega(s, Y)\,ds$ soit une différentielle de première espèce, d'ailleurs quelconque; dans le premier membre,

$$F(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y)$$

est une fonction rationnelle des quantités entre parenthèses, et l'intégrale est aussi de première espèce.

Le problème de la réduction est ensuite traité avec détail dans le cas d'une irrationnalité binôme, et, comme application, l'auteur donne une suite d'intéressantes propositions sur la réduction des intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques.

Enfin, dans le cas où les intégrales de l'équation différentielle linéaire ne sont pas composées par voie d'addition au moyen de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes, l'auteur établit quelle doit être la forme de cette composition et apprend à en déduire d'autres formes rationnelles qui doivent encore être des intégrales de l'équation différentielle.

Il reste un problème à traiter, celui de la nature des irrationnalités algébriques qui servent de base aux intégrales elliptiques ou abéliennes que l'on suppose satisfaire à une équation différentielle linéaires; M. Koenigsberger réduit d'abord la question au cas des intégrales de première espèce; considérant ensuite une équation

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}$ sont des fonctions algébriques de x et où y est lié à ces quantités et à x par une équation irréductible

$$y^n + \varphi_1(x, Y_1, \ldots, Y_{m-1})y^{n-1} + \ldots = 0,$$

et supposant qu'elle soit vérifiée par une intégrale elliptique de première espèce,

$$z = \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

pour laquelle v et $\Delta(v)$ s'expriment rationnellement au moyen de $x, y, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$, il observe qu'on peut faire décrire à la variable x des circuits fermés, tels que $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ restent inaltérés, tandis que y devient successivement égal aux n racines de l'équation qui le définit, et examine d'abord le cas où une racine de cette équation se produit ainsi multipliée par un facteur constant qui est nécessairement de la forme $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$, μ étant un nombre entier; si l'équation différentielle linéaire sans second membre n'est vérifiée par aucune intégrale abélienne ou n'est vérifiée que par une intégrale elliptique de même module, on doit avoir $\mu = 2, 3, 4$ ou 6 et, dans les trois derniers cas, l'intégrale elliptique a l'une des formes

$$\int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6 - 1}} = \frac{1}{2}\int^v \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3 - 1)}}.$$

L'auteur étend ensuite ses recherches au cas où il existe entre plusieurs valeurs de y une relation linéaire; l'étude de ce cas se relie à la théorie de la multiplication complexe et de la division du cercle; une analyse succincte des méthodes employées et des résultats obtenus serait difficilement intelligible, et nous devons renvoyer le lecteur au beau livre de M. Koenigsberger. J. T.

MÉLANGES.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

SUJETS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Juillet 1869. — *Mécanique.* — Un point matériel non pesant assujetti à se mouvoir sur un cône de révolution est sollicité par une force dirigée à chaque instant suivant la perpendiculaire abaissée du point mobile sur l'axe du cône et proportionnelle à la longueur de cette perpendiculaire. Trouver le mouvement de ce point.

On appliquera les formules au cas suivant : L'angle que les génératrices du cône font avec l'axe est de 30°, la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe.

Épure. — On donne le rayon d'une sphère, les projections de son centre O et celles d'un autre point A. — Construire la trace horizontale du cône qui a pour sommet le point A, et qui est circonscrit à la sphère.

On ne supposera pas que le point A soit dans le plan horizontal, ni que la droite OA soit verticale.

Analyse. — Trouver la fonction z des deux variables indépendantes x et y, qui se réduit à zéro pour $x = a$ et qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$ax^4 \frac{dz}{dx} + (x^4 z + ax^3 y - ax^2 y^2) \frac{dz}{dy} = 2ax^2 yz - 2a^2 y^3.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un même centre fixe, l'une attractive et variant proportionnellement à la distance, l'autre répulsive et variant en raison inverse du cube de la distance.

On appliquera les formules en supposant la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

Analyse. — Étant donné un cône de révolution, on considère sur sa surface une courbe telle que le plan osculateur à la courbe en l'un quelconque de ses points contienne la normale à la surface

en ce même point. Déterminer la projection de cette courbe sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône.

Novembre 1869. — *Analyse.* — Trouver l'équation générale des surfaces qui coupent à angle droit les sphères représentées par l'équation

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha z=0,$$

où α est un paramètre variable.

Déduire du résultat obtenu quelques systèmes formés de trois familles de surfaces triplement orthogonales.

Mécanique. — Un cylindre de rayon a et de moment d'inertie A par rapport à son axe est mobile autour de cet axe supposé fixe et horizontal. Sur ce cylindre s'enroule un fil sans masse supportant à ses deux bouts deux poids cylindriques, de même diamètre, mais de masses inégales m et m'. Ces deux poids éprouvent de la part de l'air une même résistance αv^2, proportionnelle au carré de leur vitesse commune v. Trouver le mouvement de ce système, en négligeant le frottement du cylindre contre l'air et contre ses appuis.

Examiner le cas particulier où les masses m et m' seraient égales et où le cylindre serait animé à l'origine du temps d'une vitesse de rotation donnée ω_0.

Épreuve pratique. — La longitude du Soleil étant 322°44′28″,3 et l'obliquité de l'écliptique 23°27′23″,7, calculer l'ascension droite et la déclinaison du Soleil.

On exprimera, suivant l'usage, l'ascension droite en temps.

Juillet 1870. — *Mécanique.* — Une droite homogène AA′ de masse m' et de longueur $2a$ est assujettie à tourner autour d'un axe vertical auquel elle est perpendiculaire et qui passe par son milieu O. Un point mobile M de masse m, assujetti à rester sur cette droite, est attiré par le point O proportionnellement à sa distance à ce point. On donne la vitesse angulaire initiale ω_0 de la droite, la position initiale du point M sur la droite et sa vitesse initiale relative. Trouver le mouvement du système.

On appliquera les formules au cas où le point M est placé d'abord à l'extrémité A de la droite sans vitesse relative. On supposera en outre $m'=\frac{m}{2}$ et le coefficient d'attraction $f=4\omega_0^2$.

Épure. — Deux circonférences égales dont les plans sont parallèles au plan vertical ont leurs centres O et O′ dans le plan horizontal. Une surface gauche est engendrée par une droite qui glisse sur les deux circonférences et sur la perpendiculaire au plan vertical mené par le point I, milieu de la droite OO′; construire les projections d'une position particulière de la génératrice, ainsi que les traces du plan tangent à la surface en un point quelconque de cette droite.

Analyse. — On propose de trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\sin x + \mathrm{D}\cos x,$$

A, B, C, D étant des constantes.

Mécanique. — Un point matériel P est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe O et qui dépend de la distance du point P au point O; l'action de la force sur l'unité de masse s'exprime par la formule

$$\varphi = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

On suppose le point P placé d'abord en C à une distance a du centre O; on imprime à ce point une vitesse perpendiculaire au rayon OC et égale à $\frac{k}{a}$; déterminer son mouvement.

Août 1871. — *Analyse.* — Trouver les lignes de courbure de la surface développable, enveloppe du plan mobile représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \mathrm{R}\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)},$$

où α est un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre et R une constante donnée. On fera voir : 1° que les génératrices rectilignes constituent un premier système de lignes de courbure, comme dans toutes les surfaces développables; 2° que les lignes de courbure du deuxième système sont situées sur des sphères concentriques à la sphère qui touche le plan mobile.

Mécanique. — Déterminer le mouvement d'une baguette recti-

ligne pesante homogène dont les extrémités sont assujetties à glisser sans frottement l'une sur une droite horizontale Ox, l'autre sur une droite verticale Oy.

On calculera les pressions exercées par la baguette sur les deux droites.

Novembre 1871. — *Analyse.* — Étant donnés un plan P et un point O dans le plan, trouver l'équation générale de toutes les surfaces telles que si, dans un point quelconque m de l'une d'elles, on mène la normale mn qui rencontre en n le plan P, puis la perpendiculaire mp à ce plan, l'aire du triangle Onp soit égale à une constante donnée.

Déterminer la fonction arbitraire comprise dans l'équation obtenue de manière que la surface passe par une droite Ox située dans le plan P.

Mécanique. — Un prisme AA′BB′, de masse donnée m_1, repose, par une surface plane A′B′, sur un plan horizontal sur lequel il peut glisser sans frottement; dans ce prisme on a creusé un cylindre ayant ses génératrices horizontales; un point matériel pesant de

Fig. 1.

masse donnée m glisse sur la surface de ce cylindre sans frottement. On suppose que les vitesses initiales du prisme et du point matériel sont nulles.

Trouver le mouvement de ce système.

On appliquera les formules au cas où la section droite ACB du cylindre est une cycloïde engendrée par un cercle roulant sur la droite AB et l'on supposera que le point m a été placé au commencement au point le plus haut A. On effectuera le calcul en supposant que la masse m est très petite par rapport à m_1 et négligeant les puissances du rapport $\frac{m}{m_1}$ supérieures à la première.

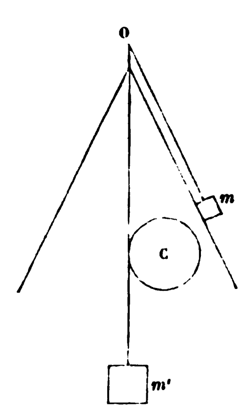
Juillet 1872. — *Analyse.* — Déterminer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2} (x - a - b\sqrt{-1})\, dx.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à glisser sans frottement sur la surface d'un paraboloïde elliptique de révolution dont l'axe est vertical et dont la concavité est tournée vers le haut. On supposera la vitesse initiale horizontale.

Mécanique. — Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical et dirigé de bas en haut, et une poulie homogène, de masse et de rayon connus, située dans un plan méridien du cône en tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan; un fil

Fig. 2.



flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des brins du fil passe dans une ouverture infiniment petite pratiquée au sommet du cône et à son extrémité est attaché un point pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système en supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale et celle du point m' nulle.

On néglige le poids du fil.

Analyse. — 1° Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (ax+b)e^x + ce^{-2x},$$

a, b, c, constantes données; e est la base des logarithmes népériens.

2° x, y, z étant les coordonnées rectilignes, a, b, α, β les fonctions d'un paramètre variable, on demande les conditions pour que la droite $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ engendre une surface développable dont les lignes de courbure normales aux génératrices soient situées sur des sphères concentriques.

Mécanique. — Les axes OX, OY, OZ étant invariablement liés à un corps solide et l'axe OZ étant fixé dans l'espace, on donne par rapport à ces axes les coordonnées x, y du centre de gravité du solide et les valeurs D, E des sommes Σmyz, Σmxz.

Le solide étant supposé tourner autour de l'axe OZ avec une vitesse angulaire ω, sans être sollicité par aucune force extérieure, on demande :

1° De trouver quelle relation il doit y avoir entre les données D, E, x et y pour que les pressions exercées sur l'axe aient une résultante unique;

2° De calculer, quand cette relation est satisfaite, la valeur de la pression résultante;

3° De former, par rapport aux axes mobiles OX, OY, OZ, les équations de la droite suivant laquelle elle est dirigée.

Novembre 1872. — *Mécanique.* — Trouver dans un plan vertical la courbe AMB sur laquelle un point pesant doit être assujetti à se mouvoir pour que le rapport de la pression exercée par ce point sur la courbe à la composante normale de son poids soit égal à un nombre donné n.

On examinera en particulier le cas de $n = 2$.

Analyse et Mécanique. — 1° Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

2° Déterminer le mouvement d'un corps solide pesant dont les

molécules sont sollicitées vers un point fixe par des forces proportionnelles à leurs masses et à la distance au point fixe.

Juillet 1873. — *Analyse.* — Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces décrites par une droite qui se meut en rencontrant une droite fixe sous un angle donné.

Intégrer ensuite cette équation aux dérivées partielles.

Mécanique. — Une sphère homogène est posée sans vitesse sur un plan horizontal; trouver le mouvement de cette sphère, en supposant tous les éléments de masse qui la composent attirés proportionnellement à la distance par un point fixe O du plan. L'adhérence de la sphère au plan horizontal est supposée telle qu'elle ne puisse que rouler sans glisser.

Les données sont le rayon R de la sphère, la distance a du point de contact initial au point O et l'attraction u que ce dernier point exerce sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Analyse. — Transformer l'intégrale double $\iint dx\,dy$ qui se rapporte aux aires planes en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y les paramètres des deux familles de coniques homofocales représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2 b^2}=1,\quad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}=1.$$

Application à l'aire du cercle de rayon R.

Intégrer l'équation différentielle

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-9x^2\frac{d^2y}{dx^2}+37x\frac{dy}{dx}-64y=x^4[\alpha+\beta\log x+\gamma(\log x)^2],$$

α, β, γ étant des constantes données.

Juillet 1873. — *Analyse.* — Intégrer le système de deux équations différentielles simultanées

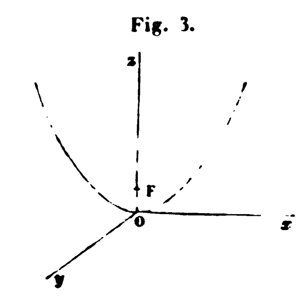
$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+5x+y=\cos 2t,\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}-x+3y=0.\end{cases}$$

Mécanique.— Un point matériel pesant est assujetti à se mou-

voir sur un paraboloïde de révolution dont l'axe est la verticale Oz.

Il est en outre soumis à l'attraction d'un centre placé au foyer F

Fig. 3.



de la parabole méridienne. Cette attraction est proportionnelle à la distance et telle que, si le point matériel était placé en O, elle serait égale au poids de ce point. On donne la masse m du point matériel, la distance $OF = \frac{\mu}{2}$ et l'on demande d'étudier le mouvement du point.

On recherchera, en particulier, les diverses circonstances du mouvement dans le cas où il s'effectue dans un des plans méridiens de la surface.

Novembre 1873. — *Analyse.* — On donne une série de courbes (c) représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, où a est une constante arbitraire.

On demande :

1° L'équation différentielle qui représente toutes les courbes (c);

2° L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes (c);

3° L'équation en termes finis des trajectoires orthogonales des courbes (c).

Mécanique. — Deux points matériels, de masses m et m', réunis par un fil flexible et inextensible qui traverse un anneau infiniment petit a, sont assujettis à se mouvoir sans frottement dans un plan qui passe par a ; le point m est sollicité par une force dirigée vers a et qui varie en raison inverse du carré de sa distance à ce point; déterminer le mouvement du système en négligeant la masse du fil.

On examinera, en particulier, le cas où la vitesse initiale du point m' est dirigée suivant la droite qui joint la position initiale au point fixe a.

Juillet 1874. — *Analyse.* — 1° Intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 13y + \frac{dz}{dx} + 20z = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} + 2y + \frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + 3z = 0.$$

2° Intégrer les deux équations simultanées

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 13y + \frac{dz}{dx} + 20z = e^x,$$
$$\frac{dy}{dx} + 2y + \frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} + 3z = e^{-x}.$$

Mécanique. — Trouver le mouvement de deux points matériels pesants, qui s'attirent proportionnellement à leur distance et qui sont assujettis à se mouvoir sans frottement, le premier sur une droite verticale donnée, le second sur un plan donné oblique à l'horizon.

On examinera, en particulier, les circonstances du mouvement dans les hypothèses suivantes : 1° les deux points matériels ont des masses égales ; 2° leur position initiale est celle où ils resteraient en équilibre si leurs vitesses étaient nulles ; 3° les projections de la vitesse initiale du second point sur l'horizontale et sur la ligne de plus grande pente du plan sont égales chacune à la vitesse initiale du premier point ; 4° le plan donné fait avec l'horizon un angle, dont le sinus est égal à $\frac{3}{4}$.

Géométrie descriptive. — Une surface est engendrée par la rotation d'une parabole autour de la tangente à son sommet. Déterminer la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, d'une ligne tracée sur la surface, et telle que le rayon de courbure de la vection normale qui correspond à l'une quelconque de ces tangentes soit infinie.

Mécanique — Un point pesant m est assujetti à se mouvoir sans frottement sur un cylindre circulaire droit dont l'axe est vertical, et, en outre, il est soumis à l'attraction d'un point fixe A,

attraction proportionnelle à la distance. Déterminer le mouvement du point m.

Novembre 1874. — *Analyse.* — On considère, sur la surface d'un paraboloïde elliptique, les courbes définies par la condition que les normales à la surface menées par les différents points de l'une d'elles fassent un angle constant avec l'axe.

Trouver l'équation des projections de ces courbes sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

Calculer l'aire de la calotte du paraboloïde limitée par une des courbes.

2° Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions données de x, leurs dérivées étant représentées par $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$; on propose d'intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} + \varphi'(x)y - \psi'(x)z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + \psi'(x)y + \varphi'(x)z = 0.$$

Mécanique. — Un point matériel libre, sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, se meut de manière à être à chaque instant sur une spirale logarithmique ayant ce centre pour pôle et tournant uniformément autour de lui. On demande la valeur de la force en fonction de la distance du point mobile au centre fixe.

L'expression de la force étant trouvée, on cherchera l'équation générale de la trajectoire d'un point matériel, soumis à l'action de cette force.

Juillet 1875. — *Analyse.*— 1° Déterminer les lignes de courbure de la surface, représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$e^z = \cos x \cos y.$$

2° Intégrer les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}.$$

Épreuve pratique. — Géométrie descriptive. — Un conoïde a pour plan directeur un plan perpendiculaire à la ligne de terre et

pour directrices : 1° une droite AA′ parallèle à la ligne de terre et à $0^m,10$ de chacun des plans de projection; 2° une circonférence de $0^m,05$ de rayon située dans le plan horizontal et tangente à la ligne de terre.

Déterminer les projections de la section faite dans la surface par un plan dont les traces seraient les projections de même nom de la droite AA′ ainsi que la tangente en un point de cette section.

Mécanique. — Un point matériel est assujetti à rester sur une sphère, dont un point fixe P est considéré comme pôle, et il est sollicité par une force dirigée, à chaque instant, suivant la tangente, au méridien MP et inversement proportionnelle au carré du cosinus de la latitude. Déterminer le mouvement du point M et trouver l'équation du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la trajectoire décrite.

La vitesse initiale du point M sera supposée tangente au parallèle passant par la position initiale et on la regardera comme donnée.

Analyse. — Déterminer une courbe c telle que si l'on forme une de ces transformées c_1 par rayons vecteurs réciproques, relativement à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants M et M_1 des deux courbures c et c_1 aient un rapport constant.

(On dit que la courbe c_1 est une transformée par rayons vecteurs réciproques de c, par rapport au pôle O, lorsque le produit $OM.OM_1$ des rayons de même direction, issus du point O, est constant.)

Mécanique. — Un point matériel non pesant est assujetti à se mouvoir sur un cône de révolution, et il est soumis à l'action d'un centre attractif, placé au sommet du cône et qui l'attire en raison inverse du carré de la distance.

On demande d'étudier le mouvement du point matériel et en particulier la projection de la trajectoire sur un plan perpendiculaire à la génératrice du cône sur laquelle se trouve le point matériel.

Novembre 1875. — *Analyse.* — Intégrer l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\right]^2 = y\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\right]^2.$$

Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$\mathrm{OP}.\mathrm{MN} = \lambda.\overline{\mathrm{OM}}^2,$$

dans laquelle λ désigne une constante donnée, O l'origine des coordonnées, M un point quelconque de l'une des surfaces, P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en M et N la trace de la normale en M sur le plan XOY.

(Les axes des coordonnées sont rectangulaires.)

Mécanique. — Un point matériel pesant, assujetti à rester sur une sphère de rayon a, est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe B situé sur la verticale Oz du centre de la sphère, à une distance $OB = b$ de ce centre. On donne la valeur μ de l'attraction à l'unité de distance, l'intensité g de la pesanteur, la vitesse initiale k du point mobile, laquelle est supposée horizontale, et enfin la distance initiale h de ce point au plan horizontal Oxy qui passe par le centre de la sphère.

On demande de trouver les limites entre lesquelles variera, pendant le mouvement, l'ordonnée z du point mobile; de déterminer complètement ce mouvement, dans le cas particulier où l'attraction du point fixe B sur le centre de la sphère est égale et contraire à la pesanteur.

Épreuve pratique. — Construire les projections et la longueur d'une normale commune à deux cylindres, qui ont pour bases deux cercles donnés dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à deux droites données.

Juillet 1876. — *Analyse.* — On donne un hélicoïde gauche, dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$z = k \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}.$$

On demande de déterminer les projections sur le plan des xy des courbes tracées sur cette surface, de façon que le plan osculateur, en un point quelconque de l'une d'elles, comprenne la normale à la surface en ce même point.

Mécanique. — Trouver le mouvement de deux points matériels, assujettis à glisser sans frottement sur un cercle horizontal,

et s'attirant mutuellement en raison inverse du cube de la distance.

Épreuve pratique. — Calcul numérique; l'excentricité d'une planète étant supposée égale à $\frac{1}{4}$, calculer l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne correspondant à une anomalie excentrique égale à $40^\circ 17' 34'',74$.

Analyse. — Les axes d'une ellipse sont $2a$ et $2b$; on suppose $a > b$; cette ellipse sert de directrice à un cylindre droit; calculer la portion du volume de ce cylindre qui est renfermée dans une sphère ayant le centre de l'ellipse pour centre et son demi-grand axe a pour rayon.

Déterminer les trajectoires orthogonales de l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Mécanique. — Un point matériel pesant est assujetti à demeurer sur un cône circulaire droit dont l'axe est vertical; il est, en outre, soumis à l'attraction d'un centre fixe placé au sommet du cône et attirant en raison inverse du cube de la distance.

On demande d'étudier le mouvement du point matériel.

Novembre 1876. — *Analyse.* — On donne une sphère et une droite D; déterminer les projections sur un plan perpendiculaire à la droite D des trajectoires orthogonales des sections faites dans la sphère par les plans menés suivant cette droite.

Mécanique. — Mouvement d'un point matériel pesant, assujetti à rester sur la surface d'un cylindre de révolution dont l'axe fait un angle α avec la verticale.

Analyse. — Trouver une courbe, telle que le triangle, ayant pour sommet un point quelconque M de la courbe, le centre de courbure correspondant et le pied de l'ordonnée du point M ait une surface constante. On fera voir que l'une des coordonnées s'exprime en fonction de l'autre par une quadrature et que l'on peut se faire une idée de la forme de la courbe, sans en avoir l'équation en termes finis.

Nota. — Les axes des coordonnées sont supposés rectangulaires.

Épure. — Contour apparent horizontal d'une surface réglée déterminée :

1° Par une ellipse, contenue dans le premier plan bissecteur, se projetant horizontalement suivant une circonférence ayant $0^m,03$ de rayon, tangente à la ligne de terre et ayant son centre sur le grand axe de la feuille;

2° Par une parallèle à la ligne de terre à $0^m,06$ en avant du plan vertical et $0^m,03$ en dessus du plan horizontal;

3° Par une perpendiculaire au plan vertical dans le plan horizontal, placée sur le grand axe de la feuille.

Déterminer un point quelconque du contour apparent.

Mécanique. — I. Trouver le mouvement d'un point matériel M de masse m, sollicité par une force dirigée vers un point fixe O et égale à $\frac{m\mu \sin^2\theta}{r^2}$, r étant la distance OM et θ l'angle que fait ce rayon vecteur avec le rayon vecteur initial $OA = a$. On supposera la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial OA et égale à $\sqrt{\frac{2\mu}{3a}}$; on donnera une formule, permettant de calculer la position du mobile à chaque instant; on cherchera la durée de la révolution et on la comparera à celle qui aurait lieu si le mobile, placé dans les mêmes conditions initiales, était sollicité par la force $\frac{m\mu}{r^2}$.

II. Un mobile M, assujetti à se mouvoir sur une sphère donnée, sans frottement, est sollicité par une force dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point M sur un diamètre fixe AB. Suivant quelle loi doit varier la force, pour que la trajectoire décrite par le mobile soit une conique sphérique dont le diamètre AB est l'un des axes?

Épreuve pratique. — Calculer l'heure d'après la hauteur du Soleil. Données : latitude du lieu, 48°50′11″ boréale; déclinaison du Soleil, 15°12′25″ boréale; hauteur observée corrigée de la réfraction, 30°28′50″.

Analyse. — 1° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable ; le signe log désigne un logarithme népérien.

2° L'angle α étant supposé compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, soit

$$\rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{\tang \alpha}$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires ; on demande si l'aire du secteur limité par cette courbe et par les rayons vecteurs correspondants à $\omega = \alpha$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ a une valeur finie ou infinie.

Mécanique. — On considère la surface de révolution, engendrée par une hyperbole équilatère ayant une asymptote verticale et tournant autour de cette asymptote. On demande le mouvement d'un point pesant assujetti à demeurer sur l'une des deux nappes de cette surface.

Novembre 1877. — *Analyse.* — Étant donnée un ellipsoïde à trois axes inégaux représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on considère l'ellipse E résultant de l'intersection de cette surface par le plan des xz. En un point quelconque M de cette ellipse, il existe deux sections normales principales de l'ellipsoïde dont chacune a pour ce point son rayon et son centre de courbure. Cela posé on demande :

1° Les expressions, pour chaque point M, des rayons de courbure R_1, R_2 des deux sections principales ;

2° La relation qui existe entre R_1 et R_2 ;

3° Le lieu des positions qu'occupent les centres de courbure des sections principales, lorsque le point M se déplace sur l'ellipse E.

Mécanique. — Mouvement de deux points matériels de masses m et m', s'attirant proportionnellement à la distance et assujettis

à se mouvoir sans frottement sur deux cercles concentriques de rayons a et a' situés dans un même plan horizontal. On suppose les deux mobiles en repos à l'origine du temps.

Cas des oscillations infiniment petites.

Épreuve pratique : La déclinaison du Soleil étant supposée égale à $18°27'16''$, calculer la distance zénithale de cet astre à 6^h de temps vrai à Paris.

On prendra pour latitude de Paris la valeur de $48°59'13''$.

Juillet 1878. — *Mécanique.* — On considère deux points matériels non pesants, de masses m et m', assujettis à se mouvoir sans frottement dans deux plans différents, mais parallèles, et maintenus à une distance invariable l'un de l'autre par une tige dont on négligera la masse. Ces deux points sont soumis uniquement à l'action d'un centre fixe qui les attire proportionnellement à leur masse et à leur distance. On demande : 1° le mouvement du centre de gravité ; 2° on indiquera pour quelles conditions initiales le mouvement des deux points sera le même que s'ils n'étaient pas reliés l'un à l'autre par la tige solide.

Astronomie. — Connaissant pour un astre, à une certaine époque, les coordonnées écliptiques

$$\lambda = 2°51'4'',45, \quad \mathcal{L} = 9°33'38'',386,$$

on propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes.

On supposera l'obliquité de l'écliptique

$$\omega = 23°27'32'',935.$$

Analyse. — 1° Trouver les courbes dont les coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires satisfont à l'équation différentielle

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}\,\frac{d^3y}{dx^3} = \left[3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2,$$

dans laquelle dx est supposée constante.

2° On demande de démontrer qu'en posant

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

puis successivement

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} xy\,dx,$$

$$y_2 = \int_{x_0}^{x} xy_1\,dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y_n = \int_{x_0}^{x} xy_{n-1}\,dx,$$

l'expression de y_n sera donnée par la formule suivante :

$$y_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\int_{x_0}^{x} (x^2 - z^2)^n f(z)\,dz.$$

Épure.— Un conoïde est engendré par une droite s'appuyant :

1° Sur une sphère tangente aux deux plans de projection, ayant son centre à $0^m,4$ à droite du centre de la feuille et à $0^m,6$ de chacun des plans de projection ;

2° Sur une verticale menée par l'extrémité du rayon horizontal de la sphère inclinée de 45° sur le plan vertical et dirigée vers la gauche en avant.

Déterminer la section du conoïde par le plan vertical.

Analyse. — Déterminer les surfaces de révolution telles que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure des sections principales soient dirigés dans le même sens et aient une somme constante a.

On indiquera la figure du méridien de la surface.

Calcul astronomique. — La déclinaison du Soleil étant supposée boréale et égale à 16°32′48″, et la latitude du lieu égale à 52°26′17″, calculer à 0″,1 près la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon à $4^h 28^m 15^s$ de temps vrai.

Mécanique. — 1° Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sur un cylindre circulaire droit dont l'axe est vertical. Il est soumis en outre à l'action d'un centre fixe qui l'attire proportionnellement à la distance. On demande d'étudier le mouvement que prendra le point matériel, les conditions initiales de ce mouvement étant quelconques.

2° Le mouvement d'un point matériel est défini par les formules

$$x = a + b\,t + c\,t^2,$$
$$y = a' + b'\,t + c'\,t^2,$$
$$z = a'' + b''\,t + c''\,t^2.$$

Indiquer la nature de la trajectoire et la grandeur de l'accélération à un instant quelconque.

Novembre 1878. — *Analyse.* — Une surface de révolution autour de l'axe des z est définie en coordonnées rectangulaires par l'équation $z = f(\rho)$, dans laquelle ρ désigne la distance d'un point de la surface à l'axe.

1° Trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires, le pôle étant l'origine des coordonnées rectangulaires, des projections sur le plan des xy, des courbes tracées sur la surface qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chaque point de l'une d'elles comprenne la normale à la surface en ce même point;

2° Intégrer l'équation différentielle obtenue.

Mécanique. — Un point matériel de masse égale à 1 est attiré par un centre fixe; l'attraction à la distance x est égale à $\frac{M}{x^7}$, M étant une constante. On suppose qu'à l'origine du temps ce point matériel est situé à une distance a du centre fixe et qu'il est animé perpendiculairement au rayon vecteur d'une vitesse égale à $\sqrt{\frac{M}{3a^6}}$. On demande de déterminer la trajectoire du point mobile, d'assigner sa position et sa vitesse à l'époque t et d'exprimer l'arc parcouru depuis l'origine du temps par une intégrale de la forme

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHLESINGER (O.). — UEBER CONJUGIRTE BINARE FORMEN. Inauguraldissertation. — 57 p. in-8°; Breslau, 1882.

M. Rosanes (*Journal de Crelle*, t. 70) a désigné sous le nom de formes *conjuguées* deux formes binaires de degré n

$$a_x^n = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$\alpha_x^n = \alpha_0 x_1^n + \frac{n}{1} \alpha_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + \alpha_n x_2^n,$$

telles que l'invariant simultané

$$(a\alpha)^n = a_0 \alpha_n - \frac{n}{1} a_1 \alpha_{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n \alpha_0$$

soit nul. La forme la plus générale conjuguée d'une forme donnée a_x^n peut évidemment être regardée comme composée linéairement avec n formes particulières.

Voici en quoi consiste le problème traité par M. Schlesinger. On sait qu'on peut représenter une forme binaire a_x^n par n points d'une courbe rationnelle, les n valeurs correspondantes du paramètre qui définit uniformément les points de la courbe étant respectivement égales aux racines de l'équation $a_x^n = 0$; supposant maintenant qu'on donne ainsi une forme a_x^n par n points d'une conique ou d'une cubique gauche, on demande de construire toutes les formes conjuguées α_x^n. Ce problème, dans le cas d'une forme du troisième degré représentée par trois points p_1, p_2, p_3 d'une cubique gauche, a été résolu par M. Sturm (*Journal de Crelle*, t. 80) et, en effet, il est susceptible d'une solution extrêmement simple : toute forme conjuguée de la forme définie par les trois points p_1, p_2, p_3 est représentée sur la cubique par trois points situés sur l'un quelconque des plans qui passent par le point d'intersection des plans osculateurs aux points p_1, p_2, p_3.

M. Schlesinger traite avec détail de la construction des formes conjuguées d'une forme du troisième degré représentée par trois

points d'une conique et montre comment on peut s'élever de degré en degré jusqu'à la construction des formes conjuguées d'une forme de degré n, en supposant celle-ci représentée soit sur une conique, soit sur une cubique gauche.

A. SOUCHON, Membre adjoint du Bureau des Longitudes. — TRAITÉ D'ASTRONOMIE PRATIQUE, comprenant l'exposition du Calcul des éphémérides astronomiques et nautiques, d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*. — Paris, Gauthier-Villars; 1883. Grand in-8°, XCIV-396 p.

L'Ouvrage que M. A. Souchon vient de publier sous ce titre est consacré à l'ensemble des formules que les astronomes et les marins appliquent chaque jour pour la comparaison des observations. Il n'y est pas question des observations elles-mêmes. L'auteur s'est proposé d'offrir aux astronomes et aux marins un commentaire de la *Connaissance des Temps;* il a donné avec soin toutes les formules qui servent à la construction de ce Recueil et, autant que possible, les a démontrées.

Ce Traité est divisé en quatre Parties, dont la dernière n'est que le tableau des formules démontrées dans les deux précédentes. Un tel tableau ne nous paraît vraiment utile que dans un Bureau de calculs; aucun astronome ne se résignera à appliquer, sans le comprendre, des formules dont la démonstration est, en définitive, assez élémentaire. L'habileté avec laquelle l'auteur a su résumer dans les trois premières Parties les diverses questions étudiées dans cet Ouvrage nous fait regretter qu'il n'ait pas remplacé cette quatrième Partie par une brève théorie des instruments. Ainsi complété, son Livre serait bien un *Traité d'Astronomie pratique,* peu encombrant, d'un usage commode, renfermant tous les renseignements et toutes les formules qu'un astronome doit avoir constamment sous la main.

La première Partie, intitulée : *Correction des positions célestes,* traite des coordonnées équatoriales et écliptiques, géocentriques ou héliocentriques, du passage des unes aux autres, des relations différentielles entre ces coordonnées, de la réfraction atmosphérique par la méthode de Laplace, de la parallaxe,

de la précession, de la nutation et de l'aberration des fixes, du Soleil et des Planètes. Il n'y est pas question des modifications que la précession fait subir aux nombres qui représentent les mouvements propres des étoiles.

La deuxième Partie a pour titre : *Construction des éphémérides,* et est consacrée à l'étude du calendrier, de la construction des éphémérides du Soleil, des planètes, de la Lune, des étoiles et au calcul des distances lunaires.

Enfin, dans la troisième Partie : *Prédiction des phénomènes astronomiques,* il est question des éclipses et autres phénomènes que présentent les satellites de Jupiter, des éclipses de Lune et de Soleil (ces dernières traitées par la méthode Woolhouse, employée au *Nautical Almanac*), des occultations des étoiles et des planètes par la Lune, des marées, des passages de Vénus et de Mercure, des phénomènes que présente l'anneau de Saturne.

Toutes ces questions sont traitées rapidement et généralement par la voie la plus simple. Peut-être l'auteur n'a-t-il pas assez insisté, dans la transcription des formules numériques, sur les unités employées, sur la fixation précise de l'origine du temps; certaines formules, certaines constantes reproduites dans l'Ouvrage et qui ont été longtemps employées par les astronomes, ont été remplacées plus tard par d'autres plus exactes. Peut-être eût-il été utile de donner à cet égard des renseignements très précis; il y a là un des points les plus délicats de l'Astronomie théorique. L'auteur nous pardonnera d'attirer, en vue d'une seconde édition, son attention sur ce sujet.

Des notes courtes et intéressantes terminent plusieurs chapitres. Ainsi, à la fin du Chapitre III de la deuxième Partie, on trouve une utile digression sur le mouvement des planètes, elliptique ou troublé. L'Ouvrage est terminé par des Tables numériques qui seront bien accueillies.

M. Souchon l'a fait précéder d'une Introduction que les astronomes liront avec le plus vif intérêt. Cette Introduction, qui ne compte pas moins de 94 pages, renferme l'historique de diverses questions traitées dans le corps du livre : d'abord une histoire des nombreuses éphémérides astronomiques qui se sont succédé depuis celle de Regiomontanus (1474), particulièrement de la *Connaissance des Temps* (on trouve, à ce propos, le récit d'une querelle

peu mesurée, entre La Hire et Lefebvre, en 1700, qui fait peu d'honneur au caractère de ce dernier); puis l'histoire des Tables de la Lune, successivement construites par Tobie Mayer, Mason, Bouvard, Bürg, Burckhardt, Damoiseau, Plana et Carlini, Lubbock, Hansen et Delaunay; l'histoire des Tables du Soleil et des planètes de Mayer, La Caille, Lalande, Lindenau, Delambre, Bouvard, Carlini, Bessel, de Zach, Hansen et Olufsen, Le Verrier, Newcomb, Kowalski; l'histoire de la découverte et de la théorie des satellites de Jupiter et des questions qui s'y rattachent; une énumération d'un certain nombre de Catalogues d'étoiles; enfin de courtes notices historiques sur les éclipses de Lune et de Soleil, sur les marées, les passages de Mercure et de Vénus et sur les apparences que présente l'anneau de Saturne.

L'analyse précédente montre assez que, si l'Ouvrage de M. Souchon peut comporter, dans une édition ultérieure, quelques améliorations de détail, il doit, tel qu'il est, rendre aux astronomes, aux marins, à tous ceux qui pratiquent ou qui étudient l'Astronomie, de réels services. B. B.

MÉLANGES.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES HYPERELLIPTIQUES AUX FONCTIONS DE PREMIÈRE, DE SECONDE ET DE TROISIÈME ESPÈCE;

PAR M. HERMITE.

L'étude des intégrales hyperelliptiques de la forme $\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}}$, où P, Q et R sont des polynômes quelconques en x, dont le dernier est supposé n'avoir point de facteurs multiples, s'ouvre par la réduction à un terme algébrique et aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce. La méthode consiste à décomposer, en une partie entière et en fractions simples, la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, ce qui ramène d'abord aux quantités $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$,

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^{p+1}\sqrt{R}}$; on fait voir ensuite que, en désignant le degré de R par r, la première peut être réduite pour toute valeur de m, aux cas où cet exposant ne surpasse pas $r-2$, tandis que la seconde se ramène, par un procédé analogue, au seul cas de $p=0$.

Dans une leçon à la Sorbonne, je me suis placé à un point de vue différent pour traiter cette question importante, et je vais l'indiquer en peu de mots.

Je partirai de la forme du dénominateur Q, que donne la méthode des racines égales, à savoir

$$Q = A^{\alpha+1} B^{\beta+1} C^{\gamma+1} \ldots,$$

A, B, C, ... n'ayant que des facteurs simples ; mais, en outre, je mettrai à part, s'il y a lieu, ceux de ces facteurs qui appartiennent au polynôme R. Dans ce cas, j'adopterai l'expression suivante :

$$Q = A^{\alpha+1} B^{\beta+1} C^{\gamma+1} \ldots S^{\sigma} T^{\tau} \ldots,$$

où S, T, ... sont des diviseurs de R, et il me sera ainsi permis de supposer A, B, C, ... premiers avec R.

Cela étant, nous pouvons écrire, en désignant par G, H, ..., M des polynômes entiers

$$\frac{P}{Q} = \frac{G}{A^{\alpha+1}} + \frac{H}{B^{\beta+1}} + \cdots + \frac{M}{S^{\sigma}} + \cdots,$$

et cette expression conduit à deux types d'intégrales

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \int \frac{M\,dx}{S^{\sigma}\sqrt{R}},$$

que je vais considérer successivement.

Je ferai d'abord dans la première

$$G = AX + A'RY,$$

en remarquant qu'on satisfait à cette condition, au moyen de polynômes entiers pour X et Y, attendu que A et A'R n'ont aucun facteur commun, d'après ce que nous avons supposé. Nous aurons donc

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} = \int \frac{X\,dx}{A^{\alpha}\sqrt{R}} + \int \frac{A'Y\sqrt{R}}{A^{\alpha+1}}\,dx,$$

ou encore

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} = \int \frac{X\,dx}{A^{\alpha}\sqrt{R}} - \frac{1}{\alpha}\int D_x\left(\frac{1}{A^{\alpha}}\right) Y\sqrt{R}\,dx.$$

Mais on obtient, en intégrant par parties,

$$\int D_x\left(\frac{1}{A^{\alpha}}\right) Y\sqrt{R}\,dx = \frac{Y\sqrt{R}}{A^{\alpha}} - \int \frac{D_x(Y\sqrt{R})}{A^{\alpha}}\,dx,$$

et l'on en conclut la relation

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} = \int \frac{X\,dx}{A^{\alpha}\sqrt{R}} + \int \frac{D_x(Y\sqrt{R})}{\alpha A^{\alpha}}\,dx - \frac{Y\sqrt{R}}{\alpha A^{\alpha}},$$

à laquelle je donnerai cette autre forme

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}}\,dx = \int \frac{G_1\,dx}{A^{\alpha}\sqrt{R}} - \frac{Y\sqrt{R}}{\alpha A^{\alpha}},$$

en posant, pour abréger,

$$G_1 = X + \frac{1}{2\alpha} YR' + \frac{1}{\alpha} Y'R.$$

On voit que, G_1 étant un polynôme entier comme G, cette égalité donne une formule de réduction dont l'application répétée conduit à l'expression générale

$$\int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} = \int \frac{\Pi\,dx}{A\sqrt{R}} + \frac{\Phi\sqrt{R}}{A^{\alpha}},$$

où Π et Φ représentent des fonctions entières de la variable.

Considérons en second lieu l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{S^{\nu}\sqrt{R}}$, où S est supposé un diviseur de R, de sorte qu'on peut poser

$$R = SU.$$

Cela étant, je détermine deux polynômes entiers X et Y, par la condition

$$M = SX + S'UY,$$

à laquelle on peut ainsi satisfaire, puisque S et S'U sont premiers entre eux. Nous obtiendrons par là

$$\int \frac{M\,dx}{S^{\nu}\sqrt{R}} = \int \frac{X\,dx}{S^{\nu-1}\sqrt{R}} + \int \frac{S'UY}{S^{\nu}\sqrt{R}}\,dx,$$

puis, en remarquant qu'on peut écrire successivement

$$\int \frac{S'UY}{S^\sigma\sqrt{R}}\,dx = \int \frac{S'Y\sqrt{T}}{S^{\sigma+\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\int D_x\left(\frac{1}{S^{\sigma-\frac{1}{2}}}\right) Y\sqrt{U}\,dx$$

$$= -\frac{Y\sqrt{U}}{(\sigma-\frac{1}{2})S^{\sigma-\frac{1}{2}}} + \int \frac{D_x(Y\sqrt{U})}{(\sigma-\frac{1}{2})S^{\sigma-\frac{1}{2}}}\,dx,$$

cette égalité prend la forme

$$\int \frac{M\,dx}{S^\sigma\sqrt{R}} = \int \frac{X\,dx}{S^{\sigma-1}\sqrt{R}} + \int \frac{D_x(Y\sqrt{U})}{(\sigma-\frac{1}{2})S^{\sigma-\frac{1}{2}}}\,dx - \frac{Y\sqrt{U}}{(\sigma-\frac{1}{2})S^{\sigma-\frac{1}{2}}}.$$

Posons, pour abréger,

$$M_1 = X + \frac{1}{2\sigma-1}\,YU' + \frac{1}{1\sigma-\frac{1}{2}}\,Y'U,$$

nous en concluons facilement

$$\int \frac{M\,dx}{S^\sigma\sqrt{R}} = \int \frac{M_1\,dx}{S^{\sigma-1}\sqrt{R}} - \frac{Y\sqrt{R}}{(\sigma-\frac{1}{2})S^\sigma}.$$

C'est donc encore une formule de réduction, et dont l'application peut se continuer sans qu'on soit, comme précédemment, arrêté par la présence d'un logarithme. De proche en proche, nous en concluons l'expression générale

$$\int \frac{M\,dx}{S^\sigma\sqrt{R}} = \int \frac{\Theta\,dx}{\sqrt{R}} + \frac{H\sqrt{R}}{S^\sigma},$$

dans laquelle Θ et H représentent des polynômes entiers.

Revenons maintenant à l'intégrale hyperelliptique, qui a été représentée par la formule

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}} = \int \frac{G\,dx}{A^{\alpha+1}\sqrt{R}} + \int \frac{H\,dx}{B^{\beta+1}\sqrt{R}} + \cdots + \int \frac{M\,dx}{S^\sigma\sqrt{R}} + \cdots$$

Les résultats précédemment obtenus donnent la conclusion suivante :

Soit $K = ABC\ldots$ le produit des facteurs simples de Q, qui

n'appartiennent pas à R; si l'on pose $Q = KL$, on aura

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}} = \int \frac{F\,dx}{K\sqrt{R}} + \frac{G\sqrt{R}}{L},$$

en désignant par F et G des polynômes entiers en x.

L'intégrale à laquelle se trouve ainsi ramenée la proposée conduit immédiatement, si l'on décompose la fonction rationnelle $\frac{F}{K}$ en fractions simples, aux fonctions que l'on nomme de troisième espèce. Mais la partie entière de $\frac{F}{K}$, que je désignerai par E, nous amène à traiter un dernier point, ayant pour objet la réduction de l'intégrale $\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}}$. Dans ce but, j'emploirai le développement en série, suivant les puissances descendantes de x, de l'expression suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}},$$

qu'on obtient facilement, comme on va voir.

Désignons par r le degré de R, et supposons le module de la variable supérieur au module maximum des racines de l'équation $R = 0$; on aura d'abord

$$\frac{1}{\sqrt{R}} = x^{-\frac{r}{2}}\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right).$$

Multiplions ensuite par le polynôme E, dont je représente le degré par e, il viendra ainsi

$$\frac{E}{\sqrt{R}} = x^{-\frac{r}{2}}\left(\beta x^e + \beta_1 x^{e-1} + \ldots + \frac{\gamma}{x} + \ldots\right),$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}} = x^{-\frac{r}{2}}\left(\frac{\beta x^{e+1}}{e - \frac{r}{2} + 1} + \frac{\beta_1 x^e}{e - \frac{r}{2}} + \ldots\right).$$

Nous concluons de là, en multipliant de nouveau par $\frac{1}{\sqrt{R}}$, qu'on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}} = M + S,$$

M étant un polynôme en x de degré $e - r + 1$, S une série $\frac{A}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \cdots$, à laquelle s'ajoute, s'il y a lieu, la quantité $\frac{\log x}{\sqrt{R}}$, multipliée par une constante. C'est le polynôme M qui conduit à la réduction cherchée. Ayant en effet

$$D_x(M\sqrt{R}) = \frac{\frac{1}{2}MR' + M'R}{\sqrt{R}},$$

je considère l'égalité

$$\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}} - M\sqrt{R} = \int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}},$$

où j'écris, pour abréger,

$$N = E - \tfrac{1}{2}MR' - M'R,$$

et je remarque que le degré de N résulte immédiatement de la relation

$$S\sqrt{R} = \int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Si on le désigne par n, et qu'on développe suivant les puissances descendantes de la variable, on trouvera en effet, en égalant les exposants les plus élevés dans les deux membres, la condition

$$\frac{r}{2} - 1 = n - \frac{r}{2} + 1.$$

On a donc $n = r - 2$, et l'égalité

$$\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}} + M\sqrt{R}$$

donne, comme nous l'avons dit, la réduction de l'intégrale proposée. Je terminerai en remarquant que l'équation générale précédemment obtenue, à savoir

$$\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}} = \int \frac{F\,dx}{K\sqrt{R}} + \frac{G\sqrt{R}}{L},$$

ne détermine pas complètement les polynômes F et G. Sans altérer la forme du second membre, on peut, en effet, lui ajouter la quantité identiquement nulle

$$\int \frac{\frac{1}{2}HR' + H'R}{\sqrt{R}}\,dx - H\sqrt{R},$$

où H est un polynôme arbitraire. Mais nous voyons par là qu'on peut toujours, en disposant de ce polynôme, supposer le degré de G moindre que celui de L.

Pour plus de clarté, désignons par f, g, k, l les degrés de F, G, K, L; on aura ainsi $g = l - 1$, et notre égalité montre, en développant suivant les puissances descendantes de x le terme algébrique et les deux intégrales, qu'il faut prendre $f = r + k - 2$, si l'on suppose, comme on peut le faire, le polynôme P de degré moindre que Q. Cela étant, il est facile de voir que G et F se trouvent alors déterminés. Prenons en effet la dérivée de l'équation, et remarquons pour cela que le quotient $\frac{L'}{L}$ est de la forme $\frac{J}{KR}$, en désignant par J un polynôme de degré $r + k - 1$. Un calcul facile nous donne

$$P = FL + G(\tfrac{1}{2}KR' - J) + G'KR;$$

or, le degré par rapport à x de l'identité à laquelle il faut ainsi satisfaire étant $r + k + l - 2$, on obtient $r + k + l - 1$ équations qui déterminent, par conséquent, les coefficients de G, au nombre de l, et ceux de F, au nombre de $r + k - 1$. De là résulte un second procédé que je me contenterai d'avoir indiqué en quelques mots, pour parvenir à la formule générale de réduction des intégrales hyperelliptiques.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME RELATIF A LA SOMME DES CUBES DES NOMBRES SECONDAIRES;

PAR M. ÉMILE BARBIER.

Formons une table de multiplication

$$\begin{array}{lllll} 1\times 1, & 1\times 2, & 1\times 3, & \ldots, & 1\times n, \\ 2\times 1, & 2\times 2, & 2\times 3, & \ldots, & 2\times n, \\ 3\times 1, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & 3\times n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ n\times 1, & n\times 2, & n\times 3, & \ldots, & n\times n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

La somme de tous les produits contenus dans les N premières

lignes et les N premières colonnes est évidemment le carré de la somme des N premiers nombres. Il suffit, pour le reconnaître, d'effectuer la sommation par lignes horizontales ou verticales.

Formons la somme d'une autre manière. Groupons les produits de la manière suivante :

$$1 \times 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ + 2 \times 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 \\ + 2 \times 3 + 1 \times 3 \end{array} \right.$$

....

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad 1 \times n \;+\; 2 \times n + \ldots \;+ (n-1).n + n.n \\ + (n-1)n + (n-2)n + \ldots + \;1.n, \end{array} \right.$$

le groupe général se composant de tous les produits contenus dans la $n^{\text{ième}}$ ligne et la $n^{\text{ième}}$ colonne jusqu'à l'élément commun inclusivement. Si l'on fait la somme de tous ces produits, dans chaque groupe, en ajoutant d'abord ceux que nous avons disposés sur la même ligne verticale, on obtient pour le groupe de rang n, n fois n^2, c'est-à-dire n^3.

Donc la somme des cubes des N premiers nombres est égale au carré de la somme de ces nombres.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

SUJETS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SUITE ET FIN.)

Astronomie. — Sachant qu'un astre A a, à une certaine époque, pour coordonnées écliptiques

$$\lambda = 2^\circ 51' 4'', 45 \quad \text{et} \quad L = 9^\circ 33' 38'', 386,$$

on demande les coordonnées équatoriales correspondantes.

On prendra pour l'obliquité de l'écliptique

$$\omega = 23^\circ 27' 32'', 09.$$

Juillet 1879. — *Analyse.* — 1° Déterminer les trajectoires ortho-

gonales des courbes définies en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(x^2+y^2)^2 = \pm a^2 xy,$$

dans laquelle a désigne un paramètre variable.

2° Soit AB un arc de courbe sur lequel il n'y a ni points singuliers ni points d'inflexion. En un point quelconque m de l'arc, on mène la normale sur laquelle on porte, à partir de m, de part et d'autre, les longueurs mm_1, mm_2 égales à une ligne donnée l; le point m décrivant l'arc AB, les points m_1, m_2 décrivent deux arcs correspondants A_1B_1 A_2B_2.

Démontrer les relations suivantes :

$$S_1 = S - l\theta, \quad S_2 = S + l\theta,$$

dans lesquelles S_1, S, S_2 représentent les longueurs des arcs A_1B_1, AB, A_2B_2; θ l'angle des normales extrêmes.

On suppose que l'arc A_1B_1, situé du côté de l'arc AB où se trouve sa développée, ne rencontre pas cette développée.

Épure. — On donne : 1° un cône de révolution dont l'axe est vertical. Le sommet de ce cône se trouve sur le grand axe de la feuille, à $0^m,06$ des deux plans de projection. Les génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

2° Une droite parallèle au plan vertical à $0^m,09$ en avant du plan vertical. La trace horizontale de cette droite est à $0^m,05$ à gauche du centre de la feuille et sa projection verticale passe par la projection verticale du sommet du cône.

On demande de construire le contour apparent horizontal du conoïde engendré par une horizontale s'appuyant constamment sur la droite et sur le cône.

Indiquer à l'encre la construction pour trouver un point du contour apparent. On ne représentera à l'aide de génératrices que la partie de surface opaque du conoïde placée au-dessous du sommet du cône, tout en indiquant en trait mixte la portion du contour apparent correspondant à la région enlevée du conoïde.

Mécanique. — Un point matériel non pesant, de masse m, est assujetti à se mouvoir sur la surface d'une sphère de rayon l: dans

chacune de ses positions, il est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à un plan fixe P mené par le centre de la sphère, dirigée vers ce plan, et dont l'intensité est $\frac{mk^2}{z^3}$, z désignant la distance du mobile au plan. On suppose la vitesse initiale parallèle au plan :

1° Trouver la projection de la trajectoire sur le plan P;

2° γ et θ désignant les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette projection, donner les expressions de r et de θ en fonction du temps, dans le cas où l'on a

$$\gamma_0^2 z_0^2 - k^2 > 0,$$

γ_0 désignant la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de z.

Astronomie. — L'obliquité de l'écliptique étant supposée de $23^\circ 27' 26'',4$, on donne l'ascension droite d'un astre égale à $14^h 17^m 35^s,28$ et sa déclinaison égale à $-46^\circ 49' 13'',7$. Calculer la longitude et la latitude à $0'',1$ près.

Analyse. — Étant donné le paraboloïde défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{mx^2 + y^2}{2a},$$

on considère sur cette surface les courbes dont les tangentes font un angle constant donné γ avec l'axe OZ:

1° Trouver l'équation différentielle des projections de ces courbes sur le plan XOY et montrer que l'intégration de cette équation se ramène à une quadrature;

2° Effectuer la quadrature et construire la projection dans le cas particulier où m est égal à l'unité.

Mécanique. — 1° Étudier le mouvement d'un point matériel M assujetti à se mouvoir sur un paraboloïde de révolution et attiré vers le foyer F de ce paraboloïde par une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

2° On sait qu'il existe à chaque instant dans le mouvement d'un plan mobile Q, sur un plan fixe P, deux points dont l'un a une vitesse nulle et l'autre une accélération nulle.

On demande quel doit être le mouvement du plan Q sur le plan P pour que le point B soit fixe et la distance AB constante.

Astronomie. — Calcul d'une éclipse de Lune.

Heure de l'apparition, temps moyen	17h 39m 30s,3
Déclinaison à cette époque de la Lune.........	4°.53'.17",4
Déclinaison du Soleil.........................	3.57.15,9
Mouvement horaire en ascension de la Lune...	30.11,3
Mouvement horaire en ascension du Soleil	2.18
Mouvement en déclinaison de la Lune.........	16.13,6
Mouvement en déclinaison du Soleil	58,7
Parallaxe horizontale de la Lune	57.59,9
Parallaxe horizontale du Soleil...............	8,9
Demi-diamètre de la Lune....................	15.49,8
Demi-diamètre du Soleil......................	16. 7,9

On demande l'époque du commencement, du milieu et de la fin de l'éclipse.

Novembre 1879. — *Analyse.* — On donne les deux surfaces définies en coordonnées rectangulaires par les équations

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \text{ (hélicoïde gauche)}$$

et

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

surface engendrée par la rotation d'une chaînette autour de l'axe OZ.

Soient M un point de la première surface, M_1 un point de la seconde, θ l'angle du plan MOZ avec le plan ZOX, l la distance du point M à l'axe OZ, θ_1 l'angle du méridien M_1OZ avec le plan ZOX, σ l'arc AM_1 de ce méridien compris entre le point m_1 et l'équateur de la surface. On dit que le point m_1 de la deuxième surface correspond au point m de la première lorsqu'on a $\theta_1 = \theta$, $\sigma = l$; le point M décrivant une courbe C sur la première surface, le point M_1 décrit une courbe correspondante C_1 sur la deuxième surface:

1° Démontrer que les arcs correspondants des courbes C et C_1 ont même longueur;

2° Démontrer que les produits des rayons de courbure principaux des deux surfaces en deux points correspondants sont égaux.

Mécanique. — Une figure plane se meut dans son plan de manière que deux de ses points A et B restent constamment sur deux droites rectangulaires fixes Ox, Oy; on sait que le point A est animé d'un mouvement uniforme sur la droite Ox.

On propose de déterminer pour une époque quelconque :

1° La vitesse angulaire ω de la rotation autour du centre instantané;

2° L'accélération d'un point quelconque de la droite AB en grandeur et en direction.

Soient O un centre d'attraction, OX une droite fixe passant par ce point; un point matériel M est sollicité à chaque instant par une force dirigée vers le point O et dont l'intensité est $\frac{n}{r^2 \cos^2\theta}$, n désignant une constante, r et θ étant les coordonnées polaires du point M, $r = OM$; $\theta = XOM$. La vitesse initiale est dirigée dans le plan qui passe par la position initiale M_0 et la droite OX. On demande de déterminer la nature de la trajectoire du point matériel.

Examiner, en particulier, le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire à OM_0.

Astronomie. — Calculer l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne d'une planète, sachant que l'anomalie vraie est de $123°37'15''$ et que l'excentricité de l'orbite a pour valeur 0,016759566.

Juillet 1880. — *Analyse*. — Déterminer la courbe C telle que le triangle TMN, dont les côtés sont la tangente MT en un point quelconque, la normale MN au même point, la perpendiculaire NT élevée au pôle O sur le rayon vecteur OM ait une aire constante donnée a^2.

On indiquera la figure de chacune des branches de la courbe.

Épure. — On considère une surface réglée ayant pour directrices :

1° Une circonférence ayant son centre sur le grand axe de la

feuille à $0^m,10$ des deux plans de projection. Le plan de cette circonférence est horizontal et elle a $0^m,04$ de rayon;

2° Une perpendiculaire au plan vertical sur le grand axe de la feuille à $0^m,14$ au-dessus de ce plan horizontal;

3° Une parallèle à la ligne de terre à $0^m,10$ en avant du plan vertical et $0^m,06$ au-dessus du plan horizontal.

Indiquer à l'encre la détermination d'un point du contour apparent.

Mécanique. — Un fil flexible et inextensible sans masse, de longueur l, passe sur une très petite poulie O et porte à ses deux extrémités deux points matériels M et M' de masses m et m'.

Le point M est assujetti à se mouvoir sur une droite fixe OX; il est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe A de cette droite.

Trouver le mouvement des deux points M et M', ce mouvement étant supposé se faire dans le plan qui passe par OX et M'_0, position initiale de M'.

On fera $OA = a$ et l'on représentera par μm l'attraction de A sur M à la distance 1.

On supposera qu'à l'origine du mouvement le point M est en O et qu'il a reçu une vitesse h dirigée de O vers A, que le point M' a reçu une vitesse k perpendiculaire sur OM'_0.

Effectuer les quadratures lorsque $l = a$ et trouver la trajectoire de M'; faire complètement les calculs en supposant

$$m = m',$$
$$h = k = a\sqrt{3\mu}.$$

Astronomie. — Le demi-grand axe de l'orbite d'une planète est égal à 2,954267; l'excentricité est égale à 0,218709. Étant donnée l'anomalie vraie égale à 143°28'17",6, calculer les valeurs correspondantes du rayon vecteur et de l'anomalie moyenne.

Analyse. — I. En un point quelconque M de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène la tangente, que l'on prolonge jusqu'à son point de

rencontre T avec l'axe Ox, puis l'on fait tourner la figure autour de cet axe.

Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A étant le sommet de la courbe, et par la tangente MT :

1° En fonction de l'abscisse du point M;

2° En fonction de l'abscisse du point T.

II. Soient OX, OY, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires et dans le plan ZOX une courbe donnée C. Une surface est engendrée par une circonférence de cercle dont le plan reste parallèle au plan XOY, dont le centre décrit la courbe C et qui rencontre constamment OZ.

On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface en prenant pour variables la coordonnée Z d'un point quelconque M et l'angle θ du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan ZOX.

Appliquer au cas où la courbe C est une parabole ayant le point O pour sommet et la droite OX pour axe.

Mécanique. — 1° Un tube circulaire, infiniment petit, peut tourner librement autour d'un de ses diamètres qui est fixe; dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point matériel.

Déterminer le mouvement de ce système en supposant que les seules forces qui agissent sur le tube et sur le point soient leurs réactions normales mutuelles.

On donne le rayon r du cercle, le moment d'inertie A du tube par rapport à l'axe fixe et la masse m du point mobile.

2° Un corps solide se meut autour d'un point fixe; trouver à chaque instant le lieu des points du corps pour lesquels l'accélération est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.

Astronomie. — A un lieu dont la latitude est

$$\lambda = 48^\circ 50',$$

la distance zénithale observée est

$$Z = 61^\circ 48' 30'';$$

la réfraction calculée $1',8$;

les coordonnées équatoriales de l'étoile observée

$$\mathcal{R} = 4^h 28^m 48^s,38,$$
$$\delta = 73^\circ 44' 30''.$$

On demande l'heure sidérale.

Novembre 1880. — *Analyse.* — On considère le conoïde défini par l'équation

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques du conoïde.

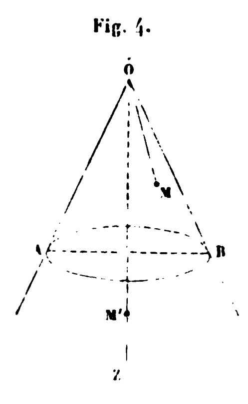
2° Intégrer cette équation.

3° Chercher quelle doit être la fonction φ pour que la projection de l'une des lignes asymptotiques, sur le plan de xy, soit le cercle représenté par l'équation $x^2 + y^2 = ay$.

Quelles seront, dans ce dernier cas, les projections des autres lignes asymptotiques.

Mécanique. — On donne un cône de révolution dont l'axe OZ est vertical et l'angle au sommet AOB $= 2\alpha$; en O se trouve une très petite poulie sur laquelle passe un fil de longueur l, portant à

Fig. 4.



ses deux extrémités des poids égaux à M et M'; M est assujetti à rester sur la surface du cône M' sur l'axe OZ.

Déterminer le mouvement.

On supposera, pour les données initiales, que, pour $t = 0$, $OM = r_0$; que la vitesse initiale V_0 du point M est égale à $\sqrt{2gh}$ et est dirigée tangentiellement au parallèle du point de départ; enfin que la vitesse initiale de M' est nulle.

On s'attachera particulièrement à fixer les limites entre lesquelles varie la distance $OM = r$.

On considérera, en dernier lieu, le cas de

$$h = \frac{8}{3} r_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Astronomie. — La durée de la révolution d'une planète autour du Soleil est de $1035^{\text{jours}},438$, l'excentricité de son orbite est 0,245367. Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage de la planète, à son périhélie, jusqu'à l'instant auquel son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.

Juillet 1881. — *Analyse.* — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$\left(x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2}\right)(x^2 + y^2) \\ - \left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}\right)(x^2 + y^2) - \left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}\right)^3 = 0,$$

les coordonnées étant rectangulaires :

1° Transformer cette équation en substituant aux variables indépendantes x et y les coordonnées polaires ρ et θ.

2° Intégrer l'équation transformée et indiquer le mode de génératrice des surfaces représentées par l'intégrale.

Géométrie descriptive. — On donne :

1° Une circonférence AA' dans un plan horizontal à $0^m,08$ au-dessus du plan horizontal. Le centre de cette circonférence se trouve sur le grand axe de la feuille, à $0^m,08$ en avant du plan vertical, et le rayon a pour longueur $0^m,04$;

2° La parallèle à la ligne de terre BB' à $0^m,04$ au-dessus du plan horizontal et $0^m,08$ en avant du plan vertical;

3° La verticale C à $0^m,04$ à droite du centre de la feuille et $0^m,04$ en avant du plan vertical.

Trouver :

1° Un point de contour apparent vertical de la surface réglée déterminée par les trois directrices ABC;

2° Un point de la trace horizontale de la même surface, ainsi que la tangente en ce point.

Astronomie. — La comète de Donati fut observée par James Ferguson, à Washington, le 13 octobre 1858, à $6^h 26^m 21^s,01$ temps moyen, qui trouva pour l'ascension droite et la déclinaison corrigées de la réfraction

$$\mathcal{A} = 236^\circ 48' 0'',05,$$
$$\mathcal{D} = 7^\circ 36' 52'',08,$$

le logarithme de la distance de la comète à la Terre étant

$$l\Delta = 9{,}7444.$$

On demande le lieu géocentrique correspondant.

Analyse. — 1° Former l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde défini, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z.$$

2° Exprimer, en fonction de la variable z, chacun des deux rayons principaux, pour tout point de la ligne de rencontre du paraboloïde proposé avec le paraboloïde défini par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda.$$

Astronomie. — Le 1er janvier 1851, l'ascension droite de α du Cocher (la Chèvre) était de $5^h 5^m 42^s,03$, et la déclinaison $45^\circ 50' 22'',4$. On demande de trouver sa longitude et sa latitude en adoptant pour l'obliquité de l'écliptique

$$23^\circ 27' 25'',47.$$

Mécanique. — On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB, tournant autour de sa base AB.

Un point matériel M, non pesant, est assujetti à rester sur

cette surface que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB, dirigée vers AB et dont l'intensité est proportionnelle à la distance r du mobile à AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Fixer les limites entre lesquelles r peut varier.

Données. — a, diamètre du cercle générateur de la cycloïde; r_0, valeur initiale de r; ε, angle de r_0 avec la tangente au parallèle du point de départ; k, intensité de la force d'attraction exercée par AB sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

Un triangle isoscèle rectangle AOB de forme invariable et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe est animé d'un mouvement quelconque. Soient, à un instant quelconque, AA′, BB′ les vitesses respectives des points A et B. Démontrer que la projection de AA′ sur OB est égale à la projection de BB′ sur AO et que, des deux angles formés, l'un, par les directions AA′ et OB, l'autre, par les directions BB′ et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

Novembre 1881. — Déterminer les fonctions u et v de deux variables indépendantes x, y dont les différentielles totales vérifient les relations

$$du = (3u + 12v)dx + (2u + 12v)dy,$$
$$dv = (u + 2v)dx + (u + v)dy.$$

Mécanique. — On considère deux points matériels M, M′ de masses m et m', que l'on suppose non pesants. L'un d'eux M est assujetti à demeurer sur un plan P; l'autre à demeurer sur une droite OZ, perpendiculaire au plan P. De plus, ces deux points sont reliés par un fil tendu MOM′ de longueur l, qui passe par une petite ouverture pratiquée en O dans le plan P. On demande de déterminer le mouvement de ces deux points, en supposant qu'ils se repoussent proportionnellement à la distance, la répulsion mutuelle à la distance 1 étant μ. On négligera le frottement, et l'on représentera par r_0 la distance du point O à la position centrale M_0 de M par v_0 la vitesse initiale de M, qui sera supposée perpendiculaire à OM_0;

2° Un point M se meut d'un mouvement uniforme sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire dont on demande :

1° De montrer que, toutes les fois que le point M traversera un plan (P), la normale à la trajectoire, située dans ce plan (P), ira passer par un point fixe de ce plan. On projette le point M sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, parallèlement à la tangente à l'hélice au point où elle coupe ce plan. Soit m la projection de M. On construit, à un instant quelconque, la grandeur géométrique qui représente l'accélération du point m. On demande le lieu du point m'. Dans quel cas ce lieu se réduira-t-il à une droite? Quelle est la trajectoire du point m?

Astronomie. — Sachant que les coordonnées écliptiques d'un astre sont, à une certaine époque,

$$\lambda = 2°51'4'',55,$$
$$\mathcal{L} = 9°33'38'',386.$$

On propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes. L'obliquité de l'écliptique est supposée égale à

$$\omega = 23°27'32''.935.$$

On a, pour Washington,

$$\varphi = 38°53'39'',03,$$
$$l\rho \cos\varphi' = 9,8917,$$
$$l\rho \sin\varphi' = 9,7955,$$

et le temps moyen de l'observation réduit en temps sidéral est

$$\theta = 19^h 55^m 16^s,98.$$

Mécanique. — On donne une ellipse dont les axes ont pour longueur $2a$ et $2b$; cette ellipse sert de base à un cylindre droit indéfini, sur lequel un point matériel est assujetti à se mouvoir. Ce point est, en outre, attiré proportionnellement à la distance par le centre O de l'ellipse. Déterminer le mouvement et discuter les divers cas qui peuvent se présenter.

Données : on représentera par k^2 l'attraction du centre O sur l'unité de masse, à l'unité de distance, par v_0 la vitesse initiale, par ε l'angle qu'elle fait avec la génératrice du cylindre, par z_0 la

distance de la position initiale du mobile au plan de l'ellipse, et par x_0 la distance de ce même point au plan qui passe par l'axe du cylindre et le petit axe de l'ellipse.

Appliquer les formules trouvées au cas du $b = a$; que faut-il dans ce cas, pour que la trajectoire soit une courbe formée, ou bien une courbe plane?

Calculer, dans la même hypothèse, la réaction du cylindre.

Dynamique. — On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB tournant autour de sa base AB.

Un point matériel M non pesant est assujetti à rester, dans chacune de ses positions sur cette surface, que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB, dirigée vers AB, et dont l'intensité est proportionnelle à la distance r du mobile à AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter; *fixer les limites entre lesquelles r peut varier.*

Données : a, diamètre du cercle générateur de la cycloïde; v_0, vitesse initiale; r_0, valeur initiale de r; ε, angle de v_0 avec la tangente au parallèle du point de départ; k^2, intensité de la force d'attraction exercée par AB sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

Cinématique. — Un triangle isoscèle rectangle AOB, de forme invariable, et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe, est animé d'un mouvement quelconque : soient, à un instant quelconque, AA′, BB′ les vitesses respectives des points A, B.

Démontrer que la projection de AA′ sur OB est égale à la projection de BB′ sur OA et que, des deux angles formés, l'un par les directions AA′ et OB, l'autre par les directions BB′ et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

Astronomie. — Le 1[er] janvier 1851, l'ascension droite de α_q Cocher (la Chèvre) était de

$$5^h 5^m 42^s.03,$$

et la déclinaison

$$+45^\circ 50' 22''.04.$$

On demande de trouver sa longitude et sa latitude, en adoptant

pour l'obliquité de l'écliptique

$$23°27'25'',47.$$

Analyse. — 1° Former l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde défini, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

2° Exprimer, en fonctions de la variable z, chacun des deux rayons de courbure principaux, pour tout point de la ligne de rencontre du paraboloïde proposé avec le paraboloïde défini par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NETTO (E.). — SUBSTITUTIONSTHEORIE UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE ALGEBRA. — 1 vol. in-8°. Leipzig, Teubner; 1882.

Dans son Traité bien connu, M. Jordan, développant les méthodes de Galois, considère la résolution par radicaux comme une des applications de la théorie des substitutions. En se plaçant à ce point de vue, il faut étudier les groupes de substitutions comme un nouvel algorithme et en développer les propriétés indépendamment de toute application. Cette méthode a l'avantage de donner des résultats généraux pouvant avoir des applications nombreuses.

M. Kronecker, suivant une voie toute différente, montre que le principe de Galois résulte de la théorie générale de l'élimination. Sa méthode, qui consiste tout d'abord à ne faire que le nombre d'abstractions nécessaires pour résoudre les questions d'Algèbre dans toute leur généralité, permet d'avoir toujours présent à l'esprit l'objet même que l'on a en vue, d'insister sur ses propriétés essentielles, et, dans les recherches si difficiles de l'Algèbre, donne ainsi moins de prise à l'erreur.

Je caractériserai l'Ouvrage de M. Netto en disant que c'est à la fois une introduction à la lecture des différents Mémoires publiés sur la théorie des substitutions et à l'étude des Communications célèbres faites par M. Kronecker à l'Académie des Sciences de Berlin.

Il est écrit dans un style à la fois clair et concis et a l'avantage de contenir des exemples nombreux. La division des matières est faite avec art, et l'intérêt que l'on éprouve à la lecture de l'Ouvrage ne faiblit pas un instant. C'est déjà un bien beau résultat, si l'on songe que l'on a affaire à l'une des branches les plus arides des Mathématiques.

Une seule fois (§ 56), on suppose connu un théorème qui n'est démontré que plus tard (§ 104), afin de pouvoir énoncer de suite, d'une manière générale, le théorème, que le plus grand commun

diviseur des discriminants de toutes les fonctions correspondant au même groupe est une puissance déterminée du discriminant des éléments du groupe. On est ainsi amené à parler, dès le § 56, d'un *genre* de fonctions, alors que l'idée même de genre n'est introduite que plus tard (§ 98).

Les fautes d'impression sont peut-être un peu nombreuses; mais elles ne sont d'aucune importance.

L'auteur nous dit, dans sa Préface, que si la différence des méthodes employées ne lui a pas permis de faire usage de l'Ouvrage de M. Serret, il doit à celui de M. Jordan, non seulement les idées fondamentales qu'il y a puisées, mais encore la marche suivie dans certaines démonstrations du *Traité des substitutions*. Mais bien souvent on remarque l'influence exercée par la lecture des publications de M. Kronecker sur le choix des méthodes employées. Et il est bien naturel que M. Netto regrette de n'avoir pu tenir compte de la publication trop récente du profond, mais difficile Mémoire de l'illustre géomètre : *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (1).

Le Livre de M. Netto se distingue du Traité de M. Jordan et par son point de départ, et parce qu'il limite l'étude des groupes de substitutions à celles de leurs propriétés qui trouvent une application immédiate dans la théorie de la résolution des équations par radicaux. La première Partie comprend une théorie des substitutions et des fonctions entières; dans la seconde moitié du volume, cette théorie est appliquée à l'étude des équations algébriques. Ce qui fait l'originalité de l'Ouvrage est la méthode suivie par l'auteur. Je vais essayer d'en donner un aperçu.

---

(1) Ce grand Mémoire est, en effet, la base des belles théories de M. Kronecker. Sa publication tend à réaliser l'espoir exprimé par M. Jordan dans la préface de son *Traité des substitutions*, de voir grouper un jour en un corps de doctrine, suivi et complet, les beaux théorèmes du célèbre géomètre.

Mais il reste à développer ces théories et à les faire connaître à tous. M. Kronecker a bien voulu m'autoriser à entreprendre ce travail. Grâce à son extrême obligeance, je pense tout d'abord rédiger et publier prochainement sa *Théorie générale de l'élimination*, un des Chapitres les plus importants de ses recherches.

II.

On trouve facilement des fonctions entières de plusieurs variables indépendantes dont la *forme* ne change pas quand on échange entre elles de toutes les manières possibles les n variables qu'elles renferment. Ces fonctions sont dites symétriques; elles sont univalentes. Inversement il est facile de voir que toute fonction entière univalente est symétrique. Toute fonction symétrique de n éléments peut s'exprimer rationnellement et d'une seule manière par les fonctions symétriques élémentaires de ces éléments. Une des fonctions symétriques les plus importantes est le discriminant Δ des n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Lorsqu'une fonction entière n'est pas symétrique, elle est multivalente. Les fonctions multivalentes les plus simples sont les fonctions bivalentes; leur étude nous indique la voie qui devra être suivie pour trouver, en général, les propriétés des fonctions multivalentes.

L'existence d'une fonction bivalente se déduit de celle d'une fonction alternée; d'ailleurs toutes les fonctions alternées sont divisibles par $\sqrt{\Delta}$, et, comme on voit facilement que $\sqrt{\Delta}$ est une fonction alternée, on obtient à la fois la démonstration de l'existence d'une fonction bivalente et le type général de toutes ces fonctions, savoir, $S_1 + S_2\sqrt{\Delta}$, S_1 et S_2 étant des fonctions symétriques et Δ le discriminant. On voit ainsi que toutes les substitutions composées d'un nombre impair de transpositions changent la valeur d'une fonction bivalente, tandis que toutes les substitutions composées d'un nombre pair de transpositions laissent cette valeur invariable. Enfin toute fonction bivalente de n éléments est racine d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles symétriques des n éléments. On voit de suite que la réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie et que l'on ne doit considérer les racines d'une équation du second degré comme fonctions bivalentes que si elles sont fonctions rationnelles des éléments.

Des questions analogues, mais plus générales, se posent immédiatement. Existe-t-il des fonctions de n variables ayant un nombre

déterminé ρ de valeurs? Dans le cas où elles existent, quelles sont les substitutions qui laissent la fonction invariable? Quelles relations y a-t-il entre les ρ valeurs d'une fonction multivalente? Enfin n'y a-t-il pas un lien commun entre toutes les fonctions invariables par les mêmes substitutions?

La théorie des substitutions n'est encore que peu avancée; elle ne permet de répondre qu'en partie aux questions posées.

On démontre tout d'abord qu'à toute fonction correspond un groupe tel que les substitutions de ce groupe ne changent pas la valeur de la fonction, et qu'inversement à tout groupe correspondent une infinité de fonctions. Ce théorème permet de classer les fonctions entières de n variables, et l'étude de ces fonctions est ainsi ramenée à celle de tous les groupes de substitutions possibles entre n éléments.

Dans l'état actuel de la Science on ne peut former tous ces groupes; on se contente d'examiner les cas les plus simples: le groupe symétrique d'ordre $n!$ auquel correspondent les fonctions symétriques; le groupe unique d'ordre $\frac{n!}{2}$ auquel correspondent les fonctions bivalentes, et que l'on nomme *groupe alterné;* les groupes formés à l'aide d'une seule substitution; ceux qui sont formés à l'aide de deux substitutions s_α, s_β, telles que $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha^\lambda$; enfin le groupe de degré n et d'ordre p^f, f étant la plus haute puissance du nombre premier p, divisant $n!$

C'est un théorème fondamental que, si ρ désigne le nombre de valeurs d'une fonction de n éléments, et r l'ordre du groupe correspondant, $r.\rho = n!$; il exclut déjà la possibilité de l'existence d'un grand nombre de fonctions multivalentes. Les théorèmes analogues et leurs corollaires sur les groupes contenant et contenus sont bien connus.

En considérant les groupes correspondant aux ρ valeurs d'une fonction, on voit que leurs substitutions sont semblables; on est ainsi amené à introduire l'idée des groupes *transformés*, et à en étudier les propriétés, ce qui permet de démontrer le théorème de Cauchy généralisé par M. Sylow : si l'ordre d'un groupe G est divisible par p^α, p désignant un nombre premier, G comprend des groupes d'ordre p^α. Les conséquences de ce théorème, dont la démonstration repose sur la possibilité de former un groupe d'ordre

p^f, f étant la plus haute puissance de p divisant $n!$, sont fort importantes.

Un exemple nous montre qu'il existe des fonctions telles que les groupes correspondant à leurs ρ valeurs aient des susbstitutions communes. On démontre que, pour $n \gtrless 4$, les seules fonctions jouissant de cette propriété sont les fonctions symétriques ou alternées. Pour $n = 4$ on rencontre, au contraire, le groupe singulier

$$[1, (x_1x_2)(x_3x_4),\quad (x_1x_3)(x_2x_4),\quad (x_1x_4)(x_2x_3)].$$

Après avoir trouvé les relations qui relient les groupes correspondant aux ρ valeurs d'une fonction multivalente, on peut se proposer de trouver les rapports existant entre les ρ valeurs de la fonction elle-même. Elles sont racines d'une équation de degré ρ, dont les coefficients sont fonctions symétriques des éléments. Dans le cas où les n éléments sont indépendants, les seules fonctions multivalentes dont une puissance est symétrique sont les fonctions alternées; dans tout autre cas, l'équation précédente ne peut être binôme. Et si $n > 4$, il n'y a pas de fonctions ($\rho > 2$) de n éléments indépendants dont une puissance soit fonction bivalente. Pour $n = 3, 4$ on trouve, au contraire, que si ω désigne une racine cubique primitive de l'unité,

$$\varphi = x_1^r + \omega^2 x_2^r + \omega x_3^r,$$
$$\varphi_1 = (x_1x_2 + x_3x_4) + \omega(x_1x_3 + x_2x_4) + \omega^2(x_1x_4 + x_2x_3)$$

répondent à la question; φ^3 et φ_1^3 sont des fonctions bivalentes.

Pour pouvoir continuer à répondre aux questions posées, il importe de considérer quatre propriétés principales des groupes de substitutions. La première appartient à Cauchy; c'est celle de la *transitivité*. Un des théorèmes fondamentaux est dû à M. Jordan : *Tout groupe transitif a au moins* $(n-1)$ *substitutions qui permutent les n éléments. S'il en a davantage, il contient aussi des substitutions permutant moins de* $(n-1)$ *éléments*.

Les groupes peuvent être plusieurs fois transitifs. Si un groupe k fois transitif ($k > 1$) contient une substitution circulaire de trois éléments, il contient le groupe alterné; s'il contient une transposition, il est symétrique. On en déduit, à l'aide de lemmes

faciles à établir, que, si un groupe de degré n n'est ni alterné, ni symétrique, il ne peut être plus de $\left(\frac{n}{3}+1\right)$ fois transitif.

Les théorèmes énoncés n'ont, en général, lieu que pour $k > 1$. Cela tient à une propriété de certains groupes une fois transitifs. Cette propriété est la *non-primitivité*. Gauss et Abel en font déjà mention. Les groupes transitifs qui ne sont pas non primitifs sont dits *primitifs*. Un groupe primitif qui contient une substitution circulaire s_1 d'ordre p contient une série de substitutions semblables $s_1, s_2, \ldots, s_{n-p+1}$, telles que s_λ soit formé à l'aide des éléments

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1+\lambda};$$

le choix de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ est arbitraire. Ce groupe est $(n-p+1)$ fois transitif. On voit donc que le manque de la non-primitivité donne à un groupe transitif un caractère plus général en excluant certaines relations particulières.

Déjà, en étudiant les groupes transformés d'un groupe donné, on rencontre des substitutions échangeables, des groupes permutables. On est ainsi amené à parler d'une troisième propriété des groupes dont la notion est due à Galois et qui est de la plus haute importance : la distinction des groupes *simples* et *composés*, la définition de la *suite* d'un groupe, la constance de ses facteurs de composition. La suite de composition correspondant au groupe symétrique est, pour $n > 4$, le groupe alterné et l'unité; le groupe alterné de plus de quatre éléments est *simple*.

La *suite principale* d'un groupe est particulièrement importante, lorsque l'ordre d'un de ses groupes H est égal à celui du groupe suivant J, multiplié par une puissance ν d'un nombre premier p. Les substitutions de H sont alors échangeables, à des substitutions de J près. On démontre également la réciproque de ce théorème.

La quatrième propriété dont il est fait mention est celle de l'isomorphisme holoédrique et mériédrique. Elle est souvent utile. A chaque groupe transitif d'ordre r correspond un groupe transitif isomorphe holoédrique d'ordre et de degré r. Tout groupe transitif dont l'ordre est égal au degré ne contient que des substitutions permutant tous les éléments; ces substitutions se

composent de cycles du même ordre. Lorsque deux de ces groupes sont isomorphes, ils sont semblables.

En introduisant des groupes réciproquement mériédriques, M. Capelli a généralisé la notion d'isomorphisme, donnée par M. Jordan dans son Traité. M. Netto ne développe pas cette théorie, mais rappelle que la construction des groupes intransitifs, à l'aide de groupes transitifs, peut être ramenée à celle de groupes réciproquement mériédriques.

On peut maintenant répondre à la dernière des questions que nous nous étions posées. Toutes les fonctions correspondant au même groupe sont exprimables rationnellement par l'une d'entre elles ; elles font partie du même *genre*. Le plus grand commun diviseur de leurs discriminants est une puissance déterminée du discriminant de leurs éléments. C'est ici que nous rencontrons pour la première fois la notion fondamentale de *genre;* elle est due à M. Kronecker qui insiste à plusieurs reprises, dans ses communications à l'Académie de Berlin, sur sa grande importance.

Toutes les fonctions ψ d'un genre sont déterminées rationnellement par l'une d'entre elles φ, $\psi = \frac{R(\varphi)}{\Delta_\varphi}$. Il est donc important de montrer que dans tout genre il existe des fonctions à discriminant différent de zéro, quelles que soient les relations existant entre les éléments inégaux $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Étant donnée une suite de composition $G, G_1, \ldots, G_\nu$, on démontre, entre autres théorèmes, le suivant :

Pour que l'on puisse déterminer une fonction ayant $\rho, p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ *valeurs et correspondant à* G_ν, *à l'aide d'une fonction ayant* ρ *valeurs et correspondant à* G, *il faut et il suffit que chaque groupe* $G_{\alpha-1}$ *puisse être formé à l'aide du suivant* G_α *et d'une substitution* τ_α *permutable à* G_α, *et telle que le nombre premier* p_α *soit le plus petit nombre pour lequel* G_α *soit contenu dans le groupe* $G_{\alpha-1}$.

Si maintenant l'on cherche à répondre à la première des questions posées, celle de l'*existence* de fonctions ayant un ρ et un n donnés, on obtient une série de théorèmes sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction entière de n éléments. M. Netto cite Cauchy, MM. Bertrand et Serret, et plus particu-

lièrement les démonstrations de MM. Kronecker et Jordan. Certains groupes particuliers jouent un grand rôle dans la théorie des équations. Ce sont d'abord les groupes Ω dans lesquels l'ordre est égal au degré n. M. Netto considère ces groupes dans le cas où n est un nombre premier, ou un produit de deux nombres premiers. Dans ce dernier cas, il y a trois types de groupes Ω; l'un d'eux est le groupe cyclique. Ce sont ensuite les groupes dont le degré p est un nombre premier et dont les substitutions ne peuvent que permuter tous les éléments, n'en permuter aucun, ou enfin n'en laisser qu'un seul invariable. Ce groupe est d'ordre $\frac{p(p-1)}{\sigma}$, où σ est un des diviseurs de $(p-1)$; pour $\sigma = 1$, on obtient le groupe métacyclique; pour $\sigma = 2$, le groupe demi-métacyclique. Ce sont enfin les groupes de degré $(p+1)$ et d'ordre $(p-1)p(p+1)$ qui comprennent toutes les substitutions linéaires $(\bmod p)$; ce groupe comprend celui des équations modulaires.

Enfin M. Netto démontre, comme application d'un théorème général de M. Kronecker, que, si les substitutions d'un groupe sont échangeables, il existe un système fondamental de substitutions $s_1, s_2, \ldots$, d'ordres $r_1, r_2, \ldots$, tel que toute substitution du groupe puisse être représentée par

$$s_1^{h_1} s_2^{h_2}, \ldots, (h_i = 1, 2, \ldots, r_i),$$

chaque nombre r_k est multiple du suivant ou lui est égal; le produit des r_k est égal à r. Les nombres r_k sont des invariants du groupe.

Dans un dernier Chapitre, M. Netto expose les premiers principes de la représentation analytique des substitutions. Et c'est ici que perce manifestement son intention d'écrire un Traité qui puisse servir d'introduction à la lecture des Mémoires publiés sur ce sujet. Car, en se plaçant au point de vue de M. Kronecker, il semble que cette représentation analytique n'est pas nécessaire et même qu'elle n'est pas indiquée par la nature de la question que l'on a en vue. M. Netto donne le théorème bien connu de M. Hermite, puis considère les substitutions arithmétiques et géométriques. Il termine ce Chapitre en démontrant le théorème de Galois, sur l'ordre du groupe linéaire de degré m^k, en particulier p^k.

III.

Voici maintenant la marche suivie dans la seconde partie de l'Ouvrage :

On montre tout d'abord que la méthode à l'aide de laquelle on peut résoudre par radicaux les équations des premiers degrés fait défaut, lorsque l'on cherche à résoudre les équations générales de degrés supérieurs au quatrième. On identifie ensuite ce dernier problème qui en renferme plusieurs, puisqu'il s'agit de trouver *toutes* les racines de l'équation proposée, avec la résolution de l'équation résolvante de Galois. Cette équation de degré $n!$ n'est plus générale. On rencontre ainsi, dès le début, une équation *particulière*, on connaît une relation entre ses racines ou, ce qui revient au même, entre ses coefficients. On est ainsi amené à considérer en général des équations particulières, et à montrer que ce qui les caractérise, ce qui les distingue des équations générales, est l'*adjonction a'un genre* ou d'un groupe de substitutions *non symétrique*. Il est facile de démontrer l'identité de la transitivité du groupe d'une équation et de l'irréductibilité de cette équation [1]; on voit également que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines d'une équation irréductible soient toutes exprimables rationnellement par l'une d'entre elles est que l'ordre du groupe transitif de cette équation soit égal à son degré.

Après avoir considéré le groupe de l'équation résolvante de Galois et introduit l'idée de résolvante en général, M. Netto indique la méthode suivie par Lagrange pour réduire et, s'il est possible, résoudre les équations par un choix convenable d'une suite de résolvantes.

Il n'y a rien de particulier à remarquer sur les méthodes données par M. Netto pour résoudre les équations binômes. Le Chapitre suivant, qui traite des équations abéliennes, contient, outre

---

[1] On peut regretter que M. Netto n'ait pas démontré aussi que, à la notion de Cauchy de transitivité d'ordre k, correspond l'irréductibilité des équations

$$f(x) = 0, \quad \frac{f(x)}{x - x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})} = 0.$$

les deux cas de résolubilité donnés par Abel et qui sont exposés dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, une recherche sur les équations de degré $n = m.\nu$, dont les racines sont $x_1, \theta x_1, \theta_1 x_1, \ldots$, les fonctions rationnelles θ_k étant liées par les relations

$$\theta_1\theta(x_1) = \theta^{\alpha_1}\theta_1(x_1), \quad \theta_2\theta(x_1) = \theta^{\beta_1}\theta_2(x_1), \quad \ldots,$$
$$\theta_2\theta_1(x_1) = \theta^{\beta_2}\theta_1^{\gamma_2}\theta_2(x_1), \quad \theta_3\theta_1(x_1) = \theta^{\beta_3}\theta_1^{\gamma_3}\theta_3(x_1), \quad \ldots.$$

Ces conditions sont suffisantes pour que l'on puisse effectuer sur l'équation de degré ν dont dépend la résolvante

$$\varphi_1 = x_1 + \theta x_1 + \ldots + \theta^{m-1}x_1,$$

et dont les racines sont $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$, les mêmes réductions que sur l'équation proposée. On montre qu'elles sont également nécessaires sous l'unique condition que de $\varphi_\beta = \text{rat}(\varphi_\alpha)$, on puisse conclure que $x_\beta = \text{rat}_1(x_\alpha)$. On trouve facilement le groupe correspondant à cette classe d'équations.

Mais il faut observer que l'on n'obtient pas ainsi une nouvelle classe d'équations résolubles par radicaux. Il eût été facile à M. Netto d'insister davantage sur ce point important et de montrer que ces équations sont du genre de celles que M. Kronecker nomme *cycloïdales;* ce sont, en effet, des équations abéliennes dont les coefficients dépendent rationnellement d'une racine d'une équation abélienne. En se plaçant à ce point de vue, il conviendrait, sans doute, de changer l'ordre des matières et de considérer les équations abéliennes avant celles de M. Netto; on pourrait ensuite dire quelques mots sur les équations cycloïdales en général.

M. Netto donne deux démonstrations du théorème qui permet de ramener la résolution des équations abéliennes à celle d'équations abéliennes de degré premier. La première est due à M. Kronecker: elle est contenue dans les *Monatsberichte* de 1877; la seconde est celle donnée par M. Jordan, dans son Traité, nos 405-407.

Dans des recherches plus récentes qui viennent d'être publiées dans les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, M. Kronecker *décompose* toute équation abélienne à coefficients entiers en équations abéliennes premières et en équations unités. Les

racines de l'équation donnée sont fonctions rationnelles des racines des équations premières et des équations unités. Il étend ses recherches au cas où les coefficients de l'équation abélienne sont fonctions entières de variables h, à coefficients entiers.

La *décomposition* d'une équation abélienne à coefficients entiers, en équations abéliennes premières, est analogue à celle d'un nombre entier en ses facteurs premiers.

Ces nouvelles recherches de M. Kronecker n'ont naturellement pu trouver place dans l'Ouvrage de M. Netto.

A la suite des équations abéliennes, l'auteur considère une classe d'équations dont toutes les racines sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles. Après avoir défini les équations de Galois, il cherche leur groupe et montre comment elles peuvent être résolues par des équations abéliennes. Exemple : $x^p = A$. (Comparer Jordan, *Traité*, Liv. III, Chap. II.) Enfin, il expose les recherches de M. Nöther (*Math. Ann.*, XV) sur les équations triples.

Les relations données entre les racines des équations particulières considérées jusqu'ici permettaient d'appliquer à leur étude la théorie des substitutions. Mais en est-il toujours ainsi et pourquoi est-on en droit d'appliquer, en général, la théorie des substitutions à l'étude des équations résolubles par radicaux?

Dire que x_0 est racine d'une équation résoluble par radicaux, c'est dire que x_0 peut être donné explicitement en fonction entière de quantités $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$, telles que chaque $V_\alpha^{p_\alpha}$, où p_α est un nombre premier, soit une fonction entière des $V_{\alpha+1}$, $V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu$, dont les coefficients soient fonctions rationnelles des quantités faisant partie du domaine de rationnalité. D'autre part, la théorie des substitutions suppose que toutes les fonctions auxquelles on l'applique soient des fonctions entières des variables. Pour légitimer l'emploi de cette théorie, dans le cas qui nous occupe, il faut donc démontrer que chaque expression V_λ est fonction entière des racines de l'équation considérée. Et ce théorème doit être démontré par un procédé algébrique, car il serait évidemment illusoire de vouloir employer une méthode fondée elle-même sur la théorie des substitutions.

Ce théorème, démontré d'après M. Kronecker, dont les méthodes simplifient celles d'Abel, il est facile d'en conclure l'im-

possibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degrés supérieurs au quatrième. L'étude de la forme des racines d'une équation supposée résoluble par radicaux conduit à une série de théorèmes sur ces équations; on obtient, en particulier, le théorème célèbre de Galois, que nous pouvons énoncer ainsi :

Toute équation irréductible et de degré premier, résoluble par radicaux, peut être ramenée à une suite d'équations abéliennes.

Après avoir introduit l'idée fondamentale de groupe d'une équation, M. Netto avait démontré deux théorèmes importants sur ces groupes; je les ai cités plus haut. Mais, dans la première Partie de l'Ouvrage, nous avons appris à connaître une série de propriétés fondamentales des groupes de substitutions. Si, à la transitivité du groupe d'une équation correspond l'irréductibilité de cette équation, il est naturel de chercher, par exemple, la propriété de l'équation qui correspond à la non-primitivité de son groupe de substitutions. Considérons, à cet effet, l'équation de degré $n = m.\nu$ résultant de l'élimination de y entre les deux équations

$$y^\nu - A_1 y^{\nu-1} + \ldots \pm A_\nu = 0,$$
$$x^m - S_1(y).x^{m-1} + S_2(y).x^{m-2} - \ldots \pm S_m(y) = 0.$$

On démontre que son groupe est non primitif et que toute équation dont le groupe est non primitif peut être considérée comme résultant de l'élimination de y entre les deux équations précédentes.

Outre la transitivité et la non-primitivité, nous avons vu qu'il existait une propriété bien importante des groupes de substitutions; un groupe peut être simple ou composé. Il est moins facile que dans les cas précédents de voir directement l'influence de cette propriété d'un groupe sur l'équation correspondante. Mais les propriétés d'une équation algébrique se reflètent pour ainsi dire dans celles de sa résolvante. Lorsqu'une équation $f(x) = 0$ de degré n est caractérisée par un groupe G d'ordre r, l'équation résolvante de Galois est réductible; chacun de ses $\frac{n!}{r}$ facteurs $F_1(\xi) = 0$ peut être considéré comme résolvante de l'équation; toutes les racines de $F_1(\xi) = 0$ sont fonctions rationnelles de l'une d'entre elles à l'aide de laquelle on peut exprimer toutes les

racines de la proposée. Le passage de $f(x) = 0$ à $F_1(\xi)$ est identique à celui de G à son isomorphe holoédrique Ω. Ce théorème jette une vive lumière sur l'importance de l'idée d'isomorphisme dans la théorie des substitutions.

A chaque genre de fonctions correspond une certaine multivocité de ces fonctions. Il arrive souvent que le genre que l'on adjoint au domaine de rationnalité pour caractériser l'équation proposée est donné comme racine d'une équation irréductible. Il semble alors convenable d'adjoindre au domaine de rationnalité non pas une, mais toutes les racines de l'équation irréductible. Il convient donc de se demander ce que devient le groupe G d'ordre r d'une équation $f(x) = 0$, dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsque l'on adjoint au domaine de rationnalité toutes les racines $\psi_1, \ldots, \psi_m$ d'une équation irréductible $g(\psi) = 0$, dont les coefficients font partie du même domaine de rationnalité que ceux de $f(x)$, et dont nous *supposons* les racines fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On montre que l'équation résolvante ne peut être décomposée en facteurs non linéaires par l'adjonction d'une équation auxiliaire que si le groupe G est composé.

On peut voir maintenant de quelle importance fondamentale est la notion de groupes simples et composés. Si $G, G_1, G_2, \ldots, G_\nu, 1$, est une suite correspondant au groupe composé G, chaque G_α d'ordre r_α étant un groupe d'ordre maximum contenu dans $G_{\alpha-1}$ et permutable à ce groupe, on peut ramener la résolution de l'équation $f(x) = 0$ à groupe G à celle d'une suite d'équations irréductibles de degrés $\frac{r}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \ldots, \frac{r_{\nu-1}}{r_\nu}, r_\nu$, dont les coefficients font partie du domaine de rationnalité de $f(x) = 0$. Les racines de chacune de ces équations sont toutes exprimables rationnellement par l'une d'entre elles; leurs groupes d'ordres $\frac{r}{r_1}, \frac{r_1}{r_2}, \ldots, \frac{r_{\nu-1}}{r_\nu}, r_\nu$ sont *simples*. L'équation résolvante de Galois est successivement réductible en $\frac{r}{r_1}, \frac{r}{r_2}, \ldots, \frac{r}{r_\nu}, r$ facteurs.

On démontre maintenant que la réduction du groupe G d'une équation $f(x) = 0$, produite par l'adjonction d'une équation irréductible quelconque, dont les coefficients font partie du même domaine de rationnalité que ceux de $f(x)$, est équivalente à la réduction produite par l'adjonction de toutes les racines d'une

équation vérifiée par des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'hypothèse faite plus haut n'est donc pas une restriction, en ce sens, du moins, que nous n'obtenons aucune réduction nouvelle en la laissant de côté.

Mais il y a plus. Il n'est point nécessaire que les ψ soient fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour que le groupe G soit réduit par adjonction de $g(\psi) = 0$. Il suffit, pour que la réduction ait lieu, qu'il existe des fonctions rationnelles de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, égales à des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose enfin que les racines des deux équations irréductibles $f(x) = 0$, $g(\psi) = 0$, soient liées rationnellement par des relations de la forme $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = 0$, on démontre que l'on peut déduire ces relations de cette autre plus simple :

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_2(\psi_1, \ldots, \psi_m),$$

où les racines des deux équations sont séparées.

On voit donc que l'adjonction des racines de $g(\psi) = 0$ au domaine de rationnalité de $f(x) = 0$ ne peut donner, dans ce cas, comme dans le précédent, d'autres réductions que celles que l'on obtient par adjonction de fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous avons étudié les propriétés fondamentales des groupes; nous venons de voir comment ces propriétés se reflètent dans les équations correspondantes. Ceci posé, on peut demander quelles sont les équations résolubles par radicaux. La réponse est simple : il faut et il suffit que les facteurs de composition du groupe correspondant à l'équation soient des nombres premiers. A l'aide des théorèmes démontrés sur les suites de composition d'un groupe, on peut énoncer ce théorème de bien des manières différentes; on en déduit des corollaires intéressants.

M. Netto démontre ensuite le théorème qu'Abel énonce dans le t. II de ses *Œuvres complètes*, p. 191; sa démonstration repose sur ce qu'un certain groupe de la suite de composition du groupe G de l'équation donnée est un des groupes de la suite de composition *principale* de G. Elle montre clairement l'importance de la notion de suite de composition *principale*, due à M. Jordan.

J'insiste sur le résultat suivant dû à M. Netto; il montre combien sa méthode peut être avantageuse :

Lorsqu'en passant d'un terme H *de la suite de composition principale de* G *au suivant* K, *l'équation* $f(x) = 0$ *est réductible dans le nouveau domaine de rationnalité et contient les facteurs* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\lambda(x)$, *on a* $f_1(x).f_2(x)\ldots f_\lambda(x) = f(x)$; *si, au contraire, cette réduction s'est effectuée en passant d'un terme* H *de la suite de composition de* G *au suivant* H', *on sait seulement que le produit* $f_1(x)f_2(x)\ldots f_\lambda(x)$ *est égal à une puissance de* $f(x)$.

Les équations du quatrième degré donnent un exemple du dernier cas.

On est ainsi amené à supposer l'équation donnée primitive et de degré p^λ. Si alors l'équation doit être résoluble par radicaux, on montre facilement que son groupe est formé par la combinaison des substitutions arithmétiques de degré p^λ et de substitutions géométriques du même degré.

L'auteur examine particulièrement le cas où $\lambda = 1$; pour $\lambda = 2$, il donne les trois types des équations primitives résolubles par radicaux, et renvoie au Mémoire publié par M. Jordan, dans le *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XIII.

Enfin, dans le cas général, il démontre plusieurs théorèmes dont les derniers jettent une vive lumière sur les recherches de M. Nöther relatives aux équations triples que j'ai citées plus haut. On voit que l'on peut, en appliquant la même méthode, construire des équations quadruples de degré p^2, ...

Je citerai ce résultat élégant qui généralise celui de Galois sur les équations de degré p résolubles par radicaux : « Toutes les racines d'une équation primitive de degré p^λ, résoluble par radicaux, sont exprimables rationnellement par $(\lambda + 1)$ d'entre elles, pourvu que ces dernières ne forment pas un système conjugué. »

M. Netto, fidèle jusqu'au bout à son programme, se limite rigoureusement à la résolution des équations par radicaux. On ferme le Livre en ayant beaucoup appris et en désirant apprendre davantage. J. Molk.

MANNHEIM (A.). — **Premiers éléments de Géométrie descriptive.** — Paris, 1883. In-8°, 40 p.

M. Mannheim, avec une indiscutable compétence, propose de réformer l'enseignement de la Géométrie descriptive, de façon à rapprocher cet enseignement des habitudes pratiques.

Dans la plupart des Traités didactiques sur la matière, on attribue, à ce qu'il nous semble, trop de *réalité* aux plans de projection; n'est-ce pas un abus, en effet, que de forcer le dessinateur à figurer, comme invisibles, les lignes qui seraient cachées par ces plans? D'un autre côté, on est bien obligé de reconnaître que la considération des points situés soit au-dessous du plan horizontal, soit en arrière du plan vertical, rend les épures difficiles à lire.

Partant de ce que les projections d'une figure quelconque ne changent pas quand on éloigne les plans de projection parallèlement à eux-mêmes, M. Mannheim propose de laisser la position de ces plans indéterminés, *de ne pas tracer la ligne de terre* et de supposer la figure dont on veut obtenir les projections tout entière en avant du plan vertical et au-dessus du plan horizontal: il donne ensuite quelques exemples bien choisis qui montrent nettement que, en procédant ainsi, on n'a à faire que des constructions tout aussi simples que celles où l'on utilise la ligne de terre, et qu'on lit plus facilement les résultats de ces constructions.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LES UNITÉS ÉLECTRIQUES (1);

Par M. J. BERTRAND.

L'unité est une grandeur arbitraire à laquelle on compare, pour les mesurer, toutes les grandeurs de même espèce qu'elle; telle est

(1) *A Treatise on Electricity and Magnetism*, by James Clerk Maxwell. Oxford, at the Clarendon Press, 1873. — *Reports of the Committee on Electri-*

la définition très correcte proposée dès le début des études mathématiques, souvent même dès la première leçon d'Arithmétique; elle est irréprochable et ne souffre aucune exception. Les choix sont libres, non indifférents; il existe des raisons souvent évidentes, quelquefois plus cachées, pour établir une dépendance entre les unités. Un mauvais choix peut compliquer les formules, faire disparaître, avec l'homogénéité, la mise en évidence des lois qui s'en déduisent; mais il n'entraîne aucune erreur.

La Géométrie, par des exemples très élémentaires et très simples, peut rendre ces remarques plus précises et plus claires. Les longueurs, les surfaces et les volumes sont le sujet des études, des mesures et des calculs géométriques. Trois unités sont donc arbitraires, aucune dépendance entre elles n'est nécessaire. Le mètre étant choisi pour unité de longueur, rien n'empêcherait d'y associer, comme unité de surface, la superficie du lac de Genève, et, pour unité de volume, celui du plus gros diamant connu. Les géomètres, les écoliers mêmes, trouveraient facile de mettre les énoncés classiques en harmonie avec ces conventions nouvelles. On devrait dire, par exemple : la surface d'un triangle a pour mesure le produit de sa base par une fraction de sa hauteur dont la valeur numérique se calculerait aisément. La surface d'un cercle s'exprimerait par le carré du rayon multiplié par un nombre qui ne serait plus égal à π, et, pour mesurer le volume d'une sphère, on devrait multiplier le cube du rayon par un facteur différent de $\frac{4}{3}\pi$. Le savant auteur d'un Rapport fait à l'Association Britannique sur cette théorie des unités, si bien étudiée par elle, paraît voir dans l'introduction de ces facteurs, qu'on a depuis nommés *parasites*, un grave inconvénient qu'il faut avant tout éviter. Chacun, dit-il, comprendra qu'il serait absurde d'en-

---

cal Standard's appointed by the British Association for the advancement of Science, reprinted by permission of the Council. London, E. et F.-N. Spon, 1873. — *Leçons sur l'électricité et le magnétisme,* par E. Mascart et J. Joubert, t. I, Paris, G. Masson, 1882. — *Ueber die verschiedenen Maassysteme zur Messung electrischer und magnetischer Grössen,* von R. Clausius. Separat-Abdruck aus den *Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens,* Band XXXIX, 1882. — *Sur les unités électriques,* par M. Maurice Levy, conférence faite à la Société d'encouragement. Paris, Gauthier-Villars, 1882. — *Des grandeurs électriques et de leur mesure en unités absolues,* par E.-E. Blavier. Paris, Dunod, 1881.

seigner la Géométrie en choisissant l'unité de capacité de telle sorte que le volume du cube fût mesuré par 6 fois $\frac{1}{4}$ le cube de son côté, et l'unité de surface telle qu'un rectangle fût égal à 0,000023 fois le produit de ses côtés. Ces coefficients, choisis au hasard par l'auteur, n'ont rien cependant qui soit plus incommode que le facteur π, par exemple, introduit dans la mesure classique du cercle. Qui a songé cependant à bannir le nombre π de la Géométrie? Les géomètres ne le désirent nullement, fort heureusement, car leurs efforts seraient inutiles.

Lorsque les unités sont choisies, les formules sont déterminées, elles changent avec les unités : il y faut introduire des coefficients nouveaux. Le système adopté depuis Euclide, de son temps sans doute déjà fort ancien, permet cependant de changer de longueur sans qu'aucun des énoncés s'en ressente. C'est ainsi que la substitution du mètre à la toise a laissé subsister, sans changement aucun, les théorèmes et les formules de la Géométrie; il n'en eût pas été de même si, les longueurs étant mesurées en mètres, on avait voulu, pour unité de surface, conserver la perche ou l'arpent.

Ces vérités sont évidentes; si nous y insistons, c'est comme introduction seulement à l'étude de cas plus compliqués. Ajoutons qu'une formule de Géométrie, quelle qu'elle soit, l'unité de longueur y restant arbitraire, convient, par cela même, à un nombre infini de figures différentes. Si, par exemple, les côtés d'un triangle étant 3, 4, 5, on en déduit, par l'application d'une formule, que la surface est 6, cela prouve à la fois qu'un triangle dont les côtés sont 4^{m}, 5^{m} et 3^{m}, a pour surface 6^{mq}, et que celui dont les côtés sont 4^{km}, 5^{km} et 3^{km}, a pour surface 6^{kmq}. On peut même affirmer, par cela même qu'il existe une formule indépendante de l'unité de longueur, que les triangles dont les côtés sont proportionnels ont leur surface dans le rapport du carré des côtés homologues.

En Mécanique, les grandeurs en présence sont plus nombreuses; pour mesurer les longueurs, les temps, les forces, les masses, les vitesses et les accélérations, on serait en droit d'adopter six unités distinctes et indépendantes; les formules changeraient alors avec le choix que l'on voudrait faire. On pourrait obtenir, quelles que fussent les conventions, la durée de l'oscillation du pendule; mais, si l'on veut à la seconde, par exemple, prise d'abord pour

unité de temps, substituer la minute, il faudra changer la formule et introduire un coefficient nouveau qui, naturellement, serait $\frac{1}{60}$. Dans la formule classique, ce changement s'accomplit de lui-même et résulte de la convention d'après laquelle, avec l'unité de temps, il faut changer l'unité de masse et par suite le nombre qui représente la gravité.

Les mécaniciens, dans leurs formules, laissent trois unités arbitraires dont les autres dépendent. Le nombre de ces unités fondamentales est lié aux principes mêmes de la science : on ne doit ni le diminuer ni l'accroître. M. Blavier, dans un savant Ouvrage cité en tête de cet article, a écrit : Le nombre des unités absolues doit être aussi restreint que possible. Si l'assertion était admise, elle conduirait à n'en adopter qu'une seule. Qui empêcherait en effet, après avoir adopté le mètre pour unité de longueur, de prendre, pour unité de temps, le temps employé par un point de l'équateur terrestre à parcourir, dans sa rotation diurne, un arc égal à l'unité de longueur, et pour unité de force le poids à l'équateur de l'unité de volume d'eau distillée? On définirait ensuite l'unité de masse et l'unité d'accélération, comme on le fait dans les livres classiques. Le mètre, dans ce système, serait la seule unité indépendante. Le savant auteur indique lui-même la possibilité d'une convention qui réduirait à deux le nombre des unités fondamentales ou indépendantes : « On aurait pu », dit-il, « réduire à deux le nombre des unités fondamentales en faisant intervenir la loi de la gravitation universelle. Les unités de longueur et de masse étant fixées, on aurait pris pour unité de force celle avec laquelle s'attirent deux masses égales à l'unité situées à l'unité de distance; puis, de l'unité de force, on aurait déduit l'unité de temps; mais, en fait, on a adopté trois unités fondamentales. » On a eu pour cela d'excellentes raisons, et la règle doit être, contrairement à l'assertion que nous venons de rapporter, d'en adopter le plus grand nombre qui soit compatible avec la condition de pouvoir exprimer tous les théorèmes de la Science par des formules indépendantes du choix de ces unitée. Si l'on accroît plus qu'il ne convient le nombre des unités fondamentales, il faudra changer les formules avec les unités adoptées; si on le diminue plus qu'il n'est nécessaire, les formules, il est vrai, pourront subsister, quelles que soient les unités, mais la restriction

inutilement imposée au choix qu'on peut faire de celle-ci restreindra sans nécessité la généralité des résultats exprimés par chaque formule. Si, par exemple, pour réduire le nombre des unités fondamentales à deux, l'unité de longueur et l'unité de masse, on adoptait l'unité de force indiquée plus haut, on ne pourrait plus faire varier l'unité de longueur sans changer avec elle l'unité de temps : le cube de l'une serait dans un rapport constant avec le carré de l'autre, et les formules de la Science pourraient se partager en deux groupes, les unes dans lesquelles la convention nouvelle ne jouerait aucun rôle et qui resteraient vraies, quelles que fussent les unités de longueur et de temps, les autres qu'il faudrait changer avec le rapport du cube de l'une de ces unités au carré de l'autre.

La possibilité de disposer des unités dans l'application de toutes les formules et de représenter par les mêmes nombres les mesures relatives à des problèmes différents, fait apparaître avec une simplicité merveilleuse plus d'une loi importante de la Science. Si l'on a, par exemple, déduit des équations de la Mécanique la durée de l'oscillation d'une corde de longueur égale à l'unité, tendue par un poids égal à l'unité et dont la masse entière soit égale aussi à l'unité de masse, ce problème résolu fournit immédiatement, non comme déduction, mais comme traduction pure et simple du résultat obtenu, la formule générale qui comprend tous les cas, et il ne peut en être autrement, puisque la longueur unité, la force unité et la masse unité sont indépendantes et toutes trois arbitraires. Les conventions connues, en y rattachant l'unité de temps, fixent le sens du résultat. On pourrait contester l'intérêt de cette remarque ; un cas particulier, en effet, dans un problème de ce genre, n'est pas moins difficile que le cas général, et l'on ne gagne rien à y réduire le problème. Mais, pour ce cas particulier auquel tout se réduit, rien n'empêche d'interroger l'expérience, et, par une seule observation, de prévoir alors toutes les autres.

L'étude des unités, en Mécanique comme en Géométrie, peut être faite, on le voit, à deux points de vue distincts : la dépendance à établir entre les diverses unités et celles qui, restant arbitraires, sont nommées *fondamentales*, et le choix de ces unités arbitraires rattachées autant que possible à des grandeurs im-

muables aisées à retrouver à toute époque. Les savants français, dans le système métrique, ont donné le type le plus parfait des unités absolues pour la longueur et le poids. La seconde, liée à la durée du jour, remplit également toutes les conditions désirables; mais ces unités, adoptées quand la science du mouvement avait acquis déjà une grande perfection, n'ont conduit à changer aucune des formules ni l'énoncé d'aucune loi.

Pour la théorie de l'électricité, les conventions relatives aux unités ont été proposées dans un ordre inverse; on a choisi d'abord les unités nommées *absolues* qui, comme le mètre, le gramme et la seconde, inscrites en permanence dans la nature, peuvent être retrouvées et vérifiées à toute époque. Gauss et Weber, en les proposant, se préoccupèrent peu des changements qui pourraient résulter d'un choix nouveau des unités fondamentales. Un éminent géomètre anglais, Maxwell, a le premier, je crois, étudié cette dépendance, et, dans un Ouvrage mémorable, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, il a donné le tableau de toutes les variations résultant du changement des unités.

Cette théorie présente une singulière anomalie : deux systèmes sont offerts aux physiciens. Tous les auteurs les font connaître sans exprimer aucun étonnement. Ils sont inconciliables, mais on laisse le choix libre. La résistance, dans l'un d'eux, est assimilée à une vitesse; dans l'autre, à l'inverse d'une vitesse.

La résistance d'un circuit est une vitesse! Cette proposition, énoncée dans les ouvrages classiques par des auteurs dignes de toute confiance, a dû se poser comme une énigme à l'esprit de plus d'un lecteur; mais l'étonnement cesse quand, en examinant la proposition de plus près, on en explique le sens véritable : toute grandeur étant mesurée par un nombre, et tout nombre représentant une vitesse, l'assimilation d'une résistance à une vitesse, si elle signifiait simplement qu'à chaque résistance correspond une vitesse numériquement égale, n'aurait véritablement aucun sens. Mais il y a plus : si l'on change l'unité de longueur et l'unité de temps, les conventions faites sur l'unité de résistance prescrivent de la remplacer par une unité nouvelle; le nombre qui sert de mesure à la résistance d'un certain circuit sera changé; celui qui mesure la vitesse changera aussi, et, malgré ces chan-

gements, leur égalité subsiste. Mais cette égalité est purement numérique, elle a lieu entre les nombres qui représentènt deux grandeurs absolument différentes, comme celle que l'on pourrait signaler entre 10^{kg} et 10^{km}, et qui persisterait, si l'on prenait pour unités successivement le gramme et le mètre, le milligramme et le millimètre, le centigramme et le centimètre. Aurait-on cependant le droit de dire, si une convention prescrivait, pour un motif quelconque, de prendre pour unité de longueur une fraction arbitraire du mètre, et pour unité de poids la même fraction du gramme, que les longueurs, par là, deviennent des poids? Ils le seraient ni plus ni moins que, dans le système qui nous occupe, les résistances des vitesses.

Pour faire comprendre plus clairement encore ce qu'un tel rapprochement a d'arbitraire, j'ai cherché, par une convention rationnelle, à faire naître, dans une théorie toute différente, un résultat de forme analogue.

La pression dans un gaz est, d'après la définition adoptée par les physiciens, la force normale exercée sur l'unité de surface de la paroi du récipient qui l'enferme.

On peut choisir un système d'unités qui donne le droit de dire, dans le sens, bien entendu, expliqué plus haut : *La pression, dans un gaz, est le carré d'une vitesse.*

Supposons, en effet, que, voulant embrasser dans les mêmes conventions, les théories chimiques et mécaniques à la fois, on se soit préoccupé tout d'abord de la loi de Gay-Lussac : les équivalents chimiques des gaz représentent, à la même température et à la même pression, des volumes égaux ; si on les représente par des poids, ils sont proportionnels aux densités que l'on a droit de prendre pour leur mesure, et, si l'on choisit enfin pour équivalent unité celui de l'hydrogène, tous les autres deviendront des nombres absolus indépendants du choix des unités fondamentales. L'unité des masses, pour que les densités soient invariables, doit être proportionnelle à l'unité de volume. Les formules de la Mécanique ne seront, par là, nullement altérées, et l'on pourra toujours, F, L, M, T représentant une force, une longueur, une masse et un temps, écrire

$$F = \frac{ML}{T^2};$$

par conséquent,

$$\frac{F}{L^2} = \frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T^2}.$$

Le premier membre peut représenter une force rapportée à l'unité de surface, par conséquent la pression dans un gaz; le facteur $\frac{M}{L^3}$, par convention, est invariable quand les unités changent, et $\frac{L^2}{T^2}$ représente le carré d'une vitesse, ce qui conduit au théorème énoncé.

Dans ce rapprochement relatif à un ordre de phénomènes mieux connus et d'un mécanisme moins mystérieux que les transports électriques, personne, je crois, ne verra autre chose qu'une convention entièrement arbitraire comme le choix des unités qui la fait naître.

Lorsque, dans le choix d'un système d'unités, on se propose un but défini à l'avance, on doit exiger qu'il soit atteint. Si l'on veut, au contraire, se borner à définir les unités avec exactitude et précision, tous les systèmes sont légitimes. Aucun des auteurs de grande renommée et de grand mérite qui ont traité jusqu'ici la question ne paraît avoir énoncé formellement un principe général et un but à atteindre. Les conventions proposées peuvent dès lors être plus ou moins commodes; dans aucun cas il n'y a lieu de les déclarer fausses. Lorsque, passant en revue, comme on l'a fait, quelques-unes des lois mathématiques démontrées ou admises dans la Science, le choix que l'on fait a pour but de simplifier les équations qui les expriment, le système peut changer avec les lois qu'on a choisies, sans cesser jamais d'être légitime.

L'action de deux masses électriques étant proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance, on choisit, par exemple, l'unité de masse électrique de telle sorte que, dans la formule qui exprime cette loi, le coefficient numérique soit réduit à l'unité; chaque unité, à son tour, se trouve définie en vue d'une équation acquise antérieurement à la Science et dans laquelle elle réduit à l'unité un coefficient que la loi physique laisserait arbitraire. Une telle manière de procéder rend la contradiction impossible; mais si, prenant l'analogie pour guide, nous regardons comme désirables dans le système des

unités électriques les conditions qui sont remplies pour les unités géométriques, mécaniques ou calorifiques, nous constaterons sans peine que, dans la théorie électrique, elles ne le sont pas.

Les divers systèmes adoptés, en dehors des théories électriques, sont tels, que les formules exprimant les lois de la Science puissent rester invariables lorsqu'on change d'une manière arbitraire les unités fondamentales, laissées aussi nombreuses que possible.

Cette condition, par exemple, est remplie pour la Mécanique; dans toutes les formules de la Science, l'unité de temps, l'unité de longueur et l'unité de masse sont arbitraires; elles peuvent varier, on en déduit les autres lois suivant une loi connue, et les formules ne sont pas changées.

Les deux tableaux proposés par Maxwell et considérés depuis, par tous les auteurs, comme également acceptables, ne satisfont pas à cette condition. Il importe d'insister sur ce point.

Si, dans un système de conducteurs isolés ou parcourus par des courants, on se donne les forces électromotrices mises en jeu, les résistances électriques des diverses parties de l'appareil, les courants d'induction qui prennent naissance, les forces d'attraction ou de répulsion mutuelles mises en jeu, toutes les circonstances enfin du phénomène, on pourra mesurer toutes les grandeurs par des nombres qui serviront de définition au système. Si l'on change les unités fondamentales, les nombres restant les mêmes, les grandeurs de tout genre qu'ils représentent, longueurs, temps, masses, forces, vitesses, intensités de courants, charges électriques, résistances, etc., changeront à la fois. Le système nouveau qu'elles définissent sera-t-il possible? Nous pouvons aisément démontrer le contraire, soit qu'on adopte le système électrostatique ou que l'on préfère celui qu'on a nommé *électrodynamique*.

L'application des deux tableaux proposés par Maxwell à un problème quelconque dans lequel figurent à la fois des actions électrostatiques et électrodynamiques montre en effet que, dans chacun des deux systèmes proposés, à un changement d'unité correspondent, pour la mesure de ces forces de nature diverse, des multiplicateurs différents. Sans reproduire ici le tableau tout

entier, bornons-nous à rappeler que, dans le système électrostatique, on lit :

Masse électrique........... $F^{\frac{1}{2}} L$,

Intensité d'un courant...... $F^{\frac{1}{2}} \frac{L}{T}$.

Si donc l'unité de force, l'unité de longueur et l'unité de temps sont les unités fondamentales, il suffirait de changer l'unité de temps, en laissant les deux autres invariables, pour changer la mesure des intensités de courant, et, par conséquent, l'évaluation numérique des forces provenant des actions électrodynamiques, sans altérer celle des forces dont l'origine est électrostatique. Le système nouveau, au point de vue mécanique, ne serait donc pas semblable à l'ancien, puisque, parmi les forces mises en jeu, quelques-unes restant invariables, les autres seraient multipliées par un facteur arbitraire.

Dans le système électrodynamique, on lit :

Masse électrique........... $F^{\frac{1}{2}} T$

Intensité d'un courant...... $F^{\frac{1}{2}}$

et, si l'on change l'unité de temps, les mesures des forces électrostatiques seront multipliées par un facteur arbitraire, celles des forces électrodynamiques restant invariables. Ces nombres nouveaux, si l'on revient aux unités anciennes, représenteront un système dont la similitude avec le système primitif est impossible. Quelle est la cause de cette déception? On pourrait se borner à répondre que, en définissant le système des unités, on ne s'est nullement proposé la condition que nous cherchons à vérifier; il n'y a donc pas à s'étonner qu'elle ne soit pas remplie; non seulement on n'a jamais prétendu rendre toutes les formules générales, mais les auteurs soigneux, en exposant cette théorie, ont expressément signalé les coefficients qui doivent varier dans certaines formules avec le choix des unités. Il ne saurait, par suite, être question ici d'erreur commise, mais de choix plus ou moins habile, et nous conservons le droit de chercher si l'on pourrait, par d'autres conventions, rendre *toutes* les formules indépendantes des unités fondamentales et mettre en évidence les lois de la similitude électrique. La réponse négative semble résulter de l'étude même tant

de fois déjà reproduite; si les systèmes proposés exigent tous deux que, dans certaines formules, un coefficient change avec le choix des unités, c'est qu'il a été impossible de tout concilier. M. Maurice Lévy, dans le savant travail qu'il a consacré à cette question, signale en effet une relation nécessaire entre trois coefficients qui figurent dans le premier membre d'une équation dont le second est une vitesse. Tous trois ne peuvent donc pas rester invariables, et, si l'on change les unités, de manière à altérer l'expression numérique des vitesses, l'un des coefficients au moins doit changer.

En examinant cependant les formules mises tout d'abord en présence, on reconnaît que l'une d'elles, acceptée à la fois dans les deux systèmes comme restant invariable, quelles que soient les unités, pourrait être supprimée sans inconvénient :

L'intensité d'un courant est mesurée par la quantité d'électricité qui, dans l'unité de temps, traverse une section du fil.

Ce principe, qu'il ne semble pas possible de vérifier expérimentalement, est proposé comme un axiome, et c'est pour maintenir invariable, sans y introduire aucun coefficient numérique, l'exactitude de l'équation qui l'exprime, qu'on s'est interdit de rendre toutes les autres à la fois générales. En supposant même que l'on puisse justifier cette conception du courant et l'assimilation à un flux d'électricité, ou même à un double flux de deux masses égales et de signes différents, la proportionnalité, seule, non l'égalité des deux membres de l'équation, pourrait en résulter, et l'on aurait le droit d'introduire comme multiplicateur de l'un d'eux un facteur variable avec le choix des unités. M. Maurice Lévy en fait judicieusement la remarque, mais il ajoute : « On considérerait comme très incommode d'avoir à faire usage d'un coefficient pour passer de l'unité d'électricité à l'unité de courant; aussi le système qui l'exigerait n'est pas utilisé. »

Ce système, cependant, est le seul qui puisse mettre en évidence la loi complète des similitudes électriques. On doit remarquer, en outre, que l'équation dont il s'agit ne figure en fait, et ne semble pouvoir figurer à aucun titre, dans la solution d'aucun problème. La quantité d'électricité qui, dans l'unité de temps, traverse la section d'un fil conducteur ne peut se présenter en effet, à côté de l'intensité, ni comme donnée ni comme inconnue;

on ne la mesure directement dans aucun appareil, on ne cherche dans aucun cas à la déterminer par le calcul. Loin de pouvoir être considérée comme incommode, l'introduction d'un coefficient variable dans l'équation qui lie l'intensité à la masse électrique en mouvement resterait donc absolument inaperçue, et l'on pourrait, par conséquent, réduire à l'unité en même temps les deux coefficients dont un seul disparaît dans chacun des systèmes devenus classiques.

Le système ainsi obtenu, qui semble présenter plus d'avantages qu'aucun autre, ne différerait d'ailleurs de celui qu'on a nommé *électrodynamique* que par le changement de l'unité d'électricité statique et des grandeurs qui en dépendent immédiatement.

Je ne puis terminer cet article sans parler d'une remarque, très singulière assurément, dont peut-être, cependant, on a exagéré l'importance.

Si, après avoir choisi les trois unités fondamentales, de longueur, de temps et de force, on rapporte les grandeurs électriques successivement aux unités correspondantes dans les deux systèmes nommés *électrostatiques* et *électrodynamiques*, on obtiendra pour chacune d'elles des mesures différentes. Le rapport de ces deux mesures peut, pour toutes les grandeurs, être assimilé à une vitesse ou à une puissance d'une vitesse dont l'exposant est 1, 2 ou — 1; cette vitesse, la même pour tous les rapports, change d'expression numérique avec le choix des unités, mais représente toujours une même rapidité, que l'on peut calculer, et qui, chose singulière, diffère fort peu de la vitesse de la lumière.

Aucune explication plausible n'a été donnée de ce rapprochement réellement singulier, dans lequel on a vu la preuve d'une dépendance nécessaire, quoique cachée, entre les deux théories. Y a-t-il vraisemblance, en suivant, sans aucune préoccupation des théories optiques, des conventions logiquement enchaînées relatives à l'électricité seulement, de rencontrer fortuitement la vitesse de la lumière ou, tout au moins, une vitesse peu différente? Une rencontre aussi imprévue a très justement attiré l'attention. Il faut remarquer cependant que, sur la route qui y conduit, se placent des conventions qu'on aurait pu ne pas faire. Le résultat, d'ailleurs, dans les systèmes adoptés, ne répond, en dehors de la coïncidence des chiffres, à aucune conception physique.

Il en serait autrement si, adoptant le système d'unité qui permet de représenter toutes les formules sans introduire de coefficients variables, on renonçait à définir l'intensité du courant comme égale à la quantité d'électricité qui traverse, dans l'unité de temps, une des sections du fil. Les conventions seraient les suivantes : l'attraction de deux masses électriques étant démontrée *proportionnelle* à leur produit et en raison inverse du carré de la distance, on décide qu'elle est égale au produit des masses divisé par le carré de la distance, et par là se trouve définie l'unité de la masse électrique.

L'action de deux éléments de courant étant supposée représentée par la formule même d'Ampère, sans adjonction d'aucun coefficient constant ou variable, l'unité d'intensité se trouve définie.

Ces conventions étant admises, si l'on regarde l'intensité d'un courant comme *proportionnelle* à la quantité d'électricité qui, dans l'unité de temps, traverse la section du fil, il n'est plus possible de transformer cette proportionnalité en égalité, et le flux électrique, dans cette hypothèse, se trouvera représenté par le produit de l'intensité par la vitesse de la lumière. Lors donc qu'on assimile le circuit voltaïque à un courant continu d'électricité, si l'on veut supposer la vitesse de celle-ci égale à la vitesse de la lumière, chaque unité de longueur du fil contiendra, à chaque instant, une masse électrique numériquement égale à l'intensité du courant.

La même conclusion s'appliquerait à l'hypothèse plus satisfaisante, quoique sujette encore à de grandes difficultés, dans laquelle on suppose deux courants d'électricité positive et négative cheminant en sens opposé avec des vitesses égales.

Dans la comparaison des deux systèmes qu'on a nommés *électrostatique* et *électrodynamique*, le rapport des nombres qui représentent une même grandeur électrique se trouve, pour toutes successivement, intimement lié à une vitesse qui diffère peu de celle de la lumière. Cette circonstance soigneusement remarquée n'ajoute rien à l'importance, quelque grande qu'on veuille la faire, du premier rapprochement. Les divers éléments électriques se rattachent, en effet, les uns aux autres par des relations simples qui peuvent servir de définition. Le produit de la résistance par le carré de l'intensité, par exemple, doit représenter un

travail, et, comme conséquence, la variation du nombre qui représente l'intensité dépend nécessairement de celui qui représente la résistance. La force électromotrice divisée par la résistance donne l'intensité ; cette relation peut lui servir de définition, et, quand on change d'unités, les variations de deux des trois grandeurs ainsi enchaînées déterminent celles de la troisième. C'est pour cela que la vitesse de la lumière, introduite, fortuitement ou non, dans le rapport de deux mesures, ne pouvait manquer de se retrouver dans toutes les autres.

Nous indiquions, quelques pages plus haut, par quelles considérations un physicien aurait pu être conduit à adopter pour unité de masse la masse de l'unité de volume d'hydrogène, en laissant d'ailleurs indéterminées les unités de longueur et de temps. La pression d'un gaz dans ce système, c'est-à-dire la force exercée sur l'unité de surface, peut être assimilée numériquement, quelles que soient les unités fondamentales restées arbitraires, au carré d'une vitesse. Un calcul facile fait connaître cette vitesse, égale, pour l'air atmosphérique, à 1^{km} environ par seconde (1070^{m}), peu différente, on peut le constater, de la moitié de la vitesse imprimée à un point de l'équateur solaire par la rotation de l'astre sur lui-même.

Loin de moi la pensée d'assimiler les deux cas; personne assurément n'oserait, sur un tel indice, chercher une dépendance entre la théorie des gaz et le phénomène de la rotation solaire; et, si la vitesse de la lumière, inopinément introduite dans l'étude des unités électriques, a mérité la plus soigneuse attention, c'est que, indépendamment de ce rapprochement inexpliqué, les physiciens et les géomètres, depuis longtemps déjà, attendent des progrès de la Science la fusion complète des deux théories.

DU TRANSPORT DE LA FORCE PAR L'ÉLECTRICITÉ (¹);

PAR M. J. BERTRAND.

Léon Foucault, pour démontrer dans une usine la perfection d'un régulateur de vitesse, confia un jour à la machine à vapeur le

(¹) *La Lumière électrique, journal universel d'électricité,* directeur scienti-

soin de donner l'heure aux ateliers. Sans pendule, sans échappement, l'horloge fut conduite par la même bielle que les laminoirs; l'aiguille, dont l'aspect n'avait rien d'insolite, aurait pu, sans retarder pour cela d'une minute, transmettre et régler tout le travail; solidaire de la roue principale, elle en partageait la puissance.

Les dimensions, la masse et la vitesse des organes d'une machine ne peuvent rien apprendre sur l'énergie qu'ils recèlent. Quiconque a visité de grandes usines en a pu faire la curieuse remarque et voir, par exemple, une paire de cisailles ouvrir et fermer ses puissantes mâchoires, prête à couper indifféremment une barre de fer ou une baguette d'osier, sans ralentir en rien son mouvement.

Les forces électriques présentent des contrastes analogues, l'intensité d'un courant n'en détermine nullement la puissance ; un faible courant peut gouverner un marteau de 100^{kg}, lorsque, à côté de lui, un autre dix fois plus intense restera impuissant à conduire une machine à coudre. L'intensité règle l'effort actuellement disponible, mais elle s'affaiblit par le travail accompli, et la diminution est fort inégale pour des courants d'apparence identique. Un courant, sous ce rapport, ressemble à une roue dont la vitesse ne peut révéler si elle est capable d'un travail de 10 chevaux ou prête à s'arrêter sous la pression d'une main posée sur elle. On peut comparer la pile à un réservoir dont l'eau s'écoule ; la vitesse dépend de la hauteur du liquide, mais le ralentissement est réglé par son volume.

Pour définir un courant, plusieurs éléments sont nécessaires; jamais un physicien n'oubliera d'en tenir compte, l'erreur serait trop évidente et trop forte. Mais plus d'une fois, pour abréger, on a négligé de les mentionner explicitement, et l'on peut, dans des livres également dignes de confiance, rencontrer sans développements des propositions telles que celles-ci :

---

fique M. du Moncel. — *The Electrician, a weekly Journal of theorical and applied Electricity and Chemical Physics,* published by James Gray. London. — *Elektrotechnische Zeitschrift,* redigirt von Dr K. Ed. Zedzche, Berlin. — *Le transport électrique de l'énergie,* conférence faite à la Société d'encouragement par M. Maurice Lévy, ingénieur des Ponts et Chaussées. — *Die magnetoelektrischen und dynamoelektrischen Maschinen,* dargestellt von Gustav Glaser de Cerv. Wien, Pest, Leipzig, 1883. — *Electric transmission of power, its present position and advantages.* Paget Higgs, London, 1879. — *Réunion internationale des électriciens.* Comptes rendus sténographiés, Paris, 1882.

L'énergie d'un courant est proportionnelle au carré de son intensité !

L'énergie d'un courant est proportionnelle à son intensité!

L'énergie d'un courant est indépendante de son intensité!

Chacune de ces propositions, en apparence contradictoires, devient exacte quand on complète l'énoncé :

L'énergie d'un courant, *quand la résistance est invariable,* est proportionnelle au carré de son intensité.

L'énergie d'un courant, *quand la force électromotrice est donnée,* est proportionnelle à son intensité.

L'énergie d'un courant, enfin, est indépendante de l'intensité, *en ce sens* qu'avec une intensité donnée, quelle qu'elle soit, on peut, en disposant de la résistance du circuit, le rendre capable de tel travail qu'on voudra.

C'est ainsi qu'un géomètre peu soucieux de la précision du langage pourrait dire :

La surface d'un triangle est proportionnelle au produit de ses trois côtés ; sous-entendant que le rayon du cercle circonscrit est donné.

La surface d'un triangle est proportionnelle à son périmètre ; sous-entendant que le rayon du cercle inscrit est donné.

La surface d'un triangle est indépendante de son périmètre; voulant dire qu'avec un périmètre donné un triangle peut avoir, entre des limites fort écartées, telle surface que l'on voudra.

L'intensité d'un courant n'est pas changée quand on augmente dans la même proportion la force électromotrice et la résistance du circuit, c'est la loi d'Ohm; mais la dépense d'énergie et le travail disponible deviennent bien différents. Supposons deux courants de même intensité traversant un même laboratoire : le premier est produit par une force électromotrice égale à l'unité, en présence d'une résistance également mesurée par un ; la force électromotrice qui donne naissance au second est mesurée par 100, ainsi que la résistance du circuit. Le galvanomètre, s'il est parfait, leur assignera la même mesure; le voltamètre n'accusera entre eux aucune différence appréciable; l'inégalité des énergies est très grande cependant, et toutes les épreuves la mettront en évidence.

Un même accroissement apporté aux résistances des deux cir-

cuits pourra décupler l'une et faire varier l'autre seulement de la dixième partie de sa valeur; le premier courant deviendra donc dix fois plus faible, lorsque l'altération du second sera presque insensible; un fil de platine introduit dans l'un sera chauffé à blanc, fondu peut-être, lorsque, dans l'autre, il s'échaufferait de quelques degrés seulement.

Si, sans changer les résistances, on demande aux courants un travail mécanique, la réaction, en vertu d'une loi qui ne souffre pas d'exception, sera égale à l'action, et les organes mis en mouvement par les rhéophores feront naître une force électromotrice inverse, qui affaiblira les courants et qui, pour un même travail, sera la même dans les deux; la force électromotrice primitive détermine donc pour chacun d'eux le travail dont il est capable, et l'on pourra demander au second, presque sans l'affaiblir, une dépense de force plus que suffisante pour épuiser complètement le premier.

Un mauvais conducteur introduit dans un circuit peut, en s'échauffant, devenir une source de lumière : le courant s'affaiblit alors par l'accroissement de la résistance. Lorsque, séparant les deux électrodes, on fait jaillir entre eux un arc étincelant, une diminution de la force électromotrice accompagne l'accroissement de la résistance; dans un cas comme dans l'autre, l'effet produit dépend de la force électromotrice et de la résistance et n'a aucune relation nécessaire avec leur rapport, qui mesure l'intensité.

Le calcul de l'intensité appliqué à l'éclairage donne un résultat singulier dont l'explication est facile. Au moment où s'allument les lumières produites par des courants divisés partant du courant principal et allant le rejoindre, l'intensité, sous l'influence de ce travail dépensé, reçoit un accroissement subit très sensible au galvanomètre. Le phénomène semble paradoxal, mais tout étonnement doit cesser si l'on examine le rôle des courants dérivés; ils sont adjoints, non substitués au courant principal; en les mettant en jeu, quelle que soit leur résistance, on ouvre à l'électricité des voies nouvelles, sans en supprimer aucune. Le courant total doit donc devenir plus intense; mais chacun des courants partiels sera d'autant plus faible que leur nombre sera plus grand, et, comme la faculté éclairante diminue beaucoup plus rapidement

que l'intensité, non seulement chaque lumière, mais en même temps l'éclat total, doit diminuer lorsqu'on essaye d'en trop accroître le nombre.

Les dangers apportés par les courants électriques sont, aussi bien que leurs effets utiles, indépendants de l'intensité. Une puissante machine peut imiter la foudre et la porter au loin. L'effet dépend ici d'une grandeur nommée *potentiel*, que, pendant longtemps, les physiciens, sans la définir avec précision, ont appelée la *tension*, et qui, même pour un faible courant, peut grandir sans limite et foudroyer l'imprudent qui toucherait au fil. Ce grave danger, dont rien ne révèle l'approche, est pour les constructeurs une difficulté très sérieuse; les plus hardis semblent disposés à passer outre, en isolant les fils de leur mieux; ils dégagent leur responsabilité par des avertissements et des menaces : la précaution n'est pas suffisante. Le premier chemin de fer construit en France, entre Saint-Étienne et Lyon, restait, pour les habitants des villages traversés, la voie principale de communication ; on laissait, entre deux trains, les enfants jouer et courir sur les rails. Les accidents se renouvelant chaque semaine, on afficha des règlements sévères : personne n'en tint compte ; le maire d'une petite ville eut l'idée ingénieuse de défendre, *sous peine de mort*, le stationnement sur la voie : le nombre des accidents ne diminua pas; une municipalité voisine, en infligeant une amende de 1 franc, obtint un résultat un peu meilleur.

L'impossibilité de demander aux piles voltaïques un travail industriel a été considérée comme un axiome; cela reviendrait, disait-on, à brûler, pour produire la force, un combustible plus coûteux que le charbon, le zinc par exemple, à l'aide d'un comburant plus rare que l'oxygène de l'air.

Le raisonnement serait discutable, et l'avenir peut-être montrera dans les courants secondaires et dans l'accumulateur un éclatant démenti.

Quoi qu'il en soit, le courant aujourd'hui transmet la force et ne la produit pas : c'est l'induction qui transforme utilement la puissance mécanique en électricité. Arago, le premier, a observé un effet de l'induction sans en deviner le principe. Une boussole à laquelle un constructeur illustre avait promis tous ses soins se montrait inférieure en apparence aux instruments les plus gros-

siers. Gambey, cependant, tout en répondant de la mobilité de l'aiguille, constatait avec impatience l'inexplicable lenteur de ses oscillations, sans soupçonner qu'un jour un ingénieux inventeur, à l'aide d'un effet tout semblable, ferait faire au galvanomètre un progrès de grande importance. La cause fut promptement découverte. La résistance, sans aucun doute possible, provenait de la boîte de cuivre. Le cuivre n'agit pas sur l'aiguille aimantée en repos, mais il met obstacle à son mouvement. Cette action, comparable au frottement de deux corps qui ne se touchent pas, paraissait inexplicable; les découvertes de Faraday lui assignèrent dans la Science sa véritable place. Le changement de distance des courants ou des aimants, ou la variation de leur intensité, fait toujours naître entre eux de mutuelles influences. Un aimant immobile, si puissant et si rapproché qu'il soit, ne peut faire naître ni faire varier un courant voltaïque; mais, si on le rapproche ou l'éloigne d'un conducteur, si l'on accroît ou diminue brusquement sa puissance magnétique, on verra tout à coup, dans son voisinage, le courant diminuer, s'accroître ou naître, suivant les conditions de l'expérience. Deux courants se repoussent ou s'attirent sans exercer sur leur intensité une influence qui naît immédiatement si on les rapproche ou les éloigne: et, dans leur voisinage, un fil conducteur sans autre force électromotrice devient le siège d'un courant engendré par induction. L'effet produit n'est dû ni à l'état magnétique ou électrique des corps ni à leur situation mutuelle, mais aux changements qui s'accomplissent et à l'agitation en quelque sorte du milieu électromagnétique. Les physiciens, en se familiarisant avec des phénomènes si étranges, s'étonnèrent bientôt de ne pas les avoir devinés et prévus. Lorsque deux courants, cédant à leur action mutuelle, s'approchent l'un de l'autre, la force vive produite, empruntée à leur énergie primitive, ne peut, disait-on, manquer de la diminuer; il est donc naturel, nécessaire même, que deux courants de même sens qui s'approchent l'un de l'autre diminuent leur intensité; et, avec plus de hardiesse encore, on n'a pas hésité à en conclure que chacun d'eux doit faire naître dans tout fil dont il s'approche un courant qui, s'il s'en éloigne, doit changer le sens.

L'explication n'est ni rigoureuse ni complète. L'évidence invoquée, si elle était incontestable, devrait s'étendre aux actions de

tout genre. Une planète, par exemple, quand elle s'approche du Soleil, devrait en diminuer la puissance attractive et ce que nous nommons sa masse; les raisons à alléguer sont identiquement les mêmes. Sans oser en conclure que l'effet soit certain, ni le présenter même comme vraisemblable, il ne serait pas sans intérêt de rechercher quelles perturbations en résulteraient pour les théories de Mécanique céleste. La perfection acquise par la Science rend périlleuse toute entreprise contre les principes, et l'hypothèse de la variation des masses attirantes, si elle troublait les résultats acquis, serait par là convaincue d'inexactitude. Le calcul, cependant, vaudrait la peine d'être tenté, et l'on peut excuser à l'avance un résultat négatif par la petitesse du coefficient numérique que nos conjectures laissent inconnu.

La découverte de l'induction donna naissance presque immédiatement, il y a aujourd'hui plus d'un demi-siècle, à la machine de Pixii. La rotation d'un aimant, dans cet ingénieux appareil, fait naître un courant dont le sens varierait sans cesse si l'action d'une pièce nommée *commutateur* ne le redressait à chaque inversion; cet appareil, destiné aux cabinets de Physique et simplifié peu de temps après par Clarke, est fondé sur le même principe que les puissantes machines employées aujourd'hui.

Les perfectionnements cependant sont nombreux. Parmi ceux que le succès a consacrés, deux particulièrement doivent être signalés.

M. Siemens, d'abord, puis Wheatstone, indépendamment l'un de l'autre, eurent l'idée, jugée tout d'abord très heureuse, d'utiliser, sans recourir aux aimants, la puissante induction d'un champ magnétique. Il suffit, on le sait, de l'influence terrestre pour rendre toute masse de fer sensiblement magnétique et capable de faire naître un faible courant dans un fil rapidement entraîné près d'elle. Ce courant, à son tour, excite la puissance magnétique, qui réagit sur lui, et les deux effets, s'accroissant l'un par l'autre, effacent bientôt toute différence entre la masse de fer donnée et le plus puissant des aimants.

L'autre progrès, dû au physicien italien Paccinotti, a fourni au célèbre constructeur et inventeur Gramme la pièce caractéristique de ses ingénieuses machines. M. Paccinotti a résolu le problème, déclaré souvent insoluble, d'obtenir un courant continu sans faire usage du commutateur.

L'explication de l'expérience d'Arago, donnée par Faraday, est fondée cependant sur la production d'un courant continu; mais, en dépit de l'expérience, obscurcie peut-être par l'état des découvertes qui l'accompagnaient, les physiciens enseignaient comme une vérité évidente l'inversion des courants d'induction, selon que l'aimant s'approchait ou s'éloignait des positions d'équilibre.

Le principe ingénieux de Gramme est fort éloigné de l'évidence. Un anneau de fer doux tourne en présence des pôles d'un puissant aimant; sa rotation y détermine un état magnétique variable, qui tend à engendrer, sur les diverses parties d'un fil continu enroulé autour de lui, des courants de direction contraire qui, purement et simplement, le détruiraient si l'on bornait là l'expérience. Mais les forces électromotrices excitées dans ce fil continu, variables pour une même portion du fil, restent constantes en chacun des points où, par suite de la rotation, chaque portion se présente successivement. Il en résulte que deux positions fixes, occupées par des éléments qui changent sans cesse, peuvent être assimilées aux deux pôles d'une pile, à l'aide de deux collecteurs, dont la disposition est elle-même une ingénieuse invention; ils produisent un courant continu. Les machines de Gramme sont réversibles : un courant devient une force motrice capable de faire tourner l'anneau.

L'électricité se transporte sans frais; un fil suffit, quelle que soit la distance; la perte est grande malheureusement, et il faut l'atténuer.

Le courant produit par une machine peut en faire tourner une autre, mais celle-ci l'affaiblit par sa réaction et diminue le travail consommé par la machine qui le fait naître.

L'influence exercée par le travail d'un courant sur sa propre intensité est un principe de grande importance. Une expérience très élégante de M. Marcel Deprez le démontre et l'explique. Le courant produit par une machine de Gramme peut croître et diminuer, sous l'influence d'une machine à vapeur, dans les limites les plus étendues. Ce courant est mis en communication avec une seconde machine, entravée à dessein par une résistance qu'il faut surmonter pour la mettre en mouvement. Le courant, très faible d'abord, augmente graduellement; l'aiguille du galvanomètre qui mesure l'intensité s'avance sur son cadran jusqu'au moment où la machine

réceptrice commence à tourner; quel que soit ensuite le travail développé par la machine motrice, qu'il devienne deux fois, dix fois, cinquante fois plus considérable, l'intensité du courant ne change plus : l'énergie dépensée, en accroissant la vitesse de la machine réceptrice, fait naître une puissance inverse qui modère le courant et le rend invariable.

En accroissant, en effet, l'intensité du courant, on augmenterait la vitesse et avec elle la force électromotrice inverse qui le ramènerait à sa valeur primitive sans diminuer toutefois la vitesse acquise, car l'égalité de la puissance à la résistance assure, quelle que soit la vitesse, l'uniformité de mouvement.

Si, en s'accroissant, le travail dépensé ne peut faire varier l'intensité du courant produit, on ne verra pas moins augmenter le travail communiqué à la machine réceptrice. La force déterminée par l'intensité du courant est constante comme lui; mais l'autre facteur du travail, le chemin parcouru, est proportionnel à la vitesse. Chaque tour de la machine représente le même travail, mais le nombre des tours accomplis par minute peut grandir sans limite.

La théorie, d'accord avec l'expérience précédente, n'assigne aucun maximum au travail qu'une machine d'induction peut absorber et transmettre.

Une machine donnée peut engendrer tel courant et produire telle quantité de travail qu'on voudra ; la vitesse de rotation, la force électromotrice qui en résulte et le travail à dépenser seront réglés en conséquence. Au delà de certaines limites malheureusement, on rencontre des difficultés et des dangers. Une machine qui tourne trop rapidement est bientôt hors de service, et une tension trop forte, quelles que soient les précautions prescrites, peut foudroyer l'imprudent qui les brave. On doit donc, pour chaque machine, imposer des limites rigoureuses à la vitesse et à la force électromotrice qui en dépend.

L'affaiblissement du travail moteur, quand on accroît l'effet obtenu, est la conséquence nécessaire de cette limitation obligatoire; il n'a rien de paradoxal.

Il en serait de même pour une machine à vapeur, si l'on imposait une limite à la tension de la vapeur. Supposons qu'une telle machine mette en mouvement les organes d'une pompe dont

le réservoir est à sec ; le travail utile est nul, et le travail dépensé, proportionnel à la tension de la vapeur et à la vitesse du piston, est employé tout entier à vaincre les résistances passives en échauffant les pièces du mécanisme. Si la pompe mise en communication avec le réservoir élève 100lit d'eau par minute, on verra tout à coup les mouvements se ralentir et, s'il est interdit d'accroître la tension de la vapeur, la machine absorber et offrir moins de travail, par cela même qu'on lui en demande davantage.

Supposons, pour entrer au détail, qu'une machine électrodynamique, en dépensant un travail de quatre chevaux, produise un courant qu'on laisse sans emploi ; si, mis en suite en communication avec une machine réceptrice, ce courant produit un travail d'un cheval, il ne faut pas dire : « la machine motrice dépense quatre chevaux, on en utilise un, le rendement est de 25 pour 100. » Ce serait une erreur : la machine motrice qui, travaillant à vide, dépensait quatre chevaux, n'en absorbera plus que deux seulement quand on utilisera son effet. Le rendement sera donc $\frac{1}{2}$, quoique l'effet produit soit le $\frac{1}{4}$ seulement de la dépense mesurée d'abord.

La diminution produite dans le travail de la machine motrice dépend, bien entendu, de l'effort demandé au courant, et il y a lieu de chercher la disposition la plus avantageuse.

Pour obtenir le plus grand rendement possible, il conviendrait d'accélérer la vitesse de la machine réceptrice en lui donnant toutefois pour limite celle de la machine motrice, sans quoi toutes deux s'arrêteraient, et le courant serait réduit à zéro. Mais, en accroissant ainsi le travail relatif, on diminue le travail absolu, et, lorsqu'à la limite on ne perd rien, c'est à la condition de ne rien produire.

Cette solution est donc à rejeter, et il arrivera bien rarement qu'on trouve profit à en approcher.

Pour obtenir, sans se préoccuper du rendement, le plus grand travail possible, il faut demander à la machine réceptrice le quart du travail que la machine motrice pourrait absorber sans produire l'effet utile. Le rendement, dans ce cas, ainsi que nous l'avons indiqué par un exemple, est égal à $\frac{1}{2}$, et la machine motrice absorbe la moitié seulement du travail primitif pour en utiliser le quart. Tous ces résultats, il est utile de le répéter, sont liés aux

conditions imposées par la prudence; si, disposant d'une force illimitée, on osait faire grandir indéfiniment la force électromotrice, le travail dépensé, le travail produit et le rendement pourraient croître en même temps sans limite; mais, en bravant de grands dangers, on rencontrerait bientôt des impossibilités absolues. Quelque soigné que soit l'isolement, un fil, sur de grandes longueurs, présente toujours quelques points faibles; une trop grande tension, lors même qu'elle ne procurerait ni mort ni incendie, amènerait la perte de l'électricité sous forme d'étincelles et d'aigrettes lumineuses.

La résistance du fil qui réunit deux machines augmente avec sa longueur, l'intensité du courant est diminuée et avec elle, dans la même proportion, le travail dépensé et le travail produit; deux machines, par exemple, qui, placées à 100^{m} de distance, pourraient transmettre un travail d'un cheval, transportées à 1000^{km} l'une de l'autre et reliées par un fil de même section, ne pourraient plus fournir que des effets insignifiants, suffisants pour les besoins d'un télégraphe, mais sans aucune valeur industrielle.

Pour transmettre à de grandes distances un travail mécanique, il importe donc de modifier la construction et le mode d'action des machines. La distance, par elle-même, est sans influence; elle intervient seulement pour accroître la résistance du fil qui, proportionnelle à sa longueur, varie en même temps en raison inverse du carré du diamètre; elle dépend aussi de la nature du métal et, pour le cuivre à section égale, est cinq fois moindre que pour le fer. On pourrait donc aisément, soit par l'accroissement du diamètre, soit par le choix d'un métal plus conducteur, atténuer ou supprimer les effets de la distance.

Le travail transmis resterait invariable, malgré l'accroissement de résistance, si le carré de la force électromotrice grandissait dans la même proportion. Si, par exemple, la résistance devient cent fois et la force électromotrice dix fois plus grande, aussi bien sur la machine motrice que sur la machine réceptrice, l'intensité du courant, d'après la loi d'Ohm, sera dix fois moindre; mais, les machines tournant dix fois plus vite, il y aura compensation.

Cette solution, indiquée par les formules théoriques, ne tient pas compte malheureusement des bornes imposées par la prudence à la vitesse de rotation et à la force électromotrice.

La substitution du cuivre au fer, en procurant, à poids égal, une conductibilité cinq fois plus grande, accroîtrait beaucoup la dépense. La solution imposée par les conditions du problème paraît être l'emploi des machines de grandes dimensions. Si l'on accroît dans un même rapport toutes les dimensions d'une machine, la force électromotrice, à vitesse angulaire égale, croît proportionnellement au carré du rapport de similitude, et c'est sur ce principe, démontré par M. Marcel Deprez et voisin d'ailleurs de l'évidence, que doit reposer sans doute la solution si importante du grand problème.

M. Marcel Deprez, qui, le premier, a obtenu déjà, pour le transport à grande distance, des résultats pratiques importants, accepte l'accroissement de tension, espérant en atténuer les dangers par l'isolement des appareils. Mais, au lieu de demander à l'accroissement de vitesse la production de la force électromotrice, il l'obtient très ingénieusement en diminuant le diamètre du fil enroulé sur la bobine, dont il accroît en même temps la longueur, de manière à lui conserver le même volume et à la machine le même aspect.

La transmission du travail à de grandes distances devient ainsi possible avec les machines mêmes et les fils de transmission des machines ordinaires, sans qu'il soit nécessaire d'accroître de façon inquiétante la vitesse de rotation des machines.

Cette solution, réalisée à Munich, pendant la dernière exposition, a donné de grandes et légitimes espérances. Elle n'autorise pas cependant à affirmer que la transmission de la force à grande distance soit aussi facile qu'à un kilomètre.

Une locomotive parcourt en un quart d'heure la distance de Paris à Saint-Cloud; est-il possible, avec la même machine, d'aller dans le même temps de Paris à Versailles? Rien de plus facile, peut-on dire : chauffez plus fort et doublez la vitesse.

C'est de la même manière à peu près que la force peut se transmettre à 100^{km} aussi aisément qu'à 1000^{m}. Il suffit de décupler la force électromotrice.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL. Tomes III et IV. 2 vol. in-8°. 1880-1881. Paris, Gauthier-Villars.

Nous venons, un peu en retard, rendre compte de la fin du grand Traité de notre savant collaborateur; mais nous ne le regrettons pas. L'accueil si favorable qu'ont partout reçu dans nos Facultés et à l'étranger les quatre Volumes de M. Hoüel prêtera plus d'autorité à nos appréciations et nous dispensera d'une analyse détaillée. Nous allons parcourir rapidement le contenu des deux derniers Volumes, en indiquant pour chaque Partie les passages qui nous ont le plus frappé.

La suite du Livre IV, qui commence le troisième Volume, est encore consacrée à la théorie des équations différentielles. L'auteur commence par quelques généralités sur les équations différentielles simultanées; puis il traite, avec de grands détails, le cas particulier des équations linéaires. Il fait connaître les Méthodes de Lagrange, de Cauchy et de d'Alembert et les applique à différents exemples. Il consacre ensuite un Chapitre spécial au Calcul des Variations, dans lequel il ne considère, bien entendu, que les intégrales simples. Parmi les applications, nous avons remarqué ce qui concerne la ligne géodésique, tracée sur une surface. M. Hoüel emploie les coordonnées curvilignes et démontre le théorème de Gauss sur les triangles géodésiques. On a ici, avec ce qui se trouve dans les autres parties de l'Ouvrage, les éléments d'une théorie à la fois très complète et très satisfaisante des coordonnées curvilignes et des surfaces courbes dans la voie ouverte par Gauss. Le Livre IV se termine par un Recueil extrêmement étendu d'exercices.

Le Livre V traite des équations différentielles à plusieurs variables indépendantes, c'est-à-dire des équations aux différentielles totales et des équations aux dérivées partielles. Nous y

avons remarqué un Chapitre très complet sur les équations aux dérivées partielles des diverses familles de surfaces et des développements assez étendus sur les équations linéaires d'ordre supérieur.

Le Livre VI est consacré à la théorie des fonctions d'une variable complexe, traitée d'abord en général et ensuite considérée dans ses applications aux fonctions elliptiques. M. Hoüel a, depuis longtemps, fait connaître en France les recherches de Riemann et de Neumann. La publication de son Ouvrage sur les variables complexes l'avait bien préparé à écrire cette partie de son Traité qui s'occupe du même objet. Il n'a même eu, pour le début de son exposition, qu'à reproduire avec de très légères modifications le commencement de la deuxième Partie de la *Théorie élémentaire des quantités complexes,* publiée en 1868. Il a seulement ajouté la belle démonstration que nous devons à Dirichlet de la série de Fourier.

Le Chapitre III a pour objet l'étude des fonctions multiformes. Pour définir la fonction inverse de l'intégrale elliptique, M. Hoüel a suivi une méthode toute particulière, qui est due à M. Éd. Weyr et qu'il avait déjà signalée dans la Préface générale de l'Ouvrage. Cette méthode est exposée avec de grands détails et nous croyons que les élèves n'auront aucune peine à la comprendre.

Le Chapitre IV contient une théorie élémentaire, mais assez complète, des fonctions elliptiques. Après avoir exposé ce qui concerne la réduction aux trois formes normales, avec beaucoup de simplicité et d'élégance, M. Hoüel revient sur l'addition des fonctions elliptiques. Il établit, en suivant la méthode de MM. Briot et Bouquet, leur décomposition en séries de fractions simples et en produits infinis. Puis il fait connaître les propriétés élémentaires des fonctions ϑ et leurs développements en séries trigonométriques, ainsi que ceux des fonctions elliptiques elles-mêmes. Il étudie ensuite la transformation de Landen et montre, avec des exemples à l'appui, comment on peut l'appliquer au calcul numérique des intégrales de première espèce.

L'Ouvrage est terminé par l'exposition des propriétés élémentaires des intégrales elliptiques de deuxième et troisième es-

pèce. L'auteur donne le théorème d'addition, le théorème de Legendre sur les intégrales complètes de première et de seconde espèce. Il fait connaître les propriétés élémentaires des intégrales de troisième espèce, leurs périodes, leur expression due à Jacobi, au moyen de la transcendante $\mathfrak{I}$. Enfin il nous donne des Tables abrégées propres au calcul numérique.

On le voit, le Traité de M. Hoüel constitue un développement consciencieuxet digne du plus haut intérêt des éléments du Calcul infinitésimal. Alors même que l'on n'adopterait pas toutes les méthodes de l'auteur, et en particulier celles qu'il a empruntées à M. Weyr, pour l'inversion de l'intégrale elliptique, il est certain que son Ouvrage ne fait nullement double emploi avec les Traités de même nature, qu'il a sa place marquée dans les bibliothèques de nos élèves et de nos professeurs, qu'il est susceptible de devenir un guide excellent et de contribuer aux progrès des études de Mathématiques élevées, aussi bien dans nos Facultés que dans les Universités de l'Étranger. G. D.

NEOVIUS (E.-R.). — Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen. Helsingfors, Frenkell und Sohn. In-8°, VIII-117 p.; 1883.

Dans un Mémoire inséré aux *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, 1872 (1), M. Schwarz a donné la solution générale du problème suivant :

On donne une suite continue fermée composée de lignes droites et de plans et l'on demande de trouver une surface minima à connexion simple, n'ayant aucun point singulier, dans son intérieur, qui passe par les droites et qui coupe les plans à angle droit.

Il a considéré, en particulier, le cas où la suite se réduit à deux droites et un plan. Alors la portion de surface minima comprise

---

(1) H.-A. Schwarz, *Forgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen.*

entre les droites et le plan admet comme prolongement analytique la surface symétrique par rapport au plan; on peut donc la considérer comme la moitié d'une portion de surface minima limitée aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche, admettant un plan de symétrie qui passe par deux de ses sommets.

Le premier exemple de la détermination analytique d'une surface minima passant par les côtés d'un quadrilatère gauche est contenu dans une Note de M. Schwarz communiquée en 1865 à l'Académie de Berlin (¹).

En 1866, M. Weierstrass a donné la détermination analytique des surfaces minima qui sont assujetties à contenir *les côtés d'un polygone rectiligne quelconque*.

Le même problème a été résolu aussi par Riemann dans son Mémoire posthume : *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, publié par M. Hattendorff. La première édition de ce Mémoire, qui a paru dans le treizième Volume des *Mémoires de l'Académie de Göttingue*, contient, en ce qui concerne le problème précédent, plusieurs inexactitudes. Une rédaction nouvelle et plus correcte du même Mémoire a été comprise dans les *Œuvres complètes* de Riemann.

En 1867, l'Université de Göttingue a proposé comme question de prix le problème suivant :

Parmi les surfaces qui s'étendent entre les quatre côtés de deux triangles isoscèles ayant une base commune, déterminer celle qui a la plus petite étendue, de telle manière que les coordonnées d'un point quelconque de cette surface soient exprimées en fonction de deux variables, soit par des intégrales définies, soit par des séries suffisamment simples.

M. Schondorff obtint le prix et sa pièce de concours a été imprimée en 1868.

Le même problème est aussi traité dans la Iʳᵉ Partie d'un Mémoire de M. Schwarz : *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* qui a été couronné en 1867 par l'Académie de Berlin et qui a été publié en 1871 (Berlin, Harwitz et Gossmann).

(¹) H.-A. SCHWARZ, *Ueber die Minimumsfläche, deren Begrenzung als ein*

Dans le travail dont nous rendons compte, et auquel nous empruntons les renseignements qui précèdent, M. Neovius s'est proposé de traiter un cas particulier du problème général résolu en 1872 par M. Schwarz, celui où le contour de la portion de surface minima est déterminé par deux droites et par un plan qu'elle coupe à angle droit. Ce cas particulier offre un grand intérêt; M. Neovius l'a étudié d'une manière détaillée, en le traitant directement par une méthode très simple. Nous allons d'abord donner un aperçu des divisions de son travail et de la méthode qu'il a suivie.

Considérons deux droites se coupant en un point P et rencontrant un plan (Σ) en deux points Q et R. Le segment de surface minima cherché qui doit contenir les droites PQ, PR doit couper à angle droit le plan (Σ) suivant une courbe QR qui, bien entendu, n'est pas donnée à l'avance, mais qui doit être déterminée. L'auteur achève de préciser le problème en s'imposant les conditions suivantes :

1° Le segment de surface minima cherché M ne contiendra aucun point singulier dans son intérieur;

2° La normale de la surface variera d'une manière continue;

3° Enfin le long de chacune des trois parties PQ, QR, RP du contour, la normale en se plaçant tournera toujours dans le même sens.

Cette dernière hypothèse, par exemple, exclut le cas où la courbe inconnue QR aurait un ou plusieurs points d'inflexion.

Le principe de la solution peut être donné en quelques mots. Il est aisé de voir que le segment de surface minima M admet une représentation sphérique, formée par les points à l'intérieur d'un triangle sphérique, dont les angles sont connus. D'autre part, si l'on suppose la surface minima représentée d'une manière conforme sur un plan, de telle manière qu'aux lignes de courbure correspondent des droites parallèles, on démontre facilement qu'au segment M devra correspondre une portion du plan comprise à l'intérieur d'un triangle rectangle isoscèle. Si la surface M était connue, on voit donc que l'on aurait, par son intermédiaire, la

---

von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes, windschiefes Viereck gegeben ist.

représentation conforme de la surface d'un triangle sphérique sur celle d'un triangle plan isoscèle et rectangle. Réciproquement, si l'on détermine les formules qui permettent de réaliser cette représentation conforme, ce que fait l'auteur en suivant les méthodes de M. Schwarz, il est facile de voir que l'on aura tous les éléments nécessaires pour déterminer la surface minima, ou, si l'on veut, la fonction arbitraire qui figure dans les formules de M. Weierstrass. Telle est la solution, complètement développée par M. Neovius, dans le Chapitre I[er] de son travail. L'auteur vérifie d'ailleurs *a posteriori* que la surface satisfait à toutes les conditions qui ont été imposées.

La surface ainsi obtenue peut être prolongée analytiquement; il suffit pour cela de prendre sa symétrique, soit par rapport au plan (Σ), soit par rapport aux droites PQ, PR, et de répéter indéfiniment ces opérations. Dans le second Chapitre de son travail, M. Neovius se propose de déterminer tous les cas dans lesquels la surface sera en quelque sorte périodique, c'est-à-dire dans lesquels la répétition des opérations précédentes ne donnera qu'un nombre fini de segments dans chaque portion finie de l'espace. Le résultat de cette recherche peut être énoncé comme il suit :

La surface obtenue par les répétitions congruentes et symétriques du segment M ne sera périodique que si les droites PQ, PR sont parallèles aux arêtes ou aux diagonales des faces d'un cube, le plan Σ étant parallèle à l'un des neuf plans de symétrie de ce cube.

Cela conduit à considérer 5 cas différents. Les cas 1 et 4 aussi bien que les cas 2 et 3 conduisent à une même surface. De plus, les deux surfaces ainsi obtenues sont dans la relation obtenue par M. O. Bonnet, c'est-à-dire que l'on peut faire correspondre les lignes de courbure de l'un aux lignes asymptotiques de l'autre, de telle manière que la représentation soit conforme. Elles ont été complètement étudiées par M. Schwarz. L'une d'elles est celle dont le contour est limité par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier.

Après avoir rappelé ces résultats, l'auteur passe dans le troisième Chapitre à l'étude du cinquième cas, qui est faite d'une manière très détaillée. Il montre comment on peut exprimer les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface par des intégrales

elliptiques et il établit que l'on pourrait obtenir, si cela était nécessaire, une équation de la surface rationnelle par rapport à des fonctions elliptiques des coordonnées. Enfin il étudie la forme de la surface et de celle que l'on en déduit par la déformation de M. O. Bonnet. Deux photographies donnent une idée nette de ces deux surfaces.

On voit avec quel soin cette étude du problème a été poursuivie dans les plus petits détails. Il serait à désirer que l'on eût beaucoup de travaux du même genre : ils sont très propres à éclairer et à faciliter l'application et l'interprétation des théories générales.

Du reste, la question étudiée par M. Neovius a assez d'intérêt par elle-même pour mériter un examen aussi approfondi.

G. D.

MÉLANGES.

SUR UNE DÉCOMPOSITION EN CARRÉS;

PAR M. J. TANNERY.

I. *Soient*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0, \quad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0$$

les équations de trois plans perpendiculaires deux à deux; si l'on fait

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) \\ \qquad = x^2(px + p'y + p''z) + y^2(q''x + qy + q'z) \\ \qquad\quad + z^2(r'x + r''y + rz) + hxyz, \end{cases}$$

on aura identiquement

$$(2)\quad \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) \\ \quad = 6(p^2 + q^2 + r^2) + 2(p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) + h^2. \end{cases}$$

Si l'on considère en effet les expressions des coefficients p, p', ..., qui résultent de l'égalité (1), et si l'on désigne par p_2,

p'_2, ... ce que deviennent ces quantités quand on y remplace α, β, ... par α^2, β^2, ..., on aura évidemment

$$(3) \qquad K = p_2 + q_2 + r_2 + p'_2 + q'_2 + r'_2 + p''_2 + q''_2 + r''_2 + h_2,$$

où K désigne le premier membre de l'égalité (2); d'ailleurs, on obtient de suite les égalités suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_2 = p^2, \quad q_2 = q^2, \quad r_2 = r^2, \\ p'_2 = p'^2 - 2pq'', \quad p''_2 = p''^2 - 2pr', \\ q'_2 = q'^2 - 2qr'', \quad q''_2 = q''^2 - 2qp', \\ r'_2 = r'^2 - 2rp'', \quad r''_2 = r''^2 - 2rq', \\ \delta^2 = h_2 + 2M - 2N, \\ h^2 = h_2 + 2M + 2N; \end{array} \right.$$

dans les deux dernières égalités, δ désigne le déterminant

$$\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma'',$$

2M représente l'ensemble des six doubles produits qui, dans le carré de ce déterminant, figurent avec le signe +, et $-2N$, l'ensemble des neuf doubles produits qui, dans ce même carré, figurent avec le signe — ; ces quantités N et M sont liées aux coefficients de $f(x, y, z)$ par la relation

$$(5) \qquad N + 3M = r'q'' + p'r'' + q'p'';$$

des équations (3), (4) et (5) on tire

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3K - \delta^2 = 3(p^2 + q^2 + r^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) \\ \qquad - 6[p(q'' + r') + q(r'' + p') + r(p'' + q')] \\ \qquad + 2h^2 - 2(r'q'' + p'r'' + q'p''). \end{array} \right.$$

Jusqu'ici on n'a pas supposé que les plans fussent rectangulaires: cette supposition entraîne les égalités

$$\begin{array}{r} 3p + q'' + r' = 0, \\ 3q + r'' + p' = 0, \\ 3r + p'' + q' = 0, \\ \delta^2 = K; \end{array}$$

les trois premières égalités permettent de faire disparaître du second membre de l'égalité (6) tous les doubles produits : on parvient ainsi soit à l'égalité (2) que j'avais en vue, soit à l'égalité

équivalente

$$(2\,bis)\quad K = 15(p^2+q^2+r^2)+h^2+(q''-r')^2+(r''-p')^2+(p''-q')^2.$$

Ces identités offrent ceci d'intéressant, qu'elles conduisent immédiatement à la décomposition en carrés du discriminant de l'équation du troisième degré que l'on rencontre dans la théorie des plans principaux des surfaces du troisième degré. Cette décomposition a été effectuée, comme on sait, par M. Kummer; Borchardt, pour l'équation aux inégalités séculaires de degré quelconque, a, de même, décomposé en carrés l'ensemble des fonctions qui, par leur caractère positif, assurent la réalité des racines d'une telle équation; sa belle analyse épuise, en quelque sorte, la question au point de vue analytique; toutefois, il semble qu'il y ait encore quelque intérêt à relier la formule de décomposition de M. Kummer à des considérations géométriques qui se présentent naturellement dans la théorie des surfaces du second degré.

Soit

$$\varphi(x,y,z) = ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy = 0$$

l'équation d'un cône du second degré, et soit

$$\Phi(x,y,z) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$

la forme adjointe de la fonction $\varphi(x,y,z)$: on reconnaît de suite que l'équation du troisième degré qui représente l'ensemble des trois plans principaux du cône considéré s'obtient en éliminant α, β, γ entre les trois opérations

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y \; + \gamma z \; &= 0,\\ \alpha\varphi'_x + \beta\varphi'_y + \gamma\varphi'_z &= 0,\\ \alpha\Phi'_x + \beta\Phi'_y + \gamma\Phi'_z &= 0. \end{aligned}$$

On peut représenter le résultat de l'élimination par

$$f(x,y,z) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} p &= b''B'-b'B'',\quad \ldots,\\ p' &= B'(a'-a)-b'(A'-A)-(bB''-b''B),\\ p'' &= B''(a-a'')-b''(A-A'')-(b'B-bB'),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ h &= a'A''+a''A+aA'-a''A'-aA''-a'A. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si, étant donnée une fonction quelconque F des coefficients a, a', a'', b, b', b'', on désigne par F_s ce que devient cette fonction quand on y remplace a, a', a'' par $a-s$, $a'-s$, $a''-s$; si enfin on désigne par s_1, s_2, s_3 les trois racines de l'équation

$$\begin{aligned}\Delta_s = (a-s)(a'-s)(a''-s) &- (a-s)b^2 \\ - (a'-s)b'^2 - (a''-s)b''^2 &+ 2bb'b'' = 0,\end{aligned}$$

les équations des trois plans principaux du cône seront respectivement

$$\begin{aligned} X &= x\sqrt{A_{s_1}} + y\sqrt{A'_{s_1}} + z\sqrt{A''_{s_1}} = 0, \\ Y &= x\sqrt{A_{s_2}} + y\sqrt{A'_{s_2}} + z\sqrt{A''_{s_2}} = 0, \\ Z &= x\sqrt{A_{s_3}} + y\sqrt{A'_{s_3}} + z\sqrt{A''_{s_3}} = 0, \end{aligned}$$

pourvu que l'on prenne les signes des radicaux de manière à satisfaire aux équations

$$\sqrt{A'_{s_1}}\sqrt{A''_{s_1}} = B_{s_1}, \quad \ldots.$$

Le produit XYZ sera donc égal à $f(x, y, z)$, à un facteur près, indépendant des quantités x, y, z; on reconnaît sans peine, en formant directement, par exemple, le coefficient de x^3, que ce facteur est égal à ± 1. En appliquant les formules (2) ou (2 *bis*), on obtiendra donc une décomposition en carrés du discriminant

$$K = (A_{s_1} + A'_{s_1} + A''_{s_1})(A_{s_2} + A'_{s_2} + A''_{s_2})(A_{s_3} + A'_{s_3} + A''_{s_3})$$

de l'équation $\Delta_s = 0$; l'application de la formule (2 *bis*) conduit à la décomposition de M. Kummer :

$$\begin{aligned} K = 15[(b''B' - b'B'')^2 &+ (bB'' - b''B)^2 + (b'B - bB')^2] \\ &+ [B(a' + a'' - 2a) - b(A' + A'' - 2A)]^2 \\ &+ [B'(a'' + a - 2a') - b'(A'' + A - 2A')]^2 \\ &+ [B''(a + a' - 2a'') - b''(A + A' - 2A'')]^2 \\ &+ (a'A'' + a''A + aA' - a''A' - aA'' - a'A)^2. \end{aligned}$$

SUR UNE PROPOSITION CONCERNANT LES FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. ÉMILE PICARD

Dans un travail sur une classe d'équations différentielles (*voir* t. IV de ce Recueil, 2e série, 1880), j'ai considéré deux fonctions uniformes d'une variable, n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point à l'infini et liées par une relation algébrique. Envisageons ici d'une manière plus générale deux fonctions

$$x = \mathrm{P}(z), \quad y = \mathrm{Q}(z),$$

uniformes dans tout le plan, ayant des pôles en nombre quelconque et un nombre fini de points singuliers essentiels; *je me propose d'établir que, s'il existe entre ces deux fonctions une relation algébrique, le genre de cette relation doit être zéro ou l'unité.* J'indiquerai ensuite la forme générale de deux fonctions uniformes P et Q liées par une relation algébrique.

1. Mon point de départ est dans la proposition suivante, qui résulte des recherches de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1882).

y étant lié à x par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

de genre égal ou supérieur à 2, on peut trouver une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y) z,$$

où φ est rationnel, n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques $x = a$, $y = b$, points singuliers de l'équation (1), et jouissant des propriétés suivantes : si l'on prend deux intégrales convenables ω_1 et ω_2, l'équation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$$

donne pour x une fonction fuchsienne de u, fonction qui n'est définie que pour les valeurs de u dans lesquelles le coefficient de i est positif. De plus, dans le voisinage d'un point analytique $x=a$, $y=b$ ($y=b$ faisant partie d'un système circulaire de p racines), le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ sera fonction uniforme de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$, et nous pouvons enfin supposer qu'aucune des substitutions du groupe de l'équation linéaire n'est parabolique.

La fonction u de x, que nous venons de définir, a pour chaque valeur de x une infinité de déterminations; quel que soit x, toutes ces déterminations ont des valeurs finies, et dans ces expressions, mises sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, le coefficient de i est toujours positif et différent de zéro : u désignant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par la formule

$$\frac{Au+B}{Cu+D},$$

où A, B, C, D sont réels et satisfont à la relation $AD-BC=1$.

La substitution (A, B, C, D) est une des substitutions du groupe fuchsien défini plus haut. Ce groupe, comme je l'ai dit, ne renferme pas de substitutions paraboliques.

2. Ces résultats étant admis, supposons maintenant qu'entre deux fonctions uniformes

$$x=P(z),\quad y=Q(z)$$

existe une relation algébrique

$$f(x,y)=0,$$

de genre égal ou supérieur à deux. Les fonctions P et Q ont des pôles en nombre quelconque et un nombre fini de points singuliers essentiels, que nous pouvons tous supposer à distance finie et que je désignerai par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

J'envisage la fonction u de x qui vient d'être définie. Je remplace dans cette fonction x par $P(z)$: u devient alors une fonction de z dont nous allons faire l'étude. Dans le voisinage de toute valeur de z à laquelle ne correspond pas un système de valeurs de x et y qui donnent un point singulier de la relation algébrique,

la fonction u est évidemment uniforme. Soit maintenant $z = z_1$ une valeur de z pour laquelle on ait $x = a$, $y = b$, cette dernière faisant partie d'un système circulaire de p racines; l'équation $P(z) = a$ admettra la racine $z = z_1$ à un degré de multiplicité multiple de p, puisque la valeur de y tirée de l'équation (1) doit être une fonction uniforme de z; or $u(x)$, étant dans le voisinage de $x = a$ fonction uniforme de $(x - a)^{\frac{1}{p}}$, sera par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_1 : on voit donc que u est une fonction uniforme de z dans tout contour simple ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Nous allons maintenant rechercher la forme de u dans le voisinage d'un tel point a. Traçons autour du point a un certain domaine D ne comprenant aucun autre point essentiel des fonctions P et Q. Soit pour un point de ce domaine une détermination u de la fonction $u(z)$; quand z fait un tour complet autour du point a dans le sens positif, $x = P(z)$ décrit dans son plan une courbe également fermée, et par conséquent la nouvelle détermination de u a la forme

$$\frac{Au + B}{Cu + D},$$

cette substitution étant une des substitutions du groupe dont il a été parlé précédemment, et deux cas vont être à distinguer, suivant que cette substitution est hyperbolique ou elliptique.

3. Supposons d'abord que la substitution (A, B, C, D) soit hyperbolique. On a alors $(A + D)^2 > 4$. On peut alors, comme il est bien connu, trouver cinq quantités réelles α, β, γ, δ et k, telles que $\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour complet de z autour du point a.

k est d'ailleurs une constante positive différente de l'unité; désignons par μ son logarithme arithmétique. Le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi}}$$

reprend par suite la même valeur après un tour complet, et l'on

peut écrire

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{\mu}{2\pi i}} \varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine D; $\varphi(z)$ n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point a, car le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut jamais devenir nul, puisque γ et δ sont réels. De plus $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha + \beta u$ ne peut s'annuler; par suite, le quotient $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est uniforme et continu dans D à l'exception de a. On peut alors écrire

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \ldots + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \frac{A_1}{z-a} + A + B(z-a) + \ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z - a$. En intégrant, on voit de suite que A_1 doit être un entier m positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme; on a donc

$$\varphi(z) = (z-a)^m e^{f(z)},$$

$f(z)$ étant uniforme dans D et continue à l'exception du point a. En résumé, nous obtenons

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)}.$$

Or le coefficient de i dans le premier membre a un signe invariable, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; nous allons montrer que le coefficient de i dans le second membre ne peut avoir un signe constant; écrivons à cet effet

$$(z-a)^{\frac{\mu}{2\pi i} + m} e^{f(z)} = e^{\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right) \log(z-a) + f(z)}.$$

Si dans cette expression le coefficient de i a toujours le même signe, le signe + pour fixer les idées, le coefficient de i dans

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right) \log(z-a) + f(z)$$

devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, c'est-à-dire entre deux limites fixes.

Posons

$$\left(\frac{\mu}{2\pi i} + m\right) \log(z-a) + f(z) = U + iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si m n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du point a augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m = 0$; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\log(z-a) + \frac{2\pi i}{\mu} f(z) = -\frac{2\pi V}{\mu} + \frac{2\pi i U}{\mu},$$

ou

$$(z-a)e^{\frac{2\pi i}{\mu} f(z)} = e^{-\frac{2\pi V}{\mu}} e^{\frac{2\pi i U}{\mu}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées, tandis que le premier peut devenir aussi petit que l'on veut, que $f(z)$ soit continue ou non au point $z = a$.

Il résulte de la contradiction que nous venons de rencontrer que la substitution (A, B, C, D) ne peut être hyperbolique.

4. Supposons maintenant que la substitution soit elliptique. Nous avons dans ce cas

$$(A+D)^2 < 4.$$

On pourra encore trouver quatre quantités α, β, γ, δ et k telles que $\frac{\alpha+\beta u}{\alpha+\delta u}$ se reproduise multiplié par k après un tour de z autour de a; mais ici ces quantités ne sont plus réelles. On a pour déterminer le rapport de γ à δ l'équation du second degré

$$B\delta^2 + (D-A)\delta\gamma - C\gamma^2 = 0,$$

et pareillement

$$B\beta^2 + (D-A)\beta\alpha - C\alpha^2 = 0;$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ sont donc racines de l'équation du second degré

$$B + (D-A)x - Cx^2 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires, puisque

$$(A+D)^2 < 4 \quad \text{et} \quad AD - BC = 1.$$

Nous prendrons pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la racine dans laquelle le coefficient de i est négatif, et par suite dans $\frac{\gamma}{\delta}$ le coefficient de i sera positif.

Quant au multiplicateur k, il est nécessairement une racine de l'unité, sans quoi le groupe dont fait partie la substitution (A, B, C, D) ne serait pas un groupe discontinu; nous poserons donc $k = e^{\frac{2m\pi i}{n}}$, m et n étant positifs et premiers entre eux.

Ceci posé, considérons le quotient

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} : (z - a)^{\frac{m}{n}};$$

ce quotient sera une fonction uniforme dans le domaine D.

Écrivons donc

$$\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u} = (z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z).$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le coefficient de i dans $-\frac{\gamma}{\delta}$ est négatif, tandis qu'il est positif dans $-\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur $\gamma + \delta u$ ne peut donc s'annuler, puisque dans u le coefficient de i est toujours positif; il y a plus, le module du premier membre reste toujours inférieur à une limite qu'il serait facile d'assigner. On en conclut que le point $z = a$ ne peut être un point singulier essentiel pour $\varphi(z)$. Ce point est donc un pôle ou un point ordinaire pour la fonction φ; dans ces conditions, l'expression

$$(z - a)^{\frac{m}{n}} \varphi(z),$$

n étant plus grand que 1 et m étant premier à n, ne peut que tendre vers zéro ou augmenter indéfiniment quand z tend vers a: la seconde supposition étant, d'après ce qui précède, inadmissible, cette expression a la valeur zéro pour $z = a$. Nous arrivons donc à cette conclusion :

De quelque manière que z tende vers le point a, la fonction u tend vers $-\frac{\alpha}{\beta}$. Or, pour $u = -\frac{\alpha}{\beta}$, la fonction fuchsienne x de u, définie par la relation (§ I)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u,$$

possède une valeur parfaitement déterminée; donc, de quelque manière que z tende vers a, la fonction $x = P(z)$ tend vers une

valeur déterminée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le point a est un point singulier essentiel de $P(z)$.

La substitution (A, B, C, D) ne peut donc être elliptique; or, comme le groupe ne renferme que des substitutions elliptiques et hyperboliques, il ne nous reste plus qu'à supposer que la fonction u de z est uniforme dans le voisinage de a.

5. L'examen de ce cas sera bien facile. On aurait alors

$$u = A(z) + B(z),$$

où

$$A(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots,$$
$$B(z) = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots.$$

$B(z)$ doit être nulle, sinon le coefficient de i dans la fonction u aurait un signe variable. On a donc

$$u = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots.$$

Dans la constante A_0, le coefficient de i doit être différent de zéro et positif; il ne peut, en effet, être nul, car alors le coefficient de i dans u serait le même que dans

$$A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

et ce dernier dans le voisinage de $z = a$ n'a évidemment pas un signe constant.

On voit donc que, quand z tend vers a, u tend vers une valeur A_0 dans laquelle le coefficient de i est différent de zéro et positif. En raisonnant comme plus haut, nous en concluons que, pour $z = a$, la fonction $P(z)$ a une valeur parfaitement déterminée.

L'hypothèse faite que le genre de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

est supérieur à l'unité est donc inadmissible, puisqu'elle nous conduit à cette contradiction que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***ne sont pas des points singuliers essentiels de*** $P(z)$. La proposition énoncée est complètement établie.

6. Dans le cas ([1]) où les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont qu'un seul point singulier essentiel que nous pouvons supposer être le point ∞, la démonstration est immédiate. En substituant, en effet, dans u à la place de x la fonction $P(z)$, on obtient une fonction $u(z)$ uniforme et continue dans tout le plan; d'ailleurs dans $u(z)$ le coefficient de i est toujours positif; par conséquent la fonction $e^{iu(z)}$, uniforme et continue dans tout le plan, a un module toujours moindre que *un*, ce qui est impossible.

7. Cherchons maintenant la forme générale de deux fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ ayant les points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et liées par la relation algébrique

$$f(x, y) = 0.$$

Cette relation sera, d'après ce qui précède, du genre zéro ou du genre un.

Dans le premier cas, on pourra exprimer x et y rationnellement en fonction d'un paramètre λ, et cela de telle manière qu'à un système de valeurs ne corresponde en général qu'une valeur de λ. On aura alors

$$x = F(\lambda), \quad y = F_1(\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda = \varphi(x, y),$$

F, F_1 et φ étant des fonctions rationnelles : en remplaçant x et y par $P(z)$ et $Q(z)$, λ sera une fonction $R(z)$ ayant les points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et l'on a

$$x = F[R(z)], \quad y = F_1[R(z)].$$

Supposons, en second lieu, que la relation algébrique soit du genre un. Considérons l'intégrale abélienne de première espèce correspondant à cette relation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)},$$

([1]) Ce cas est celui que j'ai considéré dans le travail rappelé au début; pour être rendue entièrement rigoureuse, la démonstration qui s'y trouve indiquée aurait besoin d'être complétée. J'avais donné auparavant une démonstration à l'abri de toute objection, en supposant que la relation entre x et y était hyperelliptique (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juillet 1880).

et faisons, dans l'expression

$$\frac{F(x,y)\,\dfrac{dx}{dz}}{f'_y(x,y)},$$

$x = P(z)$ et $y = Q(z)$; nous aurons une fonction uniforme de z et continue pour toute valeur de z distincte de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cette expression aura donc les seuls points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et nous pouvons alors écrire

$$\frac{F(x,y)\,\dfrac{dx}{dz}}{f'_y(x,y)} = \sum_{p=1}^{p=n} G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right),$$

en désignant par $G_p(z)$ une fonction entière de z. Multiplions par dz les deux membres de cette relation et intégrons, il vient

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F(x,y)dx}{f'_y(x,y)} = \sum_{p=1}^{p=n} G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z-a_p) + Bz,$$

en désignant par les mêmes lettres G de nouvelles fonctions entières, les B et A étant des constantes. Or l'équation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F\,dx}{f'_y} = u$$

donne $x = \varphi(u)$, φ étant une fonction uniforme doublement périodique de u; on a donc

$$x = \varphi\left[Bz + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z-a_p) + R(z)\right],$$

$R(z)$ n'ayant d'autres points singuliers (pôles ou points essentiels) que $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

x devant être une fonction uniforme de z, on aura, en désignant par ω et ω' les périodes de φ,

$$2\pi i A_p = m_p\omega + n_p\omega' \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

les m et n étant des entiers. D'autre part, le point $z = \infty$ étant un point ordinaire pour la fonction x, on aura

$$B = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{p=n} A_p = 0,$$

et nous avons, en résumé,

$$x = \varphi\left[R(z) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p)\right],$$

$$y = \varphi_1\left[R(z) + \sum_{p=1}^{p=n} A_p \log(z - a_p)\right],$$

φ et φ_1 étant des fonctions doublement périodiques aux périodes ω et ω'.

SUR LA DATE DES PRINCIPALES DÉCOUVERTES DE FERMAT;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Le résultat peut-être le plus singulier de l'histoire des Mathématiques est de montrer que les grandes découvertes, celles qui portent la véritable empreinte du génie et qui ont exercé une influence décisive sur le développement ultérieur de la Science, doivent être rapportées à la jeunesse plutôt qu'à l'âge mûr de leurs auteurs. Il ne s'agit pas, bien entendu, de la date de publication de ces découvertes, mais de l'époque à laquelle les inventeurs en ont eu la conscience pleine et entière, possédé les démonstrations fondamentales et déduit les conséquences immédiates.

Je me propose de montrer que Fermat n'a point fait exception à la règle; cette question jusqu'à présent n'a pas été sérieusement discutée et, si on l'a effleurée, ç'a été plutôt pour la résoudre en sens contraire. Par exemple, M. Ch. Henry a constaté certaines dates et a essayé d'en déterminer quelques autres dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche* (¹); sa conclu-

(¹) Publiées dans le *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XII, juillet, août, septembre, octobre 1879. — Supplément, t. XIII, juillet 1880. Je citerai sous la rubrique *Henry*, d'après les tirages à part.

sion la plus nette (p. 52, Note 4) est que la mort de Mersenne, arrivée le 1er septembre 1648, est antérieure aux plus beaux théorèmes de Fermat.

Tant que les pièces encore inédites du géomètre toulousain n'auront pas été publiées, des données essentielles manqueront au reste pour la détermination de la chronologie de ses travaux. L'étude que j'entreprends se trouve donc nécessairement limitée sous le rapport de la précision des conclusions ; d'autre part, je la bornerai aux découvertes que je considère comme capitales et qui sont les suivantes :

1° En Algèbre pure, la proposition sur les nombres figurés, (Diophante, *De multangulis numeris*, p. 16), qui donne la loi de formation des coefficients du binôme ; la sommation des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique ;

2° En Analyse infinitésimale, la méthode *de maximis et minimis* ou des tangentes, avec le calcul inverse, qui constituent peut-être le stade le plus important de l'élaboration antérieure à l'invention de l'algorithme leibnitzien (1) ;

3° En théorie des nombres, d'une part, la célèbre proposition négative sur l'équation $x^n + y^n = z^n$, proposition dont il n'existe pas encore de démonstration générale ; d'un autre côté, le théorème sur la composition d'un nombre entier en polygones d'un nombre de côtés donné (*Diophante*, p. 180-181), théorème que Fermat, dans sa lettre à Pascal du 25 septembre 1654 (2), indique lui-même comme le couronnement de ses découvertes sur les nombres, comme celle qui suppose connu « tout ce qu'il a inventé de considérable ».

Si je n'étends pas davantage la liste des découvertes de Fermat, dont la date mérite d'être particulièrement recherchée, c'est d'ailleurs afin d'exclure aussi bien celles pour lesquelles la priorité du

(1) Je n'ai pas à rappeler les jugements de d'Alembert, de Lagrange, de Laplace, considèrent Fermat comme le véritable inventeur du Calcul différentiel. Pour quer l'importance de ses travaux dans le domaine de l'Analyse infinitésimale, e suffira d'indiquer qu'il a donné de fait, notations à part, la règle de l'intéion par parties (*Varia*, p. 51 et suiv.).

(2) T. II, p. 404-406 de l'édition Lahure, 1860, des *Œuvres complètes de Blaise al*, tome que je continuerai à citer sous la rubrique *Pascal*.

principe pourrait lui être contestée, que celles qui, malgré leur importance théorique, ne semblent pas avoir joué un rôle aussi décisif que celui des propositions et méthodes indiquées ci-dessus.

II.

Si l'on prenait à la lettre ce que dit *Pascal* (p. 443) sur la proposition XI de son *Traité des ordres numériques*, le théorème sur les nombres figurés (coefficients du binôme) aurait été inventé en même temps par Fermat et par lui :

« Cette même proposition, que je viens de rouler en plusieurs sortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fermat; et ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à lui, il écrivoit dans sa province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. »

De fait, la lettre de Fermat à *Pascal* (p. 403) du 29 août 1654, autorisait l'inventeur du triangle arithmétique à s'exprimer comme il l'a fait :

« Et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris. »

Cependant la priorité de Fermat est indiscutable, et sa découverte est d'au moins *dix-huit ans* antérieure.

Mais ce qu'il y a de plus étrange, c'est que Pascal affirme n'en avoir pas eu la moindre lumière, car l'énoncé de la proposition de Fermat se retrouve dans une lettre de lui à Roberval du 4 novembre 1636 (¹).

Et ce qui montre bien au reste que, dès lors, Fermat se rend parfaitement compte de l'importance du théorème qu'il appellera le plus beau et le plus général qu'on puisse donner *in numeris* (²),

---

(¹) *Varia*, p. 146, lignes 33-37. — L'énoncé, latin comme celui des *Observations sur Diophante*, en diffère sur quelques points insignifiants, mais qui semblent appartenir à une première rédaction. Il y a d'ailleurs à la dernière ligne : « Et *eo* in infinitum progressu, » une faute d'impression; il faut lire *sic*.

(²) DIOPHANTE, *loc. cit.* — Cette expression ne signifie évidemment pas « dans la théorie des nombres », comme a traduit *Henry* (p. 11), qui a tort, d'ailleurs,

c'est qu'il s'en est immédiatement servi pour la recherche des sommations des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Dans sa lettre précitée à Roberval, Fermat dit explicitement que c'est par le moyen de la proposition qu'il énonce qu'il est venu à bout de cette question de la sommation; il offre d'ailleurs à son correspondant tout ce qu'il a fait, « qui comprend entièrement tout ce qui se peut dire sur cette matière ». Il est donc en possession de la solution complète.

Roberval devait plus tard, dans une lettre à Hevelius, de 1650, profiter du silence que Fermat paraît avoir gardé depuis cette époque, pour s'arroger la découverte de la sommation des puissances semblables. La lettre que Fermat lui écrivit le 16 décembre 1636 (*Varia*, p. 148) constate bien au reste que Roberval, après la communication précédente, somma les quatrièmes et cinquièmes puissances, mais en même temps que sa méthode ne s'appliquait pas « *ad omnes potestates* ».

Roberval avait-il caché, même à Pascal et au père de celui-ci, les précieuses indications qu'il avait reçues de Toulouse? Il faut le croire pour l'honneur de l'auteur des *Pensées*, qui traita naturellement à son tour le problème des sommations, et le fit comme si rien n'avait encore été publié à ce sujet ([1]).

III.

L'histoire des travaux de Fermat en Analyse infinitésimale a été plus approfondie, à cause de ses démêlés avec Descartes, que celle de ses recherches en Algèbre pure. Je pourrai donc me borner à une seule remarque.

---

de reprocher, à ce sujet, une exagération d'expressions au mathématicien le plus réellement modeste de son temps; sa conduite avec Pascal montre suffisamment, à cet égard, son véritable caractère.

([1]) *Pascal*, p. 475-483, *Potestatum numericarum summa*. — Au début de ce Traité, l'auteur constate que les anciens avaient sommé les carrés et les cubes. On était donc d'accord, au XVIIe siècle, pour reconnaître comme appartenant à l'antiquité la formule de sommation des cubes que M. Kantor a récemment retrouvée dans l'*Epaphroditus* (*Die römischen Agrimensoren*, Leipzig, 1875, p. 127 et

Dans sa lettre à Roberval du 22 septembre 1636 (*Varia*, p. 136), Fermat indique la date de 1629 comme celle d'une première rédaction de sa méthode *de maximis et minimis :*

« Vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagnet vous a donnée, vous avez vu la mienne que je lui baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux. »

A la date de sa lettre précitée, Fermat est en pleine possession de sa méthode, et l'applique à l'invention des tangentes, des centres de gravité et à la cubature de solides de révolution. Il a enfin carré l'aire des paraboles de divers degrés.

Ainsi, à trente-cinq ans, Fermat (né en août 1601) a déjà fait ses découvertes fondamentales, en dehors de celles qui se rapportent à la théorie des nombres. Pour préciser plus exactement la date de ces découvertes, les données manquent actuellement. En tout cas, il ne semble pas y avoir de preuves qu'il ait communiqué quelque écrit mathématique important avant cette date de 1629, où il remit également à Despagnet une copie de son deuxième Livre des *Lieux plans d'Apollonius* (1).

Pour la théorie des nombres, il est au contraire permis d'indiquer le moment où Fermat y faisait ses premiers pas encore incertains, et c'est précisément à cet âge de trente-cinq ans.

Dans une lettre à Mersenne du 2 septembre 1636 (*Varia*, p. 123), il dit :

---

175). Bachet avait d'ailleurs eu connaissance de cet auteur en manuscrit, et il lui a fait d'importants emprunts (DIOPHANTE, *De multang. numeris*, p. 15, 20, 27).

(1) Lettre à Roberval, du 20 avril 1637 (*Varia*, p. 153, 154). — Le premier Livre des *Lieux plans* ne paraîtrait, d'après cette lettre, avoir été terminé que longtemps après et envoyé à Paris (Carcavi), qu'au commencement de 1637. Il y a là une petite difficulté; il ne faut pas s'arrêter à la citation des *Varia* (Préface), d'après laquelle Hérigone aurait affirmé, en 1634, avoir vu, aussi bien que la méthode *de maximis et minimis*, de Fermat, les *deux* Livres des *Lieux plans*, ainsi que l'*Isagoge ad locos planos et solidos*. La date est erronée : le *Cursus mathematicus* d'Hérigone est de 1643-1644.

Mais l'extrait du *Journal des savants*, du 9 février 1665, constate que l'*Isagoge*, qui contient la théorie générale des courbes du second degré, a été vue « devant que M. Descartes eût rien publié à ce sujet », c'est-à-dire avant 1637. Or, à la fin de l'*Isagoge*, Fermat (*Varia*, p. 8) dit qu'il a restitué depuis longtemps les *deux* Livres des *lieux plans*, que ses nouvelles recherches permettraient de rendre beaucoup plus « élégants »; néanmoins il ne regrette pas d'avoir rendu publie ce travail « précoce, non mûri et encore informe ».

» Qu'un nombre composé de trois carrés seulement en nombres entiers ne puisse jamais être divisé en deux carrés, non pas même en fractions, personne ne l'a jamais encore démontré, et c'est à quoi je travaille, et crois que j'en viendrai à bout; cette connoissance est de grandissime usage, et il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout. M. de Beaugrand est en cela de mon avis. »

Dans sa lettre à Roberval du 16 septembre 1636 (*Varia*, p. 134-136), Fermat lui pose un problème qui revient à démontrer que $\sqrt{2(a^2+b^2+ab)}$ est incommensurable, si a et b sont rationnels, ou encore que l'équation

$$x^2-2y^2=3z^2$$

est impossible en nombres entiers. Il « avoue franchement » n'avoir pas encore su trouver la démonstration, quoiqu'il soit assuré que la proposition est vraie.

Le 22 septembre 1636 (*Varia*, p. 137), il annonce avoir trouvé la démonstration.

« Elle m'a donné grandissime peine, et ne se présente pas d'abord. »

Nous allons voir que les pas de géant que Fermat devait faire dans cette nouvelle carrière ne tardèrent pas à le mener au bout.

V.

Dans une lettre à Mersenne, du 27 juillet 1638, Descartes énonce comme théorème de M. de Sainte-Croix la proposition sur la composition en polygones d'un nombre entier. Il est précisément singulier que dans la « relation des nouvelles découvertes en la science des nombres » (*Henry*, p. 213), envoyée par Fermat à Carcavi, le géomètre toulousain cite cette lettre pour rappeler que Descartes « confesse qu'il la juge (cette proposition) si difficile, qu'il ne voit point de voie pour la résoudre », et ne revendique pas en même temps la gloire de l'invention de l'énoncé. Mais il se l'attribue nettement dans l'observation sur Diophante : *Nos primi deteximus*.

Henry (p. 22) la donne sans plus à Sainte-Croix. Cette conclusion est évidemment inadmissible : la lettre de Descartes peut

seulement prouver que Sainte-Croix a proposé la question sans en indiquer le véritable auteur, et l'on doit inférer dès lors qu'elle a été préalablement posée à Sainte-Croix par Fermat vers 1637.

Or la lettre où il l'a ainsi posée existe, à la vérité sans date. C'est la première des lettres inédites à Mersenne que renferment les manuscrits d'Arbogast (¹).

Nous devons remarquer avant tout que cette lettre est en réalité destinée à Sainte-Croix et, d'un autre côté, que Fermat y déclare, comme dans la lettre à Roberval du 4 novembre 1636, avoir sommé les puissances semblables quelconques de termes en progression arithmétique, qu'il donne de même, comme exemple, la même formule pour les puissances quatrièmes et la progression naturelle des nombres, ainsi que l'énoncé de la proposition des nombres figurés. La date probable de cette lettre à Mersenne (1637) se trouve corroborée par ce rapprochement.

Avec la proposition sur les nombres polygones, dont Fermat se dit d'ailleurs en mesure de donner la démonstration, mais en demandant à ce qu'on ne l'y oblige pas (²), s'en trouve une autre : *Que tout nombre de la forme* $8n-1$ *est composé de quatre carrés seulement, soit en entiers, soit en fractions.*

Cet énoncé prouve suffisamment que Fermat avait triomphé des difficultés qu'il signalait à Mersenne dans sa lettre du 2 septembre 1636 pour un théorème analogue.

Mais ce qu'il y a de plus important pour l'objet de notre étude, c'est que la lettre inédite à laquelle nous attribuons provisoirement (³) la date de 1637 renferme aussi des problèmes proposés à Sainte-Croix, notamment :

(¹) Le texte m'en a été communiqué par M. Éd. Lucas, à la disposition duquel le prince Boncompagni a mis les copies d'Arbogast pour l'édition de Fermat en préparation. Libri en a indiqué le commencement : *Reverende pater, quamvis id agam ut pro Œdipo damnum restituam.* Le texte d'Arbogast porte très nettement *damnum*, mais il faut certainement lire *Davum*. « Quoique j'aie à faire, non l'Œdipe, mais le Dave. » C'est une allusion à un passage bien connu de l'*Andrienne* de Térence : *Davus sum, non Œdipus*, c'est-à-dire : Je ne devine pas l'énigme.

(²) *Nos propositionem generalissimam et pulcherrimam, primi, nisi fallor, deteximus et pro jure synallagmatis admitti, nescio an jure, postulamus.*

(³) Une détermination plus précise ne sera possible qu'après un examen attentif des autres lettres inédites.

Trouver deux cubes dont la somme soit un cube ou deux bicarrés dont la somme soit un bicarré.

Trouver un triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré, problème dont Fermat établit l'impossibilité (*Diophante*, p. 338-339). Il se ramène à trouver deux quatrièmes puissances dont la différence soit carrée.

Trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit un carré, question qui se ramène au même problème impossible.

Voilà donc déjà ces énigmes insolubles que Fermat proposera encore vingt ans plus tard, en 1657, à Wallis et à Brouncker, et qui n'apparaissent pas dans sa correspondance intermédiaire, au moins celle qui est connue, comme s'il n'eût plus jugé, pendant ce temps, aucun géomètre digne de recevoir un pareil défi de sa part.

V.

M. Ch. Henry dit (p. 23) que l'énoncé général de la proposition négative sur l'équation $x^n + y^n = z^n$ est sûrement postérieur à l'année 1657, date de l'un de ses cas particuliers, et représente une des dernières conceptions de Fermat. Il ignorait la lettre inédite dont je viens de parler, et dès lors son opinion tombe d'elle-même. Eu égard à la puissance de généralisation singulière qui est le caractère marquant de Fermat, on ne peut douter que la conception de l'énoncé complet n'ait été très voisine de celle des cas particuliers où n est 3 ou 4. A quelle date a-t-il trouvé ou cru trouver la démonstration générale? A cet égard on n'a aucune indication ; cependant il est bien à présumer que ce fut de très bonne heure.

La précieuse « relation » déjà citée « des nouvelles découvertes en la science des nombres » (*Henry*, p. 213-216) marque les principaux stades de la carrière parcourue par Fermat dans un domaine encore inexploré. Mais, avant de les indiquer sommairement pour l'objet qui nous occupe, il n'est pas hors de propos de remonter à l'origine première des recherches de Fermat sur cette matière.

Dès 1636 (lettre du 2 septembre à Mersenne), Fermat connaît à fond Diophante; mais ce n'est point cette étude qui l'engage dans

la nouvelle voie : ce sont les travaux de Frenicle, dirigés dans un tout autre sens, qui excitent son émulation. Il répond d'abord aux communications de Mersenne par des lettres (*Varia*, p. 173 et 176)[1] où il parle, d'une part, d'inventions qu'il a faites, il y a déjà longtemps, sur les carrés magiques, et de découvertes, qui semblent beaucoup plus récentes, relatives à l'invention des nombres parfaits[2]. Il ne fait, dit-il, que commencer.

Cependant, à cette date, il avait déjà dû s'occuper des problèmes sur les nombres dans un rapport donné avec la somme de leurs parties aliquotes et des nombres amiables, questions dont, le 25 juin 1636 (*Varia*, p. 123), il a envoyé la solution à Beaugrand, « déjà depuis longtemps » [3]. Mais quelques voisins que soient ces problèmes de celui des nombres parfaits, la méthode qu'il employait ne paraît pas avoir dépassé les ressources ordinaires de l'Algèbre.

Nous avons précisé, d'après la lettre de Mersenne du 2 septembre 1636, l'époque où Fermat cherchait, sans posséder encore de méthode, à démontrer les propositions négatives sur la composition des nombres en carrés. Il semble bien, d'après cette lettre, que ce soit au moins autant la correspondance de Mersenne que l'étude de Diophante qui l'ait invité à traiter ces questions.

Ce furent, d'après la « relation », les premières dont il s'occupa et pour lesquelles il inventa sa méthode particulière de réduction à l'impossible.

Le second stade est formé par les propositions affirmatives sur la composition des nombres en carrés : Fermat avoue que, pour y

---

(1) M. [illegible] *Henry* (p. [illegible]) attribue avec raison à ces lettres la date de la fin de [illegible] ou du commencement de [illegible]. Elles ne peuvent guère remonter plus haut, car Fermat dit, dans la seconde, qu'il y a plus de dix ans qu'il a découvert sa méthode pour les carrés magiques, et, d'après la première, il a dû la faire sur le livre des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet. [illegible]

(2) C'est sans aucun doute sur cette question des nombres parfaits que Fermat a découvert le théorème qui porte son nom. Cette question semble, au reste, avoir [illegible] Fermat, [illegible] Mersenne a [illegible] les résultats dans un [illegible] [illegible]

(3) [illegible]

appliquer sa méthode, il se trouva en belle peine; il y parvint néanmoins « à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il y fallut joindre par nécessité ».

Le couronnement de ces propositions est le théorème sur la composition d'un nombre en polygones. La date que nous avons assignée à cette découverte montre avec quelle rapidité Fermat mena ses travaux (¹).

De ce stade fait partie l'étude de l'équation

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

proposée bien plus tard à Wallis, mais dès lors à Frenicle.

Puis vient une nouvelle série de propositions négatives qu'ouvre l'impossibilité de partager un cube en deux cubes (déjà connue dans la lettre inédite de 1637) et où figure la fausse proposition que $2^{2^n} + 1$ est premier. La pièce datée la plus ancienne où cette dernière proposition se rencontre est du 18 octobre 1640 (*Varia*, p. 162), mais elle doit aussi, quant à sa conception, remonter à une date antérieure; car elle figure comme probable dans le fragment sur les nombres premiers à Frenicle (*Henry*, p. 192), et ce fragment doit avoir fait partie des propositions signalées à Roberval dans la lettre non datée des *Varia*, p. 161, lettre qui est du commencement de 1637.

C'est seulement après avoir « couru toutes ces questions » que Fermat a passé à l'étude approfondie des procédés et des problèmes de Diophante, qu'il a annoté. La dernière question dont il parle comme l'occupant encore sans qu'il ait pu trouver aucune solution est précisément celle que soulève la dernière proposition de Diophante (*Livre des nombres polygones*).

« *Étant donné un nombre, trouver de combien de manières*

(¹) M. *Ch. Henry* (p. 26) rejette à la date de 1657, à cause de sa ressemblance avec une lettre à Digby de juin 1658, la lettre à Roberval non datée des *Varia*, p. 161. Cette opinion est insoutenable, quand on y voit Fermat dire qu'il n'a rien trouvé en nombres qui lui ait tant plu que la démonstration de la proposition négative, qu'un nombre sans facteur carré, divisible par un nombre premier de la forme $4n - 1$, n'est ni carré ni composé de deux carrés.

Je pense que cette lettre ne peut être placée qu'entre celle à Roberval, du 16 décembre 1636, et celle des *Varia*, p. 151, à laquelle Roberval répondit le 4 avril 1637.

ce nombre peut être polygone », en suite de quoi il faudra chercher : « *Trouver un nombre qui soit polygone autant de fois et non plus qu'on voudra, et trouver le plus petit de ceux qui satisfont à la question.* »

Or cette dernière question [1] est proposée à Frenicle en 1641 (*Varia*, p. 167). Il semble donc ressortir de cet exposé que de trente-cinq à quarante ans Fermat avait à très peu près achevé tous ses travaux importants dans la théorie des nombres et que notamment la conception et la démonstration, suffisante ou non, de l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$ en nombres entiers, si n est entier et plus grand que 2, sont relativement voisines du début de cette période.

VI.

La « relation » qui vient de nous servir était un extrait, fait pour Huygens par Carcavi, d'un écrit probablement envoyé par Fermat à ce dernier. Fermat y parle de Wallis : cet écrit date donc des derniers temps de sa vie. On peut, ce semble, le rattacher à la lettre à Carcavi du 9 août 1659 (*Pascal*, p. 408), où il propose de s'entendre avec Pascal pour rédiger et publier ses Traités.

---

[1] Pour la question précédente, Fermat dit que le texte de Diophante est corrompu et que l'on ne peut deviner sa méthode. Celle de Bachet ne lui agrée pas : il en a bien trouvé une meilleure, mais elle ne le satisfait pas encore.

Il me semble certain que le texte grec où ce problème est abordé n'appartient pas à Diophante, qui a limité l'objet de son Livre sans l'y comprendre. C'est une addition malencontreuse dont l'auteur n'a pu aboutir à démontrer un procédé dont il ne connaissait sans doute que l'énoncé. Après une étude attentive de ce texte, je crois avoir retrouvé ce procédé, incontestablement supérieur à celui de Bachet, et qui, sans doute, n'a pas dû échapper à Fermat.

Soit P^n_m le polygone de n angles et de côté m, on a

$$2(P^n_m - 1) = (m-1)[m(n-2)+2].$$

On formera donc le nombre $A = 2(P^n_m - 1)$ et on le décomposera en facteur xy de toutes les manières possibles.

Toutes les fois que l'on aura un couple

$$xy = A,$$

tel que $y = z(x+1)+2$, en nombres entiers, le nombre $\frac{A}{2}+1$ sera polygone de $z+2$ angles et de côté $x+1$.

Cependant il doit être quelque peu antérieur à cette lettre, puisqu'il dit encore (*Henry*, p. 214) : « Je serai bien aise que les Pascal et les Roberval la cherchent (ma méthode) sur mon indication. »

Je ferai ici une remarque incidente ; cette lettre à Carcavi parle de deux Traités, le second, seul relatif à la théorie des nombres, « n'est encore qu'en idée » et Fermat n'aurait pas « le loisir de le coucher au long sur le papier ». L'autre Traité n'est pas autrement désigné, mais il est à supposer qu'il était beaucoup plus avancé et d'ailleurs relatif à la Géométrie. Il est à croire que c'est celui qui fut imprimé en 1660 à Toulouse, sans nom d'auteur, à la suite de l'Ouvrage du P. Lalouère sur la cycloïde. Ce Traité « *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* » (*Varia*, p. 89) fut évidemment rédigé à l'occasion de la découverte de la rectification de la cycloïde, donnée par Wren lorsque Pascal proposa ses problèmes « sur la roulette », et il est tout naturel de penser que Fermat eût bien préféré le voir publier à côté des Traités de Dettonville plutôt qu'à côté de ceux d'un géomètre aussi médiocre que Lalouère.

Ce Traité de Fermat, qui renferme la rectification de la parabole $y^3 = px^2$, est un de ses plus importants; mais sa méthode d'invention, bien antérieure, n'a pas subi de perfectionnements notables.

Pour en revenir à la théorie des nombres, la lettre précitée à Carcavi établit nettement que Fermat n'avait pas encore rédigé les découvertes qu'il avait faites vingt ans plus tôt, et qu'il renonçait, pour ainsi dire, désormais à les rédiger seul. Son ouverture à Pascal n'ayant pas abouti et sa santé ayant bientôt sensiblement décliné, il est à peu près certain qu'il n'a jamais rien rédigé sur cette matière. C'est la conclusion à laquelle est arrivé M. Ch. Henry, qui connaissait d'ailleurs mon opinion à ce sujet, mais il y ajoute à tort (p. 33), je crois l'avoir établi : « Nous savons que des théorèmes importants ont occupé les dernières années de la vie de Fermat. »

L'époque de cette vie où le merveilleux génie d'invention du géomètre toulousain est dans toute sa plénitude d'activité peut se marquer de 1636 à 1641, entre trente-cinq et quarante ans. Après cette date, il ne poursuit guère que des applications parti-

culières des méthodes générales et des théorèmes fondamentaux qu'il a découverts; ou bien il s'use sur des problèmes de détail, comme ses *Porismes* de Géométrie, sans plus rencontrer désormais d'idée rénovatrice et féconde.

Sa correspondance mathématique subit d'ailleurs un ralentissement singulier de 1643 à 1654, période pendant laquelle on ne connaît qu'une seule lettre datée de lui (à Carcavi, du 16 août 1650): c'est l'envoi de « sa méthode générale pour le débrouillement des asymétries », c'est-à-dire évidemment les deux petits Traités des *Varia* (p. 58-61). Mais il possédait cette méthode depuis 1638 au moins (lettre à Mersenne, du 16 décembre, *Henry*, p. 178). Quelque cause inconnue avait-elle interrompu ses travaux, ou bien, s'il restait fidèle à l'amitié qui l'unissait particulièrement à Carcavi, avait-il désormais *trouvé le tuf* chez tous ses correspondants antérieurs et dédaignait-il de les provoquer à de nouveaux efforts?

On le croirait, à le voir rentrer dans la lice, dès qu'entre en scène Blaise Pascal, et plus tard quand paraissent les mathématiciens anglais; mais, nous l'avons vu, c'est toujours avec les mêmes armes qu'autrefois, sauf en ce qui concerne les problèmes de probabilité, sujet nouveau.

Cependant, même sur ce point, si l'on étudie sa méthode fondée sur les propriétés des combinaisons et si l'on réfléchit à la date de sa découverte relative à la formation des coefficients du binôme, on peut se demander s'il n'avait pas, depuis bien longtemps déjà, remarqué ses propriétés.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TAIT (P.-G.). — TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES QUATERNIONS, traduit sur la seconde édition anglaise, avec Additions de l'auteur et Notes du traducteur, par G. PLARR. — PREMIÈRE PARTIE : *Théorie.* — *Applications géométriques.* 1 vol. in-8°. Paris, 1882.

La seconde édition du *Traité* de M. Tait a été analysée dans le *Bulletin* (1re Partie, t. VI, p. 151); nous n'avons qu'à signaler la traduction française que M. Gauthier-Villars vient d'éditer, en indiquant la nature des additions faites par l'auteur et le traducteur.

M. Plarr a traduit le texte de M. Tait littéralement : c'est une marque de respect envers l'auteur; il y a toutefois introduit, entre accolades, diverses Notes qui éclaircissent et complètent un certain nombre de passages. Quant aux articles nouveaux, dus à M. Tait, en voici l'énumération :

Le n° 269 *bis*, relatif au mouvement d'une droite dont trois points décrivent trois plans fixes ; cette addition fait partie du Volume qui vient de paraître ;

Le n° 378 *bis*, traitant, à l'aide de la méthode des Quaternions, la question de Cinématique qui a conduit Minding au théorème portant son nom (*Journal de Crelle,* t. 14 et 15);

Le n° 446, reproduisant un Mémoire de l'auteur intitulé : *Notes sur les expressions diverses par lesquelles on peut représenter la force exercée par un élément de courant linéaire sur l'élément d'un autre courant de même genre.*

Quelques perfectionnements dans la méthode d'intégration des équations qui dépendent de l'opérateur quaternionique ∇, au Chapitre XI.

Enfin les énoncés d'un certain nombre de propositions ajoutées aux questions à résoudre qui se trouvent annexées au Chapitre XI.

POINCARÉ. — THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS (1).

M. Mittag-Leffler, l'éminent professeur à l'Université de Stockholm, dont les travaux sur la théorie des fonctions ont eu, dans ces dernières années, un si grand retentissement, vient de fonder sous ce titre : *Acta mathematica*, un journal dont le premier fascicule (2) contient, comme premier article, un Mémoire de M. Poincaré sur la théorie des groupes fuchsiens.

Nous avons eu souvent à signaler, dans le *Bulletin*, les importants résultats obtenus par M. Poincaré; il eût été bien regrettable que l'auteur se fût borné aux communications succinctes éparses dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* la brève analyse de l'ensemble de ses découvertes qu'il a publiée dans le XIXe Volume des *Mathematische Annalen* ne pouvait qu'augmenter le désir qu'on avait de lui voir enfin publier une suite de Mémoires développés où les détails nécessaires et les démonstrations complètes eussent leur place. Le premier de ces Mémoires, consacré à la théorie des groupes fuchsiens, est aujourd'hui publié, et il y a tout lieu de croire qu'il sera suivi de plusieurs autres, présentant le même développement. Une analyse détaillée de ce Mémoire ferait nécessairement double emploi avec les pu-

---

(1) *Acta mathematica*, t. I, p. 1-66.

(2) Les *Acta mathematica* sont édités à Stockholm, chez MM. Beija; le dépositaire à Paris est M. Hermann, 8, rue de la Sorbonne; le format est in-4°; le premier fascicule, qui a paru à la fin de l'année 1882, comprend 96 pages, et contient, outre le travail de M. Poincaré, des Mémoires de MM. Malmsten, Gyldén et Reye qui seront analysés ultérieurement. La rédaction est composée de MM. Bäcklund, Bang, Gyldén, Holmgren, Malmsten, Mittag-Leffler, Bjerknes, Broch, Lie, Sylow, Lorenz, Petersen, Zeuthen, Lindelöf. La publication est dédiée à S. M. Oscar II, qui l'a largement subventionnée; plusieurs associations et divers savants, parmi lesquels nous devons citer M. Hermite, ont, en outre, contribué à la fondation. Nous relevons le passage suivant de la Préface :

« L'époque à laquelle nous commençons notre publication est certainement une des plus fécondes dans l'histoire des Mathématiques, par le grand nombre et l'importance des découvertes qui touchent aux principes les plus essentiels de l'Analyse. On sait combien, en divers pays, ce mouvement a été puissamment secondé par des journaux mathématiques qui contiennent les œuvres des plus grands géomètres de notre temps. Nous nous sommes proposé le même but de servir la Science en faisant connaître et associant les recherches nouvelles qui concourent à ses progrès par la nouveauté des résultats ou l'originalité des méthodes. »

blications antérieures de M. Poincaré; nous devons nous borner à renvoyer le lecteur au travail original en indiquant brièvement les matières qui y sont contenues.

L'auteur considère des substitutions de la forme $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, où a, b, c, d sont des nombres réels assujettis à la condition

$$ad - bc = 1,$$

appliquées à la variable imaginaire z; une telle substitution change une figure plane quelconque en une autre figure plane qui est dite *congruente* à la première.

Soit maintenant une infinité de substitutions de cette nature :

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, \infty$$
$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0;$$

ces substitutions formeront un *groupe* si l'inverse de chaque substitution et le produit de deux substitutions quelconques du système donne encore une substitution du système; on suppose que toutes ces substitutions puissent être obtenues par la combinaison d'un nombre fini de substitutions du groupe, dites *fondamentales*, et que, en outre, le groupe soit *discontinu*, c'est-à-dire qu'il ne contienne aucune substitution qui change z en une quantité $\frac{az+b}{cz+d}$ qui diffère infiniment peu de z; un groupe qui jouit de ces propriétés est dit groupe *fuchsien*. M. Poincaré montre que définir un groupe fuchsien revient à définir la décomposition du plan (ou d'une portion du plan) en une sorte de *damier* composé d'une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ qui répondent aux diverses substitutions du groupe, en sorte que, quand z parcourt la région R_0, le point correspondant $\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ parcourt la région R_0; ainsi les diverses permutations du groupe permuteront en quelque sorte les régions R, les bases du damier, sans en altérer l'ensemble. Ces régions peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés en entier au-dessus de l'axe X des quantités réelles et ayant des côtés de deux sortes : 1° des arcs de cercle ayant leur centre sur l'axe X; 2° des segments de cet axe. Les substitutions *fondamentales* changent le polygone R_0 en un polygone *limitrophe*,

c'est-à-dire ayant un côté commun avec R_0; le groupe fuchsien est évidemment donné quand ces substitutions fondamentales sont elles-mêmes données. Les sommets du polygone R_0, ou les extrémités des arcs de cercle qui le composent, sont de trois sortes: 1° les sommets situés au-dessus de l'axe X; 2° les sommets situés sur l'axe X et séparant deux côtés de la première espèce; 3° les sommets situés sur l'axe X et séparant deux côtés de différentes sortes. Chaque substitution fondamentale changeant R_0 en un polygone limitrophe change un côté (ab) de la première sorte de ce polygone en un côté (cd), de première sorte aussi, du même polygone; les deux côtés congruents (ab), (cd) sont dits conjugués; pour qu'il existe une substitution du type considéré qui change ainsi (ab) en (cd), il faut et il suffit qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{a-a'}{a-b'} : \frac{b-a'}{b-b'} = \frac{c-c'}{c-d'} : \frac{d-c'}{d-d'},$$

a', b', c', d' étant les quantités conjuguées de a, b, c, d; d'ailleurs cette substitution est déterminée; ainsi les sommets de côtés de première sorte sont en nombre pair et se décomposent en couples de côtés conjugués. Deux points intérieurs à R_0 ne peuvent être correspondants, tandis que, comme on vient de le dire, un point situé sur un côté de première sorte admet toujours un point correspondant sur le côté conjugué; relativement aux sommets, il peut arriver que deux ou plusieurs sommets se correspondent; l'ensemble des sommets qui se correspondent constitue un cycle. L'auteur donne une règle pour former les cycles et les décompose en trois catégories; en particulier les cycles de la première catégorie sont composés de sommets de la première sorte; la considération de ces diverses catégories de cycles permet de classer les polygones R_0. Ces définitions posées, on peut dire que le nœud du Mémoire de M. Poincaré se trouve dans la proposition capitale que voici : « Un groupe fuchsien, s'il existe, peut être regardé comme engendré par la considération d'un polygone R_0, formé d'arcs de cercle et de segments de droite comme il a été expliqué plus haut; chaque substitution fondamentale du groupe étant fournie par la substitution qui change un côté de ce polygone en son conjugué; ces deux côtés conjugués doivent être congruents; en d'autres termes, la relation (1) doit être vérifiée; en outre, la somme des angles d'un

même cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de 2π; réciproquement, si le polygone R_0 satisfait à ces deux conditions; il donne *effectivement* naissance à un groupe fuchsien. »

L'auteur développe divers exemples. Il indique, en outre, une classification des groupes fuchsiens en *genres*.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES;

PAR M. J. MOLK.

M. Kronecker vient de communiquer à l'Académie des Sciences un Mémoire *Sur les unités complexes* (*Comptes rendus*, 8, 15, 22 janvier 1883). Les recherches de Lejeune-Dirichlet y sont développées et présentées sous un jour tout nouveau. Mais M. Kronecker ne se contente pas de démontrer le théorème énoncé par Lejeune-Dirichlet, en 1846; il approfondit les recherches auxiliaires faites par le grand géomètre en 1842, et parvient ainsi à la notion importante de réduction approximative des équations algébriques.

On peut, cependant, se proposer d'obtenir directement les résultats concernant les unités complexes seulement. Ils se déduisent d'un théorème fondamental énoncé à la fin du n° 9 du Mémoire cité; il suffit donc de démontrer ce théorème. En se plaçant à ce point de vue les recherches se simplifient beaucoup. On abandonne, il est vrai, le point de vue général auquel M. Kronecker s'est placé et l'on perd ainsi l'uniformité des développements qui fait ressortir l'esprit même des méthodes employées; mais le mécanisme des formules est par contre moins compliqué.

Je me propose d'exposer le plus simplement possible la démonstration abrégée de M. Kronecker.

Soient

$$z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

les n racines d'une équation irréductible, à coefficients réels et entiers;

$$z', \quad z'', \quad \ldots, \quad z^{(n)}$$

un système fondamental d'une *espèce* de nombres algébriques entiers du genre z, par exemple z^{n-1}, z^{n-2}, ..., z, 1; et

$$u_\alpha + v_\alpha i = (w, z_\alpha) = w' z'_\alpha + w'' z''_\alpha + \ldots + w^{(n)} z^{(n)}_\alpha$$

une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers de z'_α, z''_α, ..., $z^{(n)}_\alpha$. Supposons que l'équation ait $2\varkappa$ racines imaginaires et posons $h = n - \varkappa$.

Il peut se présenter trois cas. L'équation peut n'avoir aucune racine réelle, ou une seule, ou au moins deux.

Dans ce dernier cas, z_{n-1} et z_n étant deux racines réelles, on peut exprimer les nombres $w^{(k)}$ en fonctions linéaires et homogènes de deux d'entre eux et des u_α, v_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$, les coefficients étant des fonctions rationnelles réelles des x_α et y_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Nous pouvons donc écrire

$$w^{(k)} = \xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \rho^{(k)} \qquad (k = 3, 4, \ldots, n)$$

en désignant par $\rho^{(k)}$ des fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ quantités u_α et v_α, dont les coefficients sont fonctions rationnelles réelles des x_α et y_α. Mais, quelles que soient les valeurs que nous donnions à w' et w'', nous pourrons toujours prendre pour $w^{(k)}$ le nombre entier le plus rapproché de $\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w''$; nous pouvons donc supposer que chaque $\rho^{(k)}$ est en valeur absolue au plus égal à $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, en remplaçant $w^{(k)}$ par l'expression précédente, nous obtenons

$$(w, z_n) = w' z'_n + w'' z''_n + \sum_{k=3}^{n} (\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \rho^{(k)}) z_n^{(k)}.$$

Si nous supposons que w' et w'' prennent toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., t, nous obtenons $(t+1)^2$ expressions (w, z_n), toutes plus petites, en valeur absolue, que $At + B$, où

$$A = \left| z'_n + \sum_{k=3}^{n} \xi_1^{(k)} z_n^{(k)} \right| + \left| z''_n + \sum_{k=3}^{n} \xi_2^{(k)} z_n^{(k)} \right|, \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} |z_n^{(k)}|.$$

Nous partageons l'intervalle compris entre $-(\mathrm{A}t+\mathrm{B})$ et $\mathrm{A}t+\mathrm{B}$ en t^2 parties égales. Il y aura alors nécessairement une de ces parties contenant les valeurs de deux au moins des expressions (w, z_n); désignons ces dernières par (w_0, z_n) et (w_1, z_n) et formons leur différence,

$$(b, z_n) = b'z'_n + b''z''_n + \ldots + b^{(n)}z_n^{(n)};$$

$|(b, z_n)|$ est plus petit que $\dfrac{2(\mathrm{A}t+\mathrm{B})}{t^2}$;

$$b^{(k)} = w_0^{(k)} - w_1^{(k)} = \xi_1^{(k)}b' + \xi_2^{(k)}b'' + \sigma^{(k)};$$

$|b'|$ et $|b''|$ ne dépassent pas $2t$ et $\sigma^{(k)}$ étant la différence de deux $\rho^{(k)}$ ne dépasse pas l'unité.

Mais $|(b, z_{n-1})|$ est plus petit que $2(\mathrm{A}'t+\mathrm{B}')$, où A' et B' sont formés à l'aide de z_{n-1} de la même manière que A et B à l'aide de z_n. Nous obtenons donc l'inégalité

$$|(b, z_{n-1})(b, z_n)| < \frac{4(\mathrm{A}t+\mathrm{B})(\mathrm{A}'t+\mathrm{B}')}{t^2} < 4\mathrm{AA}'+1$$

pour des t suffisamment grands.

D'autre part, les quantités $\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n-2)}$ étant comprises entre (-1) et $(+1)$, nous savons que les valeurs de $(n-2)$ fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ parties réelles et imaginaires de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, sont comprises entre des limites finies, indépendantes de t; il en résulte que les valeurs de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$ sont elles-mêmes comprises entre des limites finies. Comme nous avons déjà démontré que le produit $|(b, z_{n-1})(b, z_n)|$ est plus petit que $4\mathrm{AA}'+1$, nous voyons donc que la norme de (b, z) est également plus petite qu'un nombre indépendant de t.

Remarquons que, parmi les $(n-2)$ expressions (b, z_1), $(b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, $(h-2)$ seulement sont différentes en valeur absolue.

Après avoir trouvé un système $b'_1, b''_1, \ldots, b_1^{(n)}$, pour lequel $(b_1, z_n)| < \dfrac{2(\mathrm{A}t_1+\mathrm{B})}{t_1^2}$, nous pouvons en former un second b'_2, $b''_2, \ldots, b_2^{(n)}$, pour lequel $|(b_2, z_n)|$ est plus petit que $\dfrac{2(\mathrm{A}t_2+\mathrm{B})}{t_2^2}$; en choisissant t_2 assez grand, $|(b_2, z_n)|$ sera plus petit que $|(b_1, z_n)|$,

et par suite les deux systèmes $b'_1, b''_1, \ldots, b_1^n$ et $b'_2, b''_2, \ldots, b_2^n$ seront différents.

Il existe donc une infinité de nombres complexes (b, z) *dont la norme et* $(h - 2)$ *conjugués en valeur absolue sont compris entre des limites finies.*

Dans les deux premiers cas, il suffit de modifier légèrement la démonstration pour parvenir au même résultat. Si l'équation n'a qu'*une* racine réelle z_n, et si z_{n-1} et z_{n-2} sont imaginaires conjuguées, nous prendrons, dans les formules précédentes, α égal à $1, 2, \ldots, (n-3)$; nous exprimerons ensuite les $w^{(k)}$ en fonction de *trois* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi une expression (b, z_n) ne dépassant pas, en valeur absolue, $\frac{2(At+B)}{t^2}$, tandis que le produit $(b, z_{n-1})(b, z_{n-2})$ est proportionnel à t^2. Si enfin toutes les racines de l'équation sont imaginaires et si z_n, z_{n-1} sont conjuguées, ainsi que z_{n-2}, z_{n-3}, nous prendrons, dans les formules précédentes, α égal à $1, 2, \ldots, n-4$, nous exprimerons les $w^{(k)}$ en fonction de *quatre* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi $|(b, z_n)(b, z_{n-1})| < \frac{4(At+B)^2}{t^4}$ et $(b, z_{n-2})(b, z_{n-3})$ proportionnel à t^2. Dans ces deux cas, nous voyons donc que $|(b, z_n)(b, z_{n-1})|$ et les $(h-2)$ premières expressions différentes $|(b, z_\alpha)|$ sont comprises entre des limites finies.

Le théorème précédent est ainsi complètement démontré. On en déduit immédiatement qu'il existe une infinité de nombres complexes ayant même norme et congrus entre eux suivant cette norme; en formant le quotient de deux de ces nombres, nous obtenons des unités complexes dont $(h-2)$ conjuguées en valeur absolue sont comprises entre des limites déterminées par celles des (b, z_n).

Il existe donc dans chaque espèce de nombres algébriques un nombre infini d'unités ayant chacune en valeur absolue toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. M. FALK.

Monsieur,

Voici une démonstration élémentaire et, je l'espère, rigoureuse du théorème fameux de votre illustre Cauchy, laquelle j'ose soumettre à votre critique bienveillante.

De la définition ordinaire

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n-1} f\left(\alpha + \lambda\,\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\frac{\beta-\alpha}{n},$$

où α, β, t sont réelles, mais $f(t)$ est supposée complexe, on déduit sans peine le théorème :

THÉORÈME I. — *Si α et β sont finies et que $f(t)$ soit uniforme et continue, depuis $t=\alpha$ jusqu'à $t=\beta$, l'intégrale définie $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ a une valeur finie et parfaitement déterminée.*

On a, de plus, le théorème connu : *Si, dans une certaine partie du plan des coordonnées (ρ, t), $f(\rho, t)$ est fonction uniforme et continue des deux variables indépendantes ρ et t, et que la courbe décrite par le point mobile (ρ, t), pour une certaine valeur donnée de ρ, quand t varie de $t=\alpha$ à $t=\beta$, soit située tout entière dans l'intérieur de cette partie du plan, on peut, après avoir choisi à volonté une quantité positive σ, trouver une autre quantité positive δ, telle que, pour toutes les valeurs de t entre $t=\alpha$ et $t=\beta$,*

$$[f(\rho+h,t)-f(\rho,t)] \leqq \sigma \quad \textit{pour} \quad (h) \leqq \delta.$$

En s'appuyant sur ce théorème, on démontre très aisément le théorème :

THÉORÈME II. — *Si $f(\rho, t)$ et $\frac{\partial f(\rho,t)}{\partial\rho}$ sont fonctions uniformes et continues des deux variables réelles ρ et t, dans l'intérieur d'une certaine partie du plan des coordonnées (ρ, t), et que la courbe décrite par le point mobile (ρ, t) pour une certaine va-*

leur de ρ, t allant de $t=\alpha$ à $t=\beta$, soit tout entière située dans l'intérieur de cette partie du plan, on a

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\alpha^\beta f(\rho,t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(\rho,t)}{\partial\rho}\,dt,$$

pourvu que α et β soient indépendants de ρ.

Soit maintenant z une variable complexe et $F(z)$ une fonction qui, dans une certaine partie du plan à contour *simple*, est uniforme, continue et douée d'une dérivée. Si, de plus,

$$z = \varphi(t) + \rho\,\psi(t),$$

φ et ψ étant deux fonctions complexes uniformes et continues de la variable *réelle* t, pour chaque valeur donnée de ρ depuis $\rho=0$ jusqu'à $\rho=1$, représente une courbe située tout entière dans l'intérieur de la partie du plan et joignant les deux points fixes $z=z_0$ et $z=z_1$, déterminés par $t=\alpha$ et $t=\beta$, on doit avoir

$$\psi(\alpha)=\psi(\beta)=0.$$

On démontre maintenant très simplement le théorème fondamental :

Théorème III. — *Lorsqu'une fonction $F(z)$ est uniforme, continue et douée d'une dérivée dans une partie du plan à contour simple, les intégrales définies $\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz$ relatives aux différentes lignes qui vont d'un point z_0 à un autre point z_1 dans cette partie du plan, sont égales.*

En effet, soient $z=\varphi(t)$ et $z=\varphi(t)+\psi(t)$ deux quelconques de ces courbes et supposons d'abord que $F'(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ soient continues. Posons maintenant dans l'intégrale définie

$$z = \varphi(t) + \rho\psi(t),$$

ce qui donne

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = \int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)(\varphi'+\rho\psi')\,dt.$$

En vertu du théorème II, nous avons ici

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = \int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi'\,dt + \int_\alpha^\beta F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi')\,dt.$$

Mais de l'identité évidente

$$\frac{d}{dt}[F(\varphi+\rho\psi)\psi] = F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi') + F(\varphi+\rho\psi)\psi',$$

il suit

$$\int_\alpha^\beta F'(\varphi+\rho\psi)\psi(\varphi'+\rho\psi')\,dt = I_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi - \int_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi)\psi' dt;$$

donc nous avons

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz = I_\alpha^\beta F(\varphi+\rho\psi) = 0,$$

à cause de $\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0$.

L'intégrale est par suite indépendante de la valeur de ρ, ce qu'il fallait bien prouver. On étend maintenant très facilement la démonstration au cas où $F'(z)$ est discontinue et les courbes le long desquelles on prend l'intégrale sont brisées en un nombre fini quelconque de points. Le reste de la démonstration du théorème de Cauchy se fait comme à l'ordinaire.

SUR LA THÉORIE DES RÉSIDUS BIQUADRATIQUES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

Vous savez que, dans son second Mémoire, Gauss a déterminé le caractère biquadratique du nombre $1+i$ par rapport à un nombre premier M, ou, d'après Jacobi, la valeur du symbole $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$. Cette détermination se fonde sur le théorème de l'art. 71, théorème analogue à celui qui sert de fondement à la troisième et à la cinquième des démonstrations de Gauss, de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques.

Or j'ai remarqué qu'on peut obtenir la valeur de $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$ à l'aide de raisonnements complètement analogues à ceux que Gauss développe dans son *premier* Mémoire, pour obtenir le caractère du nombre 2 dans la théorie réelle.

Il suffira de considérer le cas

$$M = a + bi, \quad a \equiv 1 \pmod 4,$$
$$b \equiv 0, \quad \mu = aa + bb = 8n + 1.$$

D'après la valeur du symbole $\left(\left(\frac{k}{M}\right)\right)$, on peut diviser les $\mu - 1$ nombres incongrus k, non divisibles par M, en quatre classes, savoir :

(A) $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1,$

(B) $\beta, \beta', \beta'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i,$

(C) $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1,$

(D) $\delta, \delta', \delta'' \ldots : \quad \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i.$

Alors, il est évident qu'on a identiquement

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i \pmod{M},$$

d'où l'on tire, en posant $x = -1$,

$$(1 + \delta)(1 + \delta')(1 + \delta'')\ldots \equiv 1 + i \pmod{M};$$

ce qui fait voir qu'il suffira de savoir combien des nombres $1 + \delta, 1 + \delta', 1 + \delta'', \ldots$ appartiennent aux classes (A), (B), (C), (D).

Si l'on désigne maintenant par

(S) $\begin{cases} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{cases}$

combien des nombres

$$1 + \alpha, \; 1 + \alpha', \; 1 + \alpha'', \ldots,$$
$$1 + \beta, \; 1 + \beta', \; 1 + \beta'', \ldots,$$
$$1 + \gamma, \; 1 + \gamma', \; 1 + \gamma'', \ldots,$$
$$1 + \delta, \; 1 + \delta', \; 1 + \delta'' \ldots$$

appartiennent à (A), (B), (C), (D), on pourra déterminer les valeurs de tous ces nombres (i, k) à l'aide des considérations employées par Gauss dans son *premier* Mémoire.

Dans le cas actuel, on trouve que le tableau (S) a la forme suivante :

$$\begin{array}{llll} k & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{array} \qquad \begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5, \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1, \\ 8k &= 4n + a - 1, \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned} \qquad \left(n = \frac{aa + bb - 1}{8}\right).$$

On a maintenant

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{3m+3j} = i^{-m-j} \qquad \left(-m - j = -n + \tfrac{1}{4} b\right).$$

Or (mod. 4),

$$\frac{a^2 - 1}{8} = \frac{-a+1}{4},$$
$$\frac{b^2}{8} = \pm \tfrac{1}{2} b;$$

donc

$$n = \tfrac{1}{4}(-a + 1 + 2b),$$
$$-m - j = \tfrac{1}{4}(a - 1 - b).$$

Enfin

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}.$$

Les autres cas peuvent se traiter d'une manière analogue.

La même méthode réussit pour déterminer le caractère cubique de $1 - \rho$, et encore pour trouver les théorèmes sur le nombre 2 dans la théorie des résidus quadratiques. Dans ce dernier cas, après avoir déterminé les nombres (i, k), il n'est pas nécessaire de recourir à ces congruences identiques, comme plus haut celle-ci :

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'' \ldots \equiv x^{\frac{p-1}{4}} + i \qquad (\text{mod. } M).$$

Mais on arrive au but par une considération arithmétique, qui ne diffère pas de celle que Gauss a employée dans son premier Mémoire pour le nombre 2, dans la théorie des résidus biquadratiques. On a, de cette manière, une démonstration assez simple et purement arithmétique de ces théorèmes :

$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = +1, \quad p = 8n \pm 1,$$
$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = -1, \quad p = 8n \pm 3.$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HOÜEL.

Vous m'avez fait l'honneur d'insérer dans le *Bulletin* (t. II, 1re série) votre traduction de mes études sur la convergence des séries. Dès lors, grâce à votre amabilité, ces études ont attiré l'attention des savants, et M. Korkine a eu l'occasion de donner une autre démonstration de mon théorème (*Bulletin,* t. II, 2e série, extrait d'une Lettre à M. Hermite).

Aujourd'hui je me propose de présenter quelques additions propres à compléter mes recherches antérieures. A la fin de ces recherches, je disais que la règle que j'avais donnée ne comportait pas de séries exceptionnelles; néanmoins je tâcherai d'en présenter aujourd'hui quelques-unes, dont la convergence ne saurait être prouvée par mon critérium et bien moins encore par les règles connues jusqu'à présent. En même temps j'ai l'intention de présenter une autre preuve de mon théorème.

Soit ψx une fonction ayant une seule valeur pour toutes les valeurs réelles et positives comprises entre les limites b et ∞ de la variable x. Supposons que cette fonction croisse infiniment avec x et satisfasse à l'inégalité $\psi x < x$. Faisons $\psi b = a$, désignons par $\psi^k x$ une fonction qui indique que l'opération représentée par le symbole ψ doit être effectuée k fois sur la variable x. Soit ξ le plus grand entier positif satisfaisant à l'inégalité $\psi^\xi x \geqq b$. Cet entier croîtra indéfiniment avec x. Il est aisé de voir que

$$\varphi x = \frac{\psi^\xi x}{b-a} + \xi$$

est une fonction (1) croissant continuellement entre les limites b et ∞, et satisfait à l'équation

$$\varphi\psi x = \varphi x - 1. \tag{1}$$

---

(1) La dérivée de cette fonction

$$\varphi' x = \frac{1}{b-a}\psi' x . \psi'\psi x . \psi'\psi^2 x \ldots \psi'\psi^{\xi-1} x$$

n'est pas continue en général; mais pour x croissant elle décroît constamment si l'on a $\psi' b \leqq 1$, ce que l'on peut toujours supposer; c'est la seule condition pour que notre démonstration soit juste.

Comme l'intégrale

$$\int_b^x \varphi' x\, dx = \varphi x - a$$

croît indéfiniment avec x, la série

(2) $$\varphi'(n) + \varphi'(n+1) + \varphi'(n+2) + \ldots$$

sera divergente. Comparons maintenant une série quelconque

(3) $$f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots$$

à la série précédente et désignons par Px le rapport de leurs termes généraux

$$Px = \frac{fx}{\varphi' x}.$$

Si avec la croissance de x la limite de ce rapport n'est pas égale à zéro, la série (3) est divergente. Supposons que Px croisse avec x, alors

$$\lim \frac{Px}{P\psi x} \geqq 1;$$

mais il est aisé de voir que

$$\frac{Px}{P\psi x} = \frac{fx}{\psi' x . f\psi x}.$$

De cette manière nous arrivons à la conclusion suivante :

Si avec la croissance de x la limite du rapport

$$\frac{fx}{\psi' x . f\psi x}$$

est plus grande que l'unité, la série (3) *est divergente.*

Afin de découvrir maintenant le critérium de la convergence, soit α un nombre positif quelconque et examinons l'intégrale

$$\int_b^x (\varphi x)^{-1-\alpha} \varphi' x\, dx = \frac{a^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\varphi x)^{-\alpha},$$

qui avec la croissance de x tend vers une limite finie, d'où il résulte que la série

(4) $$\frac{\varphi'(n)}{[\varphi(n)]^{1+\alpha}} + \frac{\varphi'(n+1)}{[\varphi(n+1)]^{1+\alpha}} + \ldots$$

est convergente. Comparons la série (3) à cette dernière série et

désignons par Qx le rapport de leurs termes généraux

$$Qx = \frac{fx(\varphi x)^{1+\varepsilon}}{\varphi' x}.$$

Si ce rapport ne croît pas indéfiniment avec x, la série (3) est convergente. Supposons que Qx décroît, et, par suite,

$$\lim \frac{Qx}{Q\psi x} \leqq 1;$$

mais il est aisé de voir que

$$\frac{Qx}{Q\psi x} = \frac{fx}{\psi' x f\psi x}\left(\frac{\varphi x}{\varphi x - 1}\right)^{1+\varepsilon}.$$

De cette manière nous arrivons à la conclusion suivante :

Si avec la croissance de x la limite du rapport

$$\frac{fx}{\psi' x . f\psi x}$$

est moindre que l'unité, la série (3) *est convergente.*

Dans mes recherches antérieures on démontrait que $\psi x = \log x$ donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Si dans les séries (2) et (4) nous posons $\psi x = \log x$, la première de ces séries diverge et la seconde converge très lentement. Or, ce sont là ces espèces de séries dont la convergence ne peut être démontrée par aucune des règles connues jusqu'à présent et qui, d'après la règle de convergence, que j'ai donnée, se présentent comme cas douteux. On peut trouver des séries qui croissent ou décroissent encore plus lentement : on n'aurait qu'à introduire dans l'analyse de nouvelles fonctions, dont la formation, ainsi que M. Korkine l'a démontré, fût en liaison avec l'équation fonctionnelle (1). M. Korkine, dans sa lettre à M. Hermite mentionnée plus haut, résout l'équation (1) et les questions qui s'y rapportent, par la décomposition des fonctions en séries. L'artifice dont je me suis servi ici, pour résoudre l'équation (1), ne peut s'appliquer qu'à certaines fonctions et à la valeur réelle et déterminée de la variable x. V. ERMAKOF.

LISTE DES TRAVAUX SUR LES SYSTÈMES ARTICULÉS;

Par V. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

Cette Liste, destinée à faciliter l'étude de l'une des plus intéressantes questions de la Cinématique, contient une énumération assez complète, je crois, non seulement des nombreux travaux suggérés par la célèbre découverte de M. Peaucellier, mais aussi des recherches antérieures relatives au parallélogramme de Watt et à d'autres systèmes analogues servant à produire, au moyen de tiges articulées, un mouvement rectiligne approximatif.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma vive reconnaissance à M. le général Peaucellier et à M. le professeur Mannheim, pour les indications importantes qu'ils ont bien voulu me donner sur plusieurs parties du sujet.

1796.

1. *Prony* (*G.*). — Nouvelle Architecture hydraulique. (T. II, p. 123 et suiv.).

1823.

2. *Prony* (*G.*). — Sur le parallélogramme du balancier de la machine à feu. (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XIX. — *Annales des Mines*, 1re série, t. XII).

1838.

3. *Vincent* (*A.*). — Essai d'une théorie du parallélogramme de Watt. (Lille).

1853.

4. *Carbonnelle.* — Sur la théorie géométrique du parallélogramme de Watt. (*Bulletin de l'Acad. de Belgique*).

5. *Tchebychef* (*P.*). — Théorie des mécanismes connus sous le nom de *parallélogrammes* (*Mémoires des Savants*

étrangers présentés à l'Acad. de Saint-Pétersbourg, t. VII).

6. *Sarrut.* — Note sur la transformation des mouvements rectilignes alternatifs en mouvements circulaires, et réciproquement. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. XXXVI, p. 1036-1038).

7. *Poncelet.* — Rapport sur une transformation nouvelle des mouvements rectilignes alternatifs en mouvements circulaires, et réciproquement, par Sarrut. (*Ibid.*, p. 1125-1127).

1861.

8. *Tchebychef* (*P.*), — Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt. (*Bullet. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. IV, p. 433-438).

1864.

9. *Peaucellier* (*A.*). — Lettre au rédacteur des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. (*Nouv. Annal. de Math.*, 2e série, t. III, p. 414-415).

1867.

10. *(1) *Mannheim* (*A.*). — Communications sur le compas composé de M. Peaucellier. (*Bullet. de la Société philomathique de Paris: procès-verbaux des séances des 20 et 27 juillet 1867*, p. 124-126).

1868.

11. *Peaucellier* (*A.*) *et Wagner.* — Mémoire sur un appareil diastimométrique nouveau, dit appareil autoréducteur, (note XIV). (*Mémorial de l'Officier du génie*, n° XVIII, p. 351).

---

(1) On a marqué par un astérisque certaines Communications qui ont été faites dans diverses Sociétés savantes, mais qui ne figurent, dans les publications de ces Sociétés, que par leurs titres. Toutes les fois qu'une pareille Communication a été analysée dans un autre Recueil, j'ai eu soin d'y renvoyer le lecteur.

12. *Чебышевъ* (*П*). — Объ одномъ механизмѣ. Записки Акад. наукъ. т. XIV, стр. 38-46. [*Tchebychef* (*P.*) — Sur un mécanisme. (*Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. XIV, p. 38-46)].

1869.

13. *Roberts* (*S.*). — On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. II, p. 125-136).

14. *Чебышевъ* (*П*). — О параллелограммахъ. Труды 2-го Съѣзда Русск. Естествоиспытателей, ч. I. [*Tchebychef* (*P.*) — Sur les parallélogrammes. (*Travaux du 2e Congrès des Naturalistes russes*, t. I)].

1870.

15. *Cayley* (*A.*). — On the mechanical description of a nodal bicircular quartic. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. III, p. 100-106).

1871.

16. *Lipkine* (*L.*). — Ueber eine genaue Gelenk-Geradführung. (*Bullet. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, p. 57-60. — *Der Naturforscher*, an. 1871, p. 179).

17. *Lipkine* (*L.*). — Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne. (*Revue univers. des Mines et de la Métallurgie de Liège*, t. XXX, 4e livraison, p. 149-150).

1872.

18. *Cayley* (*A.*). — On the mechanical description of certain sextic curves. (*Proc. of the London Math. Soc.*, t. IV, p. 105-111).

19. *Cayley* (*A.*). — On the mechanical description of a cubic curve. (*Ibid.*, p. 175-178).

20. *Kempe* (*A.-B.*). — On the solution of equations by mechanical means. (*The Messenger of Math.*, t. I, p. 51-52).

21. *Hagen*. — Die Geradführung von Lipkin. (*Deutsche Bauzeitung*, ann. 1872, p. 98).

1873.

22. *Peaucellier* (*A.*). — Note sur une question de Géométrie de compas. (*Nouv. Annal. de Math.*, 2ᵉ série, t. XII, p. 71-73).

23. *Peaucellier* (*A.*). — Note sur un balancier articulé à mouvement rectiligne. (*Journal de Physique*, publié par M. J. d'Almeida, t. II, p. 388-390).

24. *Lemoine* (*E.*). — Note sur le losange articulé du commandant du génie Peaucellier, destiné à remplacer le parallélogramme de Watt. (*Ibid.*, 130-134).

25. *Sylvester* (*J.-J.*). — Description of a new instrument for converting circular into general rectilinear motion and into motion in conics and higher plane curves. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. V, p. 4, 141).

1874.

26. *Sylvester* (*J.-J.*). — On recent discoveries in mechanical conversion of motion. Friday evening's discourse at the Royal Institution. (*January* 23rd).

27. *Sylvester* (*J.-J.*). — Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne. Lecture à l'Institution Royale de la Grande-Bretagne. (*Revue scientifique*, 2ᵉ série, t. IV, p. 490-498. — *Les Mondes*, 2ᵉ série, t. XXXVII, p. 623-635, 667-675).

28. *Sylvester* (*J.-J.*). — Des systèmes articulés; instrument réciprocateur du colonel Peaucellier; description des courbes et surfaces algébriques par le moyen de tiges articulées. [*Compte rendu de la* 3ᵉ *session de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (*Congrès de Lille*, p. 1156-1157). — Pour une analyse plus détaillée de cette Communication, voir la *Revue scientifique*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 640-641].

29. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 4231, solution by *G.-S. Carr*, *N'Importe*. (*Mathematical Questions from the Educational Times*, edited by W.-J.-C. Miller, t. XXI, p. 57-60).

30. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 4320, solution by G.-S. Carr, J. Wolstenholme. (*Ibid.*, p. 57, 111).

31 *Hart* (*H.*). — On certain conversions of motion. (*Messeng. of Math*, t. IV, p. 82-88, 116-120. — *Report of the 44 Meeting of the British Association for the advancement of Science,* Meeting of Belfast, p. 17-18).

32. *Kempe* (*A.-B.*) — On some new linkages. (*Messeng. of Math.*, t. IV, p. 121-124).

33. *Penrose* (*J.-C.*). — On a method of drawing, by continued motion, a very close approximation to the parabola, proposed with a view to its possible application to figuring reflectors. (*Monthly Notices of the Royal Astronom. Soc.,* t. XXXIV, p. 265-267).

34. *Ellis* (*J.-C.-W.*). — On some models of Peaucellier's and other parallel motion. (*Proceed. of the Cambridge Philosoph. Soc.,* t. II, p. 334-338).

35. **Hayden* (*W.*). — On approximate parallel motion. [*Report of the 44 Meeting of the Brit. Assoc. for the advanc. of Science* (Meeting of Belfast), p. 18]. (*Voir* le n° 64 de cette Liste.)

36. *Perigal* (*H.*). — Link Trammels. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. V, p. 25, 144).

37. *Peaucellier's* perfect parallel motion. (*Iron*, t. III, p. 259. — *American Artisan,* 3ᵉ series, t. V, p. 17).

38. *Wagner*. — Des méthodes de levers en usage dans la brigade topographique et de l'emploi d'un nouvel instrument (appareil homolographique de MM. Peaucellier et Wagner) destiné à substituer aux opérations habituelles des procédés purement mécaniques. (*Mémorial de l'Officier du génie*, n° XXIII).

39. **Mannheim* (*A.*). — Une construction, due à M. Hart, d'un appareil plus simple que celui de M. Peaucellier, pour obtenir le mouvement rectiligne d'un point au moyen de tiges articulées. (*Bullet. de la Soc. math. de France*, t. III, p. 17).

40. **Mannheim* (*A.*). — Construction de deux systèmes articulés décrivant une conique au moyen de sept tiges. (*Ibid.*).

41. **Mannheim* (*A.*). — Procédé pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre à l'aide d'un appareil à tiges articulées, semblable à celui de M. Peaucellier, en remplaçant le losange par un quadrilatère à côtés inégaux, mais à diagonales rectangulaires. (*Ibid.*). (Voir *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XIV, p. 542-543).

42. *Mannheim* (*A.*). — Deux lettres à M. Sylvester. (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. VI, p. 35-36).

43. *Saint-Loup*. — Résolution de l'équation du troisième degré à l'aide d'un système articulé. (*Comptes rendus de l'Acad.*, t. LXXIX, p. 1323-1324).

44. *Lemoine* (*E.*). — Le losange articulé du colonel Peaucellier. [*Compte rendu de la 3e session de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences* (*Congrès de Lille*), p. 122-125. — Voir aussi *Revue industr.*, numéro du 11 novembre 1874, et *Annales industr.*, n° du 21 juin 1874].

45. *Brüll* (*A.*). — Losange articulé destiné à remplacer le parallélogramme de Watt. (*Ann. industr.*, numéro du 21 juin 1874).

1875.

46. *Sylvester* (*J.-J.*). — On the expression of the curves generated by any given system whatever of linkwork under the form of an irreductible determinant. (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. VI, p. 78, 196-197).

47. *Sylvester* (*J.-J.*) — An orthogonal web. (*Ibid.*, p. 101, 197).

48. *Sylvester* (*J.-J.*) — The mode of construction of a new

sort of lady's fan. (*Ibid.*, p 78, 196. — *Voir* aussi *Math. Quest. from the Educ. Times*, t. XXXIII, quest. 5357, p. 97).

49. *Sylvester* (*J.-J.*). — On the representation of any unicursal curve and its nodes in terms of the parametric coefficients and on Robert's cases of unicursal three-bar motion. (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. VI, p. 37).

50. **Sylvester* (*J.-J.*) — On James Watt's parallel motion, (*Ibid.*, p. 139).

51. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 4591, solution by *E.-B. Elliot*. (*Math. Quest. from the Educ. Times*, t. XXIII, p. 43).

52. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 4637, solution by *E.-B. Elliot* and others. (*Ibid.*, p. 59-60).

53. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 4660, solution by *S.-A. Renshaw* and others. (*Ibid.*, p. 71-73).

54. *Cayley* (*A.*). — On the question of the mechanical description of a Cartesian. (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. VI, p. 83).

55. **Cayley* (*A.*). — On some figures of curves in three-bar motion. (*Ibid.*, p. 139).

56. *Hart* (*H.*). — On the mechanical description of a spheroconic. (*Ibid.*, p. 136-137).

57. *Hart* (*H.*). — A parallel motion. (*Ibid.*, p. 137-139).

58. *Darwin* (*G.-H.*). — A mechanical method of making a force which varies inversely as the square of the distance from a fixed point. (*Ibid.*, p. 113-114. — *Voir* aussi *Messeng. of Math.*, t. V, p. 13).

59. *Darwin* (*G.-H.*). — The mechanical description of equipotential lines. (*Proceed. of the London Math. Soc.*, t. VI, p. 115-117).

60. *Laverty* (*W.-H.*). — Extension of Peaucellier's theorem. (*Ibid.*, p. 84-85).

61. *Roberts* (*S.*). — On three-bar motion in plane space. (*Ibid.*, t. VII, p. 14-23).

62. *Kempe* (*A.-B.*). — On a general method of producing exact rectilinear motion by linkworks. (*Proceed. of the Royal Soc. of London*, t. XXIII, p. 565-577).

63. *Johnson* (*W.-W.*). — The Peaucellier machine and other linkages. (*The Analyst*, t. II, p. 41-45).

64. *Hayden* (*W.*). — Parallel motion. (*Iron*, t. V, p. 265. — *Rev. industr.*, juin 1875, p. 226. — *Polytechnisches Centralblatt*, Neue Folge, Jahrg. XXIX, p. 993-996).

65. *Peaucellier* (*A.*). — Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne à l'aide d'un système de cinq tiges. (*Revue scientif.*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 951-952).

66. *Peaucellier* (*A.*). — Note sur l'emploi des systèmes articulés à liaison complète en Géométrie, en Mécanique et dans les Sciences appliquées. (*Mémorial de l'Officier du génie*, nº XXV, p. 369-389).

67. Rapport à la suite duquel le prix de Mécanique de la fondation Montyon, pour l'année 1874, a été décerné par l'Académie des Sciences à M. Peaucellier. (Commissaires : MM. Morin, Rolland, Phillips, Tresca, de Saint-Venant, Resal, rapporteur). (*Comptes rendus de l'Acad.*, t. LXXX, p. 1469-1470. — *Mémor. de l'Offic. du génie*, nº XXV, p. 366-368).

68. *Lemoine* (*E.*). — Sur le losange articulé du colonel Peaucellier. (*Mémoires de la Soc. des ingén. civils*, an. 1875, p. 247).

69. *Lemoine* (*E.*). — Sur le système articulé à cinq tiges de M. Hart. (*Revue industr.*, numéro du 12 avril 1875).

70. *Bréguet* (*A.*). — Nouveaux systèmes de tiges articulées de MM. Hart et Kempe. (*Revue industr.*, numéro du 21 avril 1875, p. 132).

71. *Laisant* (*C.-A.*). — Note sur un compas trisecteur. [*Compte rendu de la 4e session de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences* (*Congrès de Nantes*), p. 161-163].

72. *Brocard* (*H.*). — Note sur un compas trisecteur, proposé par M. Laisant. (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. III, p. 47-48).

73. *Perrin*. — Note sur la division mécanique de l'angle. (*Ibid.*, t. IV, p. 85-87).

74. *Saint-Loup*. — Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications. (*Mémoires de la Soc. d'émul. du Doubs*).

75. *Prudhomme*. — Sur le losange articulé de M. Peaucellier. (*Bullet. de la Soc. industr. de Mulhouse*, nouv. série, t. XLV, p. 179. — *Polytechnisches Centralblatt*, Neue Folge, Jahrg. XXIX, p. 990-993).

76. *Liguine* (*V.*). — Sur les systèmes articulés à six tiges. [*Compte rendu de la 4e sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences* (*Congrès de Nantes*), p. 208-224].

77. *Liguine* (*V.*). — Sur les systèmes de tiges articulées. (*Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XIV, p. 529-561. — *Repertorium der rein. und angew. Mathematik*, herausg. von L. Königsberger und G. Zeuner, t. I, p. 95-101).

78. *Hoppe* (*R.*). — Ueber das Problem der Geradführung eines Punktes. (*Grunert's Archiv für Mathem.*, t. LVIII, p. 215).

79. *August* (*F.*). — Beweis des Peaucellier'schen Satzes. (*Ibid.*, p. 216).

80. *Schedlbauer*. — Die Geradführung von Peaucellier. (*Bayerisches Industrie- und Gewerbeblatt*, Neue Folge, Jahrgang VII, p. 90).

81. *Mayer*. — Ueber Sylvester's Parallelogramm. (*Der Maschinenbauer*, Jahrg. 10, p. 87. — *Zeitschr. des oester. Ingen.-Vereins*, Jahrg. XXVII, p. 302).

1876.

82. *Cayley* (*A.*). — Three-bar motion. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VII, p. 136-166).

83. *Kempe* (*A.-B.*). — On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork. (*Ibid.*, p. 213-216. — [Voir aussi *Messeng. of Math.*, t. VI, p. 143-144).

84. *Hart* (*H.*). — On the mechanical description of the limaçon and the parallel motion deduced therefrom. (*Messeng. of Math*, t. V, p. 35-39).

85. *Greenhill* (*A.-G.*). — Mechanical solution of a cubic by a quadrilateral linkage. (*Ibid.*, p. 162-163).

86. *Johnson* (*W.-W.*)— On three-bar motion. (*Ibid.*, p. 50-52).

87. *Johnson* (*W.-W.*). — Note on the kite-shaped quadrilateral. (*Ibid.*, p. 159-160).

88. *Johnson* (*W.-W.*). — Note on four-bar linkages. (*Ibid.*, p. 190-192).

89. *Johnson* (*W.-W.*). — Recent results in the study of linkages. (*The Analyst*, t. III, p. 42-46, 70-74).

90. *Wilson* (*J.*). — On parallel motions. (*Proceed. of the Royal Soc. of Edinburgh*, t. IX, p. 161-170).

91. *Hayden* (*W.*). On parallel motion. (*Report of the* 46 *Meeting of the Brit. Assoc. for the advanc. of Science*).

92. * *Tchebychef* (*P.*). — Nouveau mécanisme à mouvement parallèle. [*Compte rendu de la* 5e *sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences* (*Congrès de Clermont-Ferrant*), p. 140].

93. *Tchebychef.*—Geradführung. (*Dingler's Polytech. Journ.*, t. CCXX, p. 21).

94. *Mansion* (*P.*). — Les compas composés de Peaucellier, *Hart et Kempe*. (*Nouv. Corresp. math.*, t. II, p. 129-130).

95. *Brocard* (*H.*). — Sur la division mécanique de l'angle. (*Bullet. de la Soc. math. de France*, t. V, p. 43-47).

96. *De Roos* (*J.-D.-C.*). — Over stangenstelsels. (*Tijdskrift van het Koninklijk. Instituut van Ingenieurs*, an. 1875-76, p. 194).

97. *Kirsch*. — Zur Theorie der Geradführungen. (*Der Civilingenieur*, neue Folge, t. XXII, p. 321-336).

98. *Sylvester's* Differential Parallelogramm. (*Grothe's Allg. Polytechn. Zeitung*, Jahrg. IV, p. 5, 14).

99. *Fischer*. — Universal-Cirkelgeradführung (Sylvester's Geradführung). (*Zeitschrift des oester. Ingen.-Vereins*, Jahrg. XXVIII, p. 196).

1877.

100. **Hart* (*H.*). — The kinematic paradox. [*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VIII, p. 261. (Voir *Messeng. of Math.*, t. VII, p. 55, 189-190, et *The Nature*, t. XVI, p. 95)].

101. **Hart* (*H.*). — A Method of solving by linkwork $f(x) = 0$, an algebraical equation on the nth degree. [*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VIII, p. 261. (Voir *Messeng. of Math.*, t. VII, p. 56)].

102. **Hart* (*H.*). — Generalization of cases of five-bar motion considered at the April Meeting. [*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VIII, p. 261. (Voir *Messeng. of Math.*, t. VII, p. 56)].

103. *Hart* (*H.*). — On the Cassinian. (*Messeng. of Math.*, t. VI, p. 172).

104. *Hart* (*H.*). — On the production of circular and rectilinear motion. (*Ibid.*, t. VII, p. 56).

105. *Hart* (*H.*). — On some cases of parallel motion. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VIII, p. 286-289. — *Messeng. of Math.*, t. VII, p. 13).

106. *Kempe* (*A.-B.*). — How to draw a straight line. [*The Na-*

ture, t. XVI, p. 65-67, 86-89. — Tirage à part paru chez Macmillan and C°, London (*Nature Series*)].

107. *Kempe* (*A.-B.*). — Sur la production du mouvement rectiligne exact au moyen de tiges articulées. Trad. de l'anglais par V. Liguine. (*Nouv. Corresp. math.*, t. III, p. 129-139, 177-186).

108. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 5327, solution by *G.-S. Carr, J.-J. Sylvester*. (*Math. Quest. from the Educ. Times*, t. XXVIII, p. 24).

109. *Delahaye*. — Étude sur le losange articulé du colonel Peaucellier et sur les systèmes articulés à liaison complète. (*Bullet. de la Soc. industr. de Rouen*).

110. *Zeuthen* (*H.-G.*). — Nogle Exempler paa leddede Stangsystemer. (*Tidsskrift for Math., udgivet af Zeuthen*, ser. 4, t. I, p. 161-174).

111. *De Roos* (*J.-D.-C.*). — Eenige mededeelingen en opmerkingen over stangenstelsels. (*Tijdskrift van het Koninklijke Instituut van Ingenieurs*, an. 1876-77, p. 219. — *Rev. univ. des Mines*, 2e série, t. II, p. 1).

112. *Burmester* (*L.*). — Ueber die Geradführung durch das Kurbelgetriebe. (*Civilingenieur*, t. XXII, p. 597-606).

113. *Hülsenberg* (*A.*). — Beitrag zur Theorie des Universalcirkels von Peaucellier, mit besonderer Berücksichtigung seiner Anwendung als vollkommene Geradführung. (*Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, t. XXI, p. 7-16, 49-56).

114. *Rittershaus* (*T.*). — Zur Frage der Gelenk-Geradführung. (*Ibid.*, p. 218-226).

115. *M.-M.* — Priorität in Geradführungen. (*Dingler's Polyt. Journal*, t. CCXXVI, p. 209-210).

116. *Лигинъ* (*В.*).—О сложныхъ циркуляхъ и ихъ примѣненіи къ механическому рѣшенію уравненій. Записки Математ. Отдѣленія Новор. Общества Естествоиспытателей, т. III.

[*Liguine* (*V.*). — Sur les compas composés et leurs applications à la résolution des équations. (*Mém. de la Soc. des Naturalistes d'Odessa, section des Sciences math.*, t. III)].

117. *Лигинъ* (*В.*). — Замѣтка о способѣ Кемпе для механическаго рѣшенія уравненій. Записки Новорос. Университета, т. XXII, стр. 149-156. [*Liguine* (*V.*) — Note sur la méthode de M. Kempe pour résoudre mécaniquement les équations. (*Mém. de l'Université d'Odessa,* t. XXII, p. 149-156)].

1878.

118. **Kempe* (*A.-B.*). — On a property of the four-piece linkage and on curious locus in linkages. (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. IX, p. 75).

119. *Kempe* (*A.-B.*). — On conjugate four-piece linkages. (*Ibid.*, p. 133-147).

120. *Clifford* (*W.-K.*). — On the triple generation of three-bar curves. (*Ibid.*, p. 27-28).

121. **Perigal* (*H.*). — On a kinematic paradox. (the Rotameter. (*Ibid.*, t. X, p. 28).

122. *Kennedy* (*A.*). — Notes on the geometric solution of some statical problems connected with mechanisms (linkworks). (*Ibid.* t. IX, p. 221-225. — Voir aussi *Messeng. of Math.*, t. VIII, p. 27).

123. *Tchebychef* (*P.*). — Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe. [*Compte rendu de la 7e sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences* (*Congrès de Paris*), p. 159-163)].

124. *Чебышевъ* (*П*). — О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметрическихъ около одной оси. Записки Ак. наукъ, т. XXXIV, приложеніе 3. [*Tchebychef* (*P.*). — Sur les parallélogrammes composés de trois éléments et symétriques autour d'un axe. (*Mém. de*

l'Acad. des Sciences de Saint-Pétersbourg, t. XXXIV, suppl. 3)].

125. *Чебышевъ* (*П*). — О простѣйшихъ сочлененіяхъ. Матем. Сборникъ, издав. Московск. Матем. Обществ., т. IX, стр. 340-351. [*Tchebychef* (*P.*). — Sur les systèmes articulés les plus simples. (*Bull. de la Soc. math. de Moscou*)].

126. *Léauté* (*H.*). — Sur les systèmes articulés. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, t. LXXXVII, p. 151-154).

127. *Thiebaut* (*G.*). — Note sur le système articulé de M. Peaucellier. (*Nouv. Ann. de Math.*, 2ᵉ série, t. XVII, p. 258-261).

128. *Lawrence* (*E.-J.*). — Conic constructions. (*Math. Quest. from the Educ. Times*, t. XXIX, p. 74).

129. *Moncourt*. — Question 5696, solution by *J.-J. Walker*. (*Ibid.*, t. XXX, p. 28-29).

130. *De Roos* (*J.-D.-C.*). — Jets over de gekoppelde krukbeweging. (*Nieuw Archief voor wiskunde*, t. IV, p. 125-150).

131. *Maiss* (*J.*). — Aehnlichkeiten einiger gebräuchlicher Geradführungen auf kinematischer Grundlage. (*Zeitschr. des Ver. deutsch. Ingen.*, t. XXII, p. 334-336).

132. *Жуковскій* (*Н.*). — Описаніе прибора Кемпе для рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Труды Политехническаго Общества при Московскомъ Техническомъ Училищѣ, выпускъ 1. [*Joukofsky* (*N.*). — Description d'un appareil de M. Kempe pour résoudre les équations de degrés supérieurs. (*Trav. de la Soc. polytechn. de Moscou*, livrais. 1)].

1879.

133. *Darboux* (*G.*). — De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. (*Bullet. des Scienc. math. et astrom*, 2ᵉ série, t. III, p. 109-208. — *Comptes*

rendus de l'Acad. des Sciences, t. LXXXVIII, p. 1183-1185, 1252-1255).

134. *Darboux* (*G.*). — Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart. (*Bull. des Sciences math. et astronom.*, 2e série, t. III, p. 144-151).

135. *Darboux* (*G.*). — Recherches sur un système articulé. (*Ibid.*, p. 151-192).

136. *Darboux* (*G.*) — Présentation d'appareils pour le tracé des lignes droites et des ovales de Cassini. [*Compte rendu de la* 8e *sess. de l'Assoc. franç. pour l'avanc. des Scienc.* (*Congrès de Montpellier*), p. 128)].

137. *Darboux* (*G.*). — Appareils divers de Peaucellier, Hart et Kempe. (*Ibid.*, p. 376-377).

138. *Marcks* (*W.-D.*). — Peaucellier's compound Compass and other linkages. (*Journ. of the Franklin Instit.*, t. CVII, n° 6).

139. *Чебышевъ* (*П*).— О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ какихъ-либо элементовъ. Записки Акад. наукъ, т. XXXVI, прилож. 3. [*Tchebychef* (*P.*). — Sur les parallélogrammes composés de trois éléments quelconques. (*Mém. de l'Acad. des Sciences de Saint-Pétersb.*, t. XXXVI, suppl. 3)].

140. *Kempe* (*A-B.*). — A property of a linkage. (*Proceed.* of the Lond. Math. Soc.*, t. XI, p. 45).

141. *De Roos* (*J.-D.-C.*). — Linkages : the different forms and uses of articulated links. New-York, Van-Nostrand.

142. *Ramisch* (*A.*). — Die allgemeine Construction von Geradführungen (*Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses*, Jahrg. LVIII, p. 511-513).

1880.

143. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 5357, solution by *Curran-Sharp*. (*Math. Quest. from the Educ. Times*, t. XXXIII, p. 97).

144. *Sylvester* (*J.-J.*). — Question 6339, solution by *S. Roberts.* (*Ibid.*, t. XXXIV, p. 46-47).

145. *Genese* (*R.-W.*). — Question ...., solution by *G. Hebbel* and others. (*Ibid.*, p. 102).

146. *Saint-Germain* (*A. de*). — Sur le parallélogramme de Watt. (*Journ. des Math. pures et appliquées*, 3e série, t. VI, p. 19-26).

1881.

147. *Gagarine* (Prince *A.*). — Systèmes articulés assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, t. XCIII, p. 711).

148. *Гагаринъ* (Кн. *А.*). — О нѣкоторыхъ сочлененіяхъ. С.-Петербургъ. [*Gagarine* (Prince *A.*)]. — Sur quelques systèmes articulés. Saint-Pétersbourg].

149. *D'Ocagne* (*M.*). — Note sur le système articulé du colonel Peaucellier. (*Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XX, p. 456-459].

1882.

150. *Гагаринъ* (Кн. *А.*). — Круговая линейка и прямолинейное движеніе прямой. Журналъ русск. физико-химическ. Общества, т. XIV. стр. 52-57. [*Gagarine* (Prince *A.*). — La règle circulaire et le mouvement rectiligne d'une droite. (*Journ. de la Soc. de Physique et de Chimie de Saint-Pétersbourg*, t. XIV, p. 52-57)].

151. *Liguine* (*V.*). — Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe. (*Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. I, p. 153-163).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GRUEY. — Le stréphoscope universel. — 32 p. in-8°; Paris. 1882.

On sait que M. Gruey s'est particulièrement occupé des instruments gyroscopiques : il a adressé, sur ce sujet, de nombreuses et intéressantes Notes à l'Académie des Sciences, et il a réuni les résultats de ses recherches dans sa *Théorie mathématique du gyroscope*. Il a récemment fait construire un petit nombre de pièces qui, combinées convenablement, permettent de réaliser divers instruments gyroscopiques; les pièces, numérotées de 0 à 20, sont contenues dans une boîte très portative : elles ont été construites par M. Collin ([1]). Dans la brochure descriptive qui accompagne cette boîte, M. Gruey explique comment on peut, et cela très facilement, monter les appareils suivants : toupie de Foucault, balance de Fessel et Plücker, pendule polygonal de M. Gruey, tourniquet alternatif à poids de M. Gruey, tourniquet alternatif à tension de M. Gruey, pendule de M. Sire, pendule conique alternatif de M. Gruey, appareil de Bohnenberger, polytrope de M. Sire, culbuteur de Hardy, culbuteur continu de M. Gruey, pendule culbuteur de M. Gruey, appareil à rotations périmétriques de M. Sire.

SCHMIDT (A.). — Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen, insbesondere derjenigen 4. Ordnung. Inaugural-Dissertation. — In-8°, 48 p.; 1882.

Les recherches de M. Schmidt concernent principalement la *détermination* d'une transformation de Cremona : l'auteur donne d'abord (p. 3-17) quelques propositions relatives au nombre d'équations que peuvent fournir, pour une telle détermination, les *données* les plus simples (points fondamentaux,

---

([1]) 118, rue Montmartre, à Paris.

couples de points correspondants, etc...), ainsi qu'à la dépendance que ces données peuvent avoir entre elles. Le reste de son travail (p. 18-48) est consacré aux transformations du quatrième ordre pour lesquelles il existe dans chacun des deux plans six points fondamentaux, dont trois sont doubles et trois sont simples : ces transformations se présentent, comme on sait, de la façon la plus simple en combinant deux transformations quadratiques. M. Schmidt établit les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux groupes de six points puissent être considérés comme constituant les points fondamentaux d'une transformation du quatrième ordre de la classe considérée ; ces conditions sont données sous forme de relations entre les rapports anharmoniques des faisceaux de droites obtenus en joignant un des points à quatre autres ; quatre de ces relations sont indépendantes entre elles, les autres en résultent ; en les supposant vérifiées, les équations de la transformation se présentent sous forme d'équations entre des rapports anharmoniques analogues aux précédents, mais où figurent quatre points fondamentaux et un point variable ; la transformation est ainsi déterminée d'une façon univoque par dix points fondamentaux indépendants ; par exemple, par tous les points fondamentaux d'un plan et quatre points fondamentaux quelconques de l'autre, par cinq couples de points fondamentaux correspondants, par tous les points fondamentaux sauf un point fondamental simple dans chaque plan. La transformation peut aussi être déterminée d'une façon univoque par neuf points fondamentaux indépendants et deux points fondamentaux dépendants.

Enfin M. Schmidt discute, au point de vue de la réalité, la nature des points fondamentaux dans le cas où la transformation biquadratique est telle que, à chaque point réel de l'un des plans corresponde un point réel de l'autre, et traite de la transformation du troisième ordre regardée comme une transformation biquadratique dégénérée.

HÖLDER (O.). — BEITRAEGE ZUR POTENTIALTHEORIE. — In-8°, 71 p. Stuttgart; 1882.

L'auteur de cette dissertation inaugurale reprend les éléments de la théorie du potentiel en se plaçant au point de vue que les recherches récentes sur les principes de la théorie des fonctions permettent aujourd'hui d'atteindre. On reconnaît de suite que M. Otto Hölder est familier avec l'emploi des méthodes rigoureuses, et, à coup sûr, la théorie du potentiel, où se présentent d'une façon nécessaire des exemples si remarquables de singularités, paraît exiger l'usage de telles méthodes. Au surplus, nous aurons à signaler, dans son travail, un résultat important relatif aux dérivées secondes du potentiel.

L'auteur considère d'abord le cas d'une masse occupant un volume; il rappelle la démonstration habituelle de la continuité du potentiel, et propose une démonstration nouvelle de l'existence et de la continuité des dérivées premières. Il me semble que les démonstrations relatives à ces premiers principes deviendraient plus naturelles en calculant préalablement, ce qui est facile, des limites supérieures de la valeur absolue du potentiel et de ses dérivées, le point attiré étant supposé en dehors de la masse attirante. Soit, par exemple, V le potentiel d'une masse occupant une portion finie d'espace E pour un point A de coordonnées x, y, z, extérieur à E; on trouve de suite que, en désignant par K la limite supérieure des valeurs absolues de la densité K, par D la limite supérieure de la distance de deux points de E, par R et R' les limites supérieure et inférieure de la distance du point A à un point de E, les valeurs absolues de $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \cdots$ sont respectivement inférieures à

$$4\pi KRD, \quad 4\pi KD, \quad 8\pi K \log\frac{R'}{R}, \quad 12\pi K \log\frac{R'}{R}, \quad \cdots.$$

D'ailleurs, dès que l'on a établi la signification de V et l'existence de $\frac{\partial V}{\partial x}$ pour un point A intérieur à E ou situé sur la surface limite, on reconnaît immédiatement que les premières inégalités, où R' ne figurait pas, subsistent, quelle que soit la position du point A.

L'emploi systématique de ces inégalités et de la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$$

rend ensuite les démonstrations aisées et naturelles. S'il s'agit par exemple de la continuité, en considérant deux points A, A', en les entourant par une petite sphère et en décomposant, comme on fait d'habitude, la masse attirante en deux parties, on trouve de suite que la valeur absolue de la différence $V(A')-V(A)$ des valeurs du potentiel en deux points A et A' est inférieure à $4\pi K\overline{AA'}(D+4\overline{AA'})$, et la continuité de la fonction V en chaque point de l'espace est ainsi établie, comme aussi la possibilité de décomposer tout l'espace en portions de dimensions assez petites pour que, dans chacune d'elles, la variation de V soit, en valeur absolue, inférieure à un nombre positif quelconque donné à l'avance. Sans doute cette possibilité se déduit de la continuité du potentiel en tout point de l'espace, en vertu d'une proposition générale de la théorie des fonctions; mais il est inutile d'invoquer ici cette proposition. L'existence et la continuité des dérivées premières s'établissent de la même façon; elles résultent essentiellement, quand on part des inégalités précédentes, de ce que l'expression $h\log\frac{R}{h}$ tend vers zéro avec h.

J'arrive maintenant aux dérivées d'ordre supérieur relatives aux points intérieurs à la masse attirante; on sait que Gauss, dans le Mémoire intitulé *Allgemeine Lehrsätze* (*Werke*, t. V), a établi d'un seul coup leur existence et leur continuité en mettant la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ sous la forme d'une somme de deux potentiels relatifs l'un à une masse distribuée sur la surface limite de l'espace E, l'autre à une masse distribuée dans l'espace E; dans ce second potentiel figurent les dérivées premières de la fonction K qui mesure en chaque point la densité de la masse donnée, dérivées dont, à la vérité, l'existence n'est nullement impliquée par l'existence des dérivées premières du potentiel; quoi qu'il en soit, l'existence des dérivées partielles du premier ordre de la fonction K étant supposée, l'existence et la continuité, pour les points situés à l'intérieur des dérivées partielles du second ordre du potentiel de E, résultent immédiatement de la formule de Gauss; la formule de

Poisson en est aussi une conséquence aisée; maintenant cette question se pose naturellement : l'existence des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \dots$ implique-t-elle l'existence des dérivées partielles du premier ordre de la densité?

M. Hölder fournit à cette question une réponse intéressante : il montre en effet que, si l'on peut trouver deux nombres positifs A et μ tels que la différence des valeurs de la densité en deux points de la masse attirante dont la distance est égale à r soit, en valeur absolue, inférieure à Ar^μ, les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ existent et sont continues, et l'équation de Poisson subsiste. Je modifie un peu, dans ce qui suit, la forme de la démonstration de M. Hölder, afin de rester dans le même cercle d'idées et d'abréger les explications qu'il me reste à donner.

Soient A, A' deux points situés à l'intérieur de E, sur une même parallèle à l'axe des x; décrivons du point A comme centre, avec 2AA' pour rayon, une sphère, que nous supposerons entièrement contenue dans E, et soit e la portion d'espace intérieure à cette sphère; soient φ, Ψ et ψ les dérivées partielles par rapport à x du potentiel V de la masse donnée et des potentiels partiels U et u, relatifs aux masses contenues dans les espaces $E - e$ et e; on aura identiquement

$$\frac{\varphi(A') - \varphi(A)}{AA'} = \frac{\Psi(A') - \Psi(A)}{AA'} + \frac{\psi(A') - \psi(A)}{AA'}.$$

Le premier terme du second membre est égal à la valeur de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ pour un point A_1 de AA' compris entre A et A'; or, il résulte facilement de l'hypothèse faite par l'auteur : 1° que la valeur de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ au point A tend vers une limite quand le rayon de la sphère e tend vers zéro; 2° que la différence entre les valeurs de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ aux points A et A_1 tend vers zéro quand A' tend vers A. Il suffit pour s'en convaincre d'évaluer une limite supérieure de $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$.

Quant au second terme $\frac{\Psi(A') - \Psi(A)}{AA'}$, les inégalités signalées plus haut fournissent immédiatement une limite supérieure de la valeur absolue de sa différence avec un terme tout semblable ob-

tenu en supposant que la densité dans tout l'espace e soit égale à la valeur k_0 de la densité au point A; cette différence tend vers zéro avec AA' et l'on voit ainsi, en se reportant à l'expression du potentiel d'une sphère homogène, que le terme considéré a pour limite $-\frac{4}{3}\pi k_0$. En résumé, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{4\pi}{3} k_0.$$

L'équation de Poisson est une conséquence immédiate de cette formule, car les trois premiers termes qui figurent dans les expressions des trois dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ont une somme nulle.

M. Hölder s'occupe ensuite du potentiel d'une masse distribuée sur une surface : il traite avec détail de la notion d'aire et des propositions fondamentales relatives à la variation du potentiel et de ses dérivées premières quand le point attiré s'approche de la surface. Il convient de signaler particulièrement ses recherches sur la façon dont se comportent les dérivées premières du potentiel, quand le point attiré s'approche de la *courbe* qui limite la portion de surface considérée.

Enfin la dernière partie de son travail concerne le potentiel d'une masse sur elle-même; on trouvera là divers développements théoriques intéressants; je me contenterai de faire ressortir le point suivant : l'existence de l'intégrale

$$\int V k \, d\varepsilon,$$

étendue à tous les éléments $d\varepsilon$ d'une portion d'espace E, implique seulement que la fonction k, qui mesure la densité, soit apte à l'intégration. Or, la formule si importante

$$(1) \qquad 4\pi \int V k \, d\varepsilon = \int d\varepsilon \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right],$$

où le second membre est la limite de l'intégrale qui y figure explicitement, étendue à tous les éléments d'un volume dont la surface limite s'éloigne indéfiniment dans tous les sens, se déduit d'ordinaire du théorème de Green, en tenant compte de l'équation de Poisson; cette dernière équation suppose la continuité et même un certain mode de continuité de la fonction k; M. Hölder montre

que la relation (1) n'implique pas ces dernières restrictions, qu'elle subsiste en supposant seulement la fonction k finie et apte à l'intégration. Le procédé de démonstration consiste à établir la formule (1) pour une masse composée d'un assemblage de petits cubes homogènes, mais de densités différentes, et à en déduire la formule générale, en supposant que la densité pour chaque cube soit égale à la valeur de k en un point de ce cube. J. T.

ANTONIO FAVARO. — Galileo Galilei e lo studio di Padova. Firenze. Successori Le Monnier, 1883. 2 vol. in-8, xvi-469, xii-520.

HARTMANN GRISAR, S. J. — Galileistudien. Historisch-theologische Untersuchungen ueber die Urtheile der roemischen Congregationen im Galileiprocess. Regensburg, New-York u. Cincinnati. Friedrich Pastet, 1882. 8. xi-374.

L'Ouvrage de M. Favaro est un ensemble de recherches patientes et laborieuses, inspirées par l'amour de la vérité et exposées sans parti pris. L'auteur nous dit qu'une biographie de Galilée ainsi qu'une édition de ses œuvres lui paraissent, pour longtemps encore, irréalisables; toujours est-il que la première de ces tâches se trouve puissamment avancée par son travail. Le futur biographe de Galilée ne profitera pas seul de ce Livre, qui est aussi d'une grande valeur pour l'historien de l'Université de Padoue. M. Favaro s'est surtout efforcé de nous peindre le grand mathématicien dans son milieu, et le tableau de cette petite ville universitaire au XVII[e] siècle n'est pas la partie la moins intéressante de cette monographie.

Les sources, pour les premières années de la vie de Galilée, sont peu nombreuses; le plus souvent, nous sommes forcés de recourir aux récits de Gherardini et de Viviani. L'auteur examine leurs mérites respectifs, qu'il trouve à peu près égaux. Leurs récits ne méritent pas une confiance absolue, même dans les choses qu'ils disent avoir recueillies de la bouche même du maître; plusieurs fois nous sommes en état de prouver, par des documents, des inexactitudes sérieuses.

Galileo Galilei est né le 18 février 1564, à Pise. Sa pre-

mière éducation scientifique semble avoir été dirigée par son père; tout en s'occupant du commerce des tissus, Vincenzo Galilei avait eu le temps de devenir un musicien distingué et d'acquérir des connaissances sérieuses dans presque toutes les sciences. Il fut aidé, plus tard, par un maître du nom de Jacopo Borghini et par quelque moine de Santa-Maria de Vallombrosa. D'un document trouvé dans ce couvent, il résulterait que Galilée aurait non seulement demeuré quelque temps dans cette maison, mais qu'il aurait même été compté parmi ses novices. Cette circonstance, que nulle autre mention ne vient confirmer, M. Favaro ne l'accepte qu'avec la plus grande réserve.

Le 5 septembre 1581, Galilée est inscrit sur le registre de l'Université de Pise, où il commence par étudier la Médecine. C'est alors que sa vocation se déclare : il découvre l'isochronisme des oscillations pendulaires. Son esprit pratique lui fait songer tout de suite à une application de cette découverte à la Médecine; il construit une petite machine qui permet de mesurer la vitesse du battement du pouls, et qui, d'après M. Favaro, a été en usage assez longtemps. Ainsi, dans ce temps, Galilée était encore tout à la Médecine. Quant aux Mathématiques, il paraît qu'il n'en a pas même suivi les cours; tous ses biographes sont unanimes à dire qu'il était absolument ignorant dans ces sciences jusqu'à sa dix-neuvième année. Mais, dès qu'il fut initié par Ostilia Ricci, le jeune homme se jeta avec ardeur dans ce nouveau champ d'études, si conforme à ses aptitudes. Plusieurs circonstances nous font supposer que s'est surtout Archimède qui fixait l'attention du jeune philosophe.

Les moyens modiques dont disposait la famille, devenue assez nombreuse, firent désirer au jeune savant de mettre à profit ses connaissances. Le plus naturel était de songer à une chaire dans une des Universités dont l'Italie fourmillait à cette époque. Les efforts de Galilée se tournent d'abord du côté de Bologne; pour y parvenir, il brigue les suffrages des hommes distingués et des corps savants. Ce n'est qu'après avoir probablement échoué dans ce dessein qu'il tourne ses regards vers l'Université à laquelle il doit son instruction, Pise.

C'est dans cette première période de la vie de Galilée que vient se placer la leçon faite par lui à Florence, *Sur la forme, la*

situation et la grandeur de l'enfer de Dante Alighieri. Cette conférence était occasionnée par quelques attaques dirigées contre les idées qu'avait émises sur cette matière l'Académie de Florence. Elle est surtout intéressante en ce qu'elle nous montre le philosophe encore entièrement attaché aux idées de Ptolémée, dévouement que nous verrons d'ailleurs durer assez longtemps, du moins dans ses leçons publiques.

Aidé par les bons offices du marquis Guidobaldo del Monte et un peu aussi, sans doute, par la protection de Giovanni de Medici (fils naturel de Cosmo) et du grand-duc Ferdinand, Galilée est nommé, en 1589, professeur à Pise, avec la rémunération dérisoire de 60 scudi, soit 360^{fr}. Cette circonstance seule aurait, sans doute, suffi pour lui inspirer un médiocre contentement de sa position; mais, de plus, il commit l'imprudence d'attaquer, dans ses cours, l'autorité d'Aristote sur quelques points de la théorie du mouvement, et cette attaque, trop précipitée, le mit en guerre avec la majorité de ses collègues. Une brouille survenue avec Giovanni de Medici, au sujet d'une machine hydrostatique, vint encore ajouter aux embarras de la position. Galilée ne pouvait plus songer à être confirmé dans sa place à la fin du *triennium*. Il fallait se pourvoir ailleurs.

Les biographes de Galilée nous assurent que la chaire des Mathématiques à Padoue lui avait été plusieurs fois offerte pendant son séjour à Pise. Ce récit cependant nous semble peu vraisemblable, d'après ce que nous savons maintenant sur les difficultés qu'il éprouva à l'obtenir finalement. Il eut besoin, en effet, de tout le crédit qu'avait la famille del Monte aux États Vénitiens et de toutes les influences de ses autres amis pour se faire agréer. Encore fut-il obligé de se rendre lui-même à Venise pour offrir ses services à la République.

Il fut enfin nommé professeur pour six ans, avec des appointements de 180 florins. Son décret de nomination date du 26 septembre 1592. La rémunération n'était pas, si nous en croyons M. Favaro, beaucoup plus forte que celle qu'il avait à Pise. Elle valait à peu près 450^{fr}, beaucoup moins qu'on ne l'avait dit.

Ici, l'auteur interrompt son récit pour nous donner, en deux Chapitres, un aperçu de l'histoire de l'Université de Padoue et de la chaire de Mathématiques à cette Université, jusqu'à l'arrivée de

Galilée. Ces Chapitres sont remplis de faits et de renseignements pour la plupart nouveaux et d'un intérêt des plus vifs; malheureusement, leur complexité défie l'analyse et nous abordons directement le cinquième Chapitre, qui nous fait connaître le caractère de l'enseignement public de Galilée. Il y avait ici une question importante à éclairer. Nous sommes parfaitements sûrs, et M. Favaro nous le démontre encore par un écrit de 1584, que Galilée avait embrassé les opinions de Copernic bien avant son arrivée à Padoue. Est-ce donc ces théories qu'il exposait dans son enseignement? D'après les minutieuses recherches de l'auteur, le doute n'est plus permis. Galilée — tout concourt à le prouver — n'a pas fait part à ses élèves des théories de l'astronome polonais; au contraire, son enseignement a été tout à fait réglé d'après les hypothèses qui avaient alors cours dans le monde scientifique. Il devient dès lors impossible de nier l'authenticité du Traité sur la sphère de Sacrobosco, publié après la mort de Galilée, sous son nom, par le frère Urbano Daniso, et il faut supposer que c'est là un compte rendu assez fidèle de ses cours.

Les motifs qui poussaient Galilée à renier ainsi ses opinions les plus chères sont faciles à concevoir. Il était, à cette époque, jeune, inconnu et pauvre. L'animosité de ses collègues aurait pu avoir des suites funestes. D'ailleurs, le souvenir des démêlés qui avaient causé son départ de Pise lui était encore trop présent pour qu'il fût tenté de formuler ses opinions en public. C'est donc le temps et les circonstances plutôt que l'homme qu'il faut accuser de cette défaillance.

Pour le côté didactique des cours de Galilée, il paraît avoir été irréprochable. Tous sont d'accord sur ses grandes qualités de professeur. Aussi les élèves accouraient-ils de toutes parts, chose inouïe pour un professeur de Mathématiques. Le cercle de ses auditeurs dépassait même les confins de l'Université des Arts (composée des Facultés de Théologie, de Philosophie et de Médecine), et embrassait beaucoup d'étudiants inscrits à l'Université de Droit, qui avait alors une organisation tout à fait séparée. Ce qui contribua encore au succès de Galilée, c'est qu'il prit l'habitude de professer dans sa langue natale de Toscane au lieu de la langue latine dont on s'était servi jusque-là.

L'enseignement public rapportait peu à Galilée; en revanche,

il ne lui prenait pas beaucoup de temps. Ce sont les leçons particulières qui étaient sa meilleure source de gain. C'est là un point que M. Favaro a éclairci avec infiniment de soin et à l'aide des documents laissés par Galilée lui-même. Nous voyons défiler devant nos yeux des disciples d'origine différente : Italiens, Français, Polonais, Allemands, pour la plupart de jeunes gentilshommes venus à Padoue pour faire leurs études. Dans ce nombre, nous trouvons des princes, parmi lesquels il ne semble pas pourtant qu'il faille compter le roi Gustave-Adolphe, de Suède, confondu sans doute avec un de ses cousins.

Beaucoup de ces élèves demeurent chez Galilée; il tenait une espèce d'hôtel garni pour les étudiants. Il semble même que sa maison était assez grande, puisqu'il hébergeait parfois des jeunes seigneurs avec des suites assez considérables. M. Favaro n'a pas dédaigné d'étendre les recherches sur Galilée maître d'hôtel; il nous prouve qu'on y mangeait fort bien.

C'est surtout l'usage du *Compasso geometrico militare* que Galilée semble avoir exposé dans ses leçons particulières. L'auteur a consacré un Chapitre à cet instrument oublié, parfaitement inutile aujourd'hui et qui devait rendre sans doute de grands services dans ce temps privé de Tables de logarithmes. Au profit des leçons, Galilée joignait celui de la fabrication ; il fabriquait lui-même ou faisait fabriquer pour son compte des compas qu'il vendait ensuite.

Le grand nombre de contestations dont cette invention a été l'objet prouve le prix que les contemporains attachaient à cet instrument. La conduite de Galilée, dans cette occasion comme dans beaucoup d'autres, ne semble pas avoir été irréprochable. Après avoir avoué, dans le principe, qu'il avait profité beaucoup des inventions antérieures (dont M. Favaro a eu soin de suivre les traces), Galilée vient déclarer solennellement, à Venise, le 19 avril 1607, devant le tribunal, qu'à lui seul appartenait toute l'invention sans qu'il en dût la moindre part à qui que ce soit.

Les titres de Galilée sont heureusement plus certains sur un point d'une importance bien plus grande, le thermomètre. M. Favaro examine successivement les titres de tous les concurrents : des Italiens Fra Paolo Sarpi, Giambattista Porta et Santoria Santorio, du Hollandais Cornélius Drebbel, et des Anglais Robert

Fludd et Francis Bacon; il les trouve tous insuffisants. C'est donc bien à Galilée que reviendrait le mérite de cette grande invention.

Dans les travaux que nous avons mentionnés jusqu'ici, il n'y avait rien qui s'opposât aux vieilles théories. Mais les idées de Galilée ne pouvaient rester longtemps cachées. Son premier différend avec les péripatéticiens fut occasionné par un événement fortuit : l'apparition d'une nouvelle étoile en 1604.

Parmi les conceptions d'Aristote, il en existait une particulièrement chère aux philosophes du moyen âge : celle de l'incorruptibilité du ciel. Par suite de cette thèse, la nouvelle étoile ne pouvait être une étoile vraie, mais bien une apparence trompeuse ou tout au moins quelque produit de l'atmosphère de la Terre. Galilée, au contraire, défendit dans des cours publics la réalité et l'éloignement de l'étoile. L'émotion dans le camp aristotélique fut grande; force écrits furent lancés contre le hardi novateur. Galilée ne se défendit pas directement; mais cette tâche fut accomplie dans un dialogue satirique, écrit dans le dialecte padouan et publié sous le nom de *Cecco di Ronchitti da Bruzene*; d'après M. Favaro, ce nom cache un des amis de Galilée et ce dernier serait tout au moins un collaborateur.

D'autres travaux vinrent se joindre à l'étude du calorique. C'est surtout le magnétisme qui, d'après les lettres que nous possédons, semble avoir occupé longtemps l'illustre philosophe. M. Favaro nous fait part, entre autres, du contenu d'une longue correspondance avec la cour de Florence au sujet d'un aimant naturel. Ce que nous savons de toutes ces études se réduit cependant à fort peu. L'aimant lui-même était déjà devenu introuvable peu de temps après, circonstance étonnante quand on songe au prix qu'on y attachait. Nous ne sommes pas dans une certitude plus grande quant à beaucoup d'autres sujets, étudiés par Galilée dans ce temps à Padoue. Cependant M. Favaro prouve que la plupart de ses conceptions postérieures ont germé dans ce temps-là; entre autres le célèbre dialogue *sur les Sciences nouvelles*. Galilée lui-même, d'ailleurs, nous dresse un tableau magnifique de ses conceptions dans une lettre à Belisario Vinta, datée du 7 mai 1610; elle nous fait regretter que le célèbre philosophe ait quitté un milieu si favorable à ses travaux.

Ce changement, Galilée le dut, en premier lieu, à la célébrité qui était la suite de ses découvertes astronomiques. Mais on ne peut en parler sans toucher à la part qu'il eut à la découverte du télescope.

L'auteur fait preuve ici d'une grande impartialité; quoique chaud admirateur du grand savant, il n'a pas hésité à nous exposer toute la vérité. Or, les faits nous montrent Galilée sous un aspect très peu favorable.

Galilée a prétendu que, ayant appris qu'un télescope avait été inventé en Hollande, il se mit à la recherche et, guidé par des considérations théoriques, il en inventa un pareil. Ces considérations théoriques, il les nomme différemment en différents endroits. Dans la lettre du 29 août 1609, à Landusci, ce sont des pensées sur la « perspective » et dans le *Sidereus nuncius* des idées sur la réfraction. On ne peut pas être plus décisif sur ce point que ne l'est M. Favaro. Il nous démontre que, dans l'une comme dans l'autre de ces deux sciences, Galilée n'avait que des connaissances fort peu exactes. D'ailleurs, nous savons par un passage de l'astronome lui-même qu'il avait, en réalité, sur le télescope, une lettre de Badovere; provenant d'une personne versée dans les Mathématiques, cette lettre devait être fort explicite. Mais il y a plus encore. M. Favaro met hors de doute que, même antérieurement à la prétendue découverte de Galilée, des instruments hollandais étaient venus en Italie. Ce serait donc un grand hasard si Galilée n'en avait vu aucun; il est probable qu'il construisit son télescope d'après un modèle hollandais.

L'instrument construit, Galilée le présenta à la Signoria de Venise comme une invention nouvelle, et celle-ci, y voyant sans doute un instrument de guerre maritime, le récompensa largement en le nommant professeur à vie avec un traitement de 1000 florins par an. Faut-il s'étonner, après cela, que des contemporains, comme Bartoli, regardèrent l'affaire comme un bon tour joué par le savant au gouvernement de la République?

Cependant, si Galilée n'a pas inventé lui-même l'instrument, il est indéniable qu'il l'a considérablement amélioré, et ses instruments gardèrent longtemps encore une supériorité remarquable sur ceux des Hollandais. C'est même cette supériorité qui explique la défiance avec laquelle ses premières découvertes astro-

nomiques furent accueillies; car nous voilà arrivés à l'époque la plus glorieuse de la vie du savant florentin. Il découvre les satellites de Jupiter, il distingue des taches sur le disque solaire, il voit que la Voie lactée n'est qu'un amas d'étoiles et il fait des hypothèses analogues sur les nébuleuses.

On imagine l'accueil que firent à ces nouvelles les péripatéticiens. L'existence des corps célestes, dont ni Aristote ni la Bible ne soufflent mot, leur paraissait entièrement inadmissible. Ils étaient sûrs que Galilée s'était trompé ou avait été trompé par son instrument. Ces attaques devinrent si vives qu'elles compromirent, pour un instant, ses bonnes relations avec la cour de Florence.

Il semble que Galilée tenait à sa ville natale par des liens puissants. Il s'y rendait souvent pendant les vacances et n'avait jamais perdu l'espérance de pouvoir y vivre un jour. De plus, l'obligation de professer semble lui avoir pesé beaucoup ; enfin, peut-être que des chagrins de famille lui donnaient encore l'envie de quitter Padoue. Ce qu'il y a de sûr, c'est que, même avant 1609, il entretenait des relations à la cour de Florence (surtout avec le chancelier Belisario Vinta) et qu'il nourrissait l'espoir d'y être appelé un jour. Cette espérance prit corps par la découverte des satellites de Jupiter, auxquels Galilée donna le nom, délaissé depuis, de planètes médicéennes. Le jeune grand-duc fut extrêmement flatté de cette attention. Le savant, dans une lettre à Belisario Vinta, avait fait allusion à la récompense qu'il attendait et qui devait consister probablement dans un titre quelconque. On ne crut pas opportun de satisfaire sa vanité. Cependant des négociations pour le retour à Florence furent entamées. D'ailleurs, le nombre des adhérents s'accroissait rapidement. Galilée lui-même fabriquait des télescopes et, partout où ces instruments parvenaient, la vérité de ses assertions se faisait jour. Les péripatéticiens obstinés refusaient d'y regarder ou refusaient d'y croire après avoir vu; mais d'autres se laissaient convaincre : parmi eux le Père jésuite Clavio, et Magini, professeur à Bologne. Ceux-ci, joints aux savants qui avaient, comme Kepler, accueilli dès le commencement les découvertes du célèbre astronome, firent pencher bientôt la balance de son côté.

Mais, ce premier danger passé, un autre survint : des compétiteurs se présentèrent de nouveau pour lui arracher la gloire de ses

découvertes. M. Favaro, comme d'habitude, les passe en revue; il trouve que ni Simon Mayr, ni Harriot n'ont des titres sérieux à opposer à ceux de Galilée.

La cour de Toscane abandonna bientôt son attitude réservée, surtout après que l'astronome y eut envoyé un de ses instruments et s'y fut rendu lui-même pour exposer ses découvertes. Comme le grand-duc désirait aussi vivement de l'avoir près de lui que Galilée désirait d'entrer dans son service, on s'entendit bientôt sur les conditions. La question d'argent fut vite tranchée; il fut décidé que Galilée recevrait le même gage que lui avait promis la République, mais sans aucune obligation de faire des cours. La question du titre fit un peu plus de difficulté; nous avons vu déjà que Galilée ne méprisait pas ces sortes de choses. Finalement, on s'entendit sur le titre un peu long de : « Premier mathématicien de l'Université de Pise, et premier mathématicien et philosophe du grand-duc de Toscane ».

Le 15 juin 1610, Galilée renonça à la chaire qu'il occcupait à l'Université de Padoue. Il ne partit cependant qu'au commencement de septembre. Le 12 du même mois il était à Florence. Ici commence une nouvelle période de la vie de Galilée et finit la tâche que M. Favaro s'était proposée. L'auteur ne peut s'empêcher d'observer que peut-être les années suivantes de la vie du grand savant auraient été plus heureuses, si, au lieu de se fier aux grâces capricieuses d'une cour, il était resté sous la puissante domination de ce « souverain invariable » qui s'appelait la République de Venise. Ce sont là des considérations que les amis de Galilée avaient déjà fait valoir auprès de lui, comme on peut le voir par une lettre de Giovani Francesco Sagredo.

Les derniers Chapitres du Livre sont consacrés à la vie intime de Galilée à Padoue. L'auteur s'est non seulement appliqué à élucider la vie de famille, les embarras d'argent, les défaillances de santé du grand astronome; il a fait aussi les recherches les plus circonstanciées sur ses confrères, ses amis, ses élèves, sur tout homme qui en avait approché. Il nous est impossible de rapporter tous les détails intéressants qui s'y trouvent. Nous nous bornerons simplement à signaler à nos lecteurs le dix-huitième Chapitre.

Galilée avait voulu que son grand ami Kepler lui succédât dans

sa chaire à Padoue; mais ses efforts en ce sens furent vains. Après une vacance qui dura plusieurs années, un certain Giovanni Camillo Gloriasi fut élu. Si la chaire resta si longtemps vacante, c'est — nous dit M. Favaro — qu'on espérait le retour de Galilée; cependant, il y avait parmi les nobles gouvernants de la République un grand parti qui lui était décidément hostile. Le brusque départ du professeur qu'ils avaient reçu pauvre et inconnu et qu'ils avaient comblé de bienfaits les avait froissés sans doute.

Outre ces derniers Chapitres, le second Volume renferme cent cinquante documents, pour la plupart nouveaux, et un Appendice sur l'utilité d'une nouvelle édition de Galilée avec un index fort complet.

D'un caractère tout différent est le second livre dont nous avons à entretenir nos lecteurs. Le P. Grisar est professeur d'Histoire ecclésiastique à l'Université d'Insbruck; son point de vue est franchement et rigoureusement catholique. « Il n'écrit que pour des théologiens, ou du moins pour des penseurs sans prévention » (p. 213). Il lui paraît « infiniment plus important de trouver le chemin du ciel que de déterminer scientifiquement les mouvements des corps célestes » (p. 123). Il exalte le mérite de saint Thomas d'Aquin et de Duns Scot (p. 313); les noms de Descartes et de Bacon « évoquent le souvenir des innovations les plus malheureuses, » et, quant aux *Lettres provinciales* de Pascal, elles sont « calomnieuses » (p. 38).

L'auteur commence par un court aperçu sur la bibliographie du procès de Galilée. Le Livre lui-même est divisé en deux parties. La première est historique; elle contient l'exposé de ce procès à jamais célèbre. L'auteur n'a pas la prétention de nous donner beaucoup de choses nouvelles. Il n'a pas, à ce qu'il paraît, vu lui-même les documents en question; il s'en rapporte entièrement aux publications de MM. de l'Épinois et v. Gebler, et il vante surtout l'exactitude minutieuse de ce dernier.

Le récit du procès commence par la dénonciation de Lorini. L'auteur lui suppose les motifs les plus bienveillants : il craignait « que l'erreur de Galilée, encore petite, ne prît peu à peu une grande étendue » (p. 297). La déposition de Caccini, qui prétend

être entendu *per exonerationem conscientiæ*, vient encore confirmer cette dénonciation. Toute une année s'écoule cependant avant que la question soit sérieusement agitée. C'est le 23 février 1616 que les théologiens experts émettent la célèbre sentence commençant par les mots : *Dictam propositionem esse stultam et absurdam in philosophia*. Cette opinion, souscrite par onze théologiens, dont « plusieurs étaient très versés dans les Sciences naturelles et la Philosophie » (p. 38) est communiquée aux cardinaux de l'Inquisition le jour suivant ; le 25 enfin, les cardinaux, sous la présidence du pape Paul V, décident que le cardinal Bellarmin aura un entretien personnel avec Galilée.

Ce qui se passa dans cette entrevue constitue un des points principaux des débats. On n'en a pas trouvé de procès-verbal. Il existe, en effet, dans le dossier un compte rendu; mais il est fort court et, de plus, ses expressions offrent des contradictions et des omissions assez considérables, si on le compare au mandat du 25 février. C'est pourquoi beaucoup de savants se sont décidés à le supposer faux; cette hypothèse a cependant perdu beaucoup de terrain depuis que MM. v. Gebler et de l'Épinois ont pu étudier les dossiers originaux. Pour le P. Grisar, pas de faux possible; un procès-verbal n'a jamais existé; les omissions et les contradictions sont tout ce qu'il y a de plus naturel. Quant à l'attestation du 26 mai que Bellarmin a délivrée à Galilée, elle avait pour but de servir de défense à ce dernier et ne pouvait contenir de détails.

L'auteur commence par combattre l'hypothèse la plus avancée, celle de la falsification postérieure du compte rendu ; elle a été émise par M. Wohlwill et adoptée au début par M. v. Gebler. Il fait ressortir toutes les impossibilités physiques; les documents sont fortement liés d'une manière très compliquée, la pagination est évidemment ancienne, l'encre partout la même, l'écriture aussi; même les filigranes sont identiques; quant aux grattages que M. Wohlwill a voulu reconnaître dans les photolithographies de M. de l'Épinois, l'auteur en trouve la constatation impossible. On voit bien que la plupart des armes avec lesquelles le P. Grisar combat sont empruntées à l'arsenal Gebler. Il n'est cependant pas plus gracieux pour la nouvelle hypothèse de ce dernier. L'auteur de *Galileo Galilei et la Curie romaine* s'est vu, comme on sait, contraint en dernier lieu d'abandonner l'hypothèse de M. Wohl-

will; il en a émis une autre, qui est celle de la falsification contemporaine; celle-là, l'auteur la combat par les raisons de M. Scortazzini et en insistant surtout sur l'improbabilité morale d'une telle falsification, parfaitement inutile à cette époque. Restent les hypothèses de MM. Scortazzini et Cantor. Pour la première, l'auteur met encore une fois en jeu Gebler qui a déclaré que la supposition d'une seconde reliure est inadmissible. L'hypothèse de M. Cantor enfin, quoique tenant compte de la pagination, lui paraît « une possibilité pure » (p. 45).

On voit que le P. Grisar met fort habilement ses adversaires aux prises les uns avec les autres; il y a cependant un reproche qui s'adresse à peu près à tous : c'est qu'il faut admettre nécessairement la bêtise du faussaire qui a oublié les contradictions (p. 45).

Donc Galilée a promis de se conformer aux ordres du cardinal Bellarmin. Mais l'auteur, sentant sans doute tout le poids des objections soulevées contre l'authenticité du compte rendu, insiste spécialement sur ceci : que le fait d'avoir manqué à sa parole ne constituait pas pour Galilée une des accusations principales : elle n'a été employée que « d'une manière secondaire » (p. 55).

Ces mesures personnelles contre Galilée sont suivies de mesures générales. C'est le 5 mars qu'apparaît le décret de la Congrégation; il défend les Livres de Foscarini et tous ceux qui traitent du même sujet; les Ouvrages de Copernic et de Stunica sont suspendus *donec corrigantur;* la doctrine copernicienne enfin est condamnée comme fausse et contraire à la sainte Écriture. La clémence vis-à-vis du Livre de Copernic s'explique par la tournure hypothétique qu'avait donnée à la doctrine la Préface de son ami Osiander, Préface que le P. Grisar appelle « hypocrite » (p. 281). En effet, les passages qui devaient être corrigés d'après l'Inquisition étaient ceux où Copernic paraissait convaincu de la réalité de son système (p. 59). La Congrégation voulut qu'il fût traité entièrement comme hypothèse. Ce dernier mal, cependant, l'auteur nous l'explique lui-même, avait une explication tout autre qu'aujourd'hui; on ne devait pas considérer la théorie comme probable ou même possible, mais comme une simple supposition, pour faciliter les calculs (p. 60).

Ce n'est que seize ans après le premier procès que les démarches contre Galilée sont reprises. La publication du *Saggia-*

tore ne donne lieu à aucune poursuite; mais les menaces commencent aussitôt après l'apparition du dialogue *Sur les deux principaux systèmes du monde.*

Le dialogue porte à la fois l'*imprimatur* du censeur de Rome et de celui de Florence. Par un exposé fort minutieux, résumant toute l'histoire de ces deux permissions, l'auteur s'efforce de nous prouver que l'*imprimatur* du censeur de Rome était non valable et celui de Florence donné par suite d'un manque de prévoyance (p. 69).

Galilée est cité à Rome le 1[er] octobre 1632, il y arrive le 16 février 1633, et alors commence ce procès dont l'Église devait si longtemps ressentir le contre-coup. Les pièces du dossier sont ici si explicites et si authentiques, qu'il n'y a eu que très peu de contestations sur le côté matériel. Tout le monde s'accorde à reconnaître que Galilée, dans les trois premiers interrogatoires qu'il eut à subir, se tint ferme dans sa position, soutenant qu'il n'avait pas voulu traiter le système autrement que par hypothèse. Le 16 juin, les cardinaux déclarent qu'il « n'a pas dit l'entière vérité sur son intention ». Donc il est nécessaire d'employer la torture.

Nous arrivons à l'interrogatoire du 21 juin 1633, qui devait être le dernier. C'est ici que se pose le problème le plus intéressant : Galilée a-t-il subi ou non la torture? Cette fois, il existe un procès-verbal de la séance; mais M. Wohlwill l'a déclaré faux, en s'appuyant principalement sur l'expression du jugement qui porte que Galilée a subi un *esame rigoroso*. Ces mots-là, l'auteur n'est pas en état de le nier, s'appliquent ordinairement à la question; mais, par une exposition fort longue, il s'efforce de nous prouver qu'ils s'appliquaient aussi à l'intimidation et aussi bien à la *territio levis* qu'à la *territio gravis*, qui, d'ailleurs, n'étaient pas nettement distinguées (p. 99). C'est l'intimidation légère, verbale qu'aurait subie Galilée. Encore le P. Grisar veut-il affaiblir l'impression que ne peut manquer de produire sur nous l'image de cet illustre vieillard, torturé « verbalement » par ses juges (Pignatelli dit : *Metus torturæ est tortura*). Il suppose donc que Galilée, qui était fort versé dans la procédure de l'Inquisition (on ne sait au juste pourquoi), devait savoir parfaitement que ses juges ne pouvaient pas le torturer. Ceux-ci auraient même prévu sa

constance, et le jugement aurait été formulé d'avance ; donc tout cet interrogatoire, cet *esame rigoroso,* ne serait qu'une « formalité » (p. 98). Il est vrai que le seul fait que l'auteur cite à l'appui de son hypothèse est celui-ci : le jugement qui survient le lendemain de l'interrogatoire étant très volumineux et d'une grande justesse et précision ne peut avoir été écrit dans la nuit précédente, mais bien avant le quatrième interrogatoire (p. 197). Quant à « l'excitation terrible » que Gebler a voulu reconnaître dans la signature de Galilée, l'auteur ne la nie pas; mais il l'attribue plutôt au sentiment du mensonge qu'il commettait à cet instant (p. 98).

La publication du jugement et l'abjuration ont eu lieu le 25 juin. C'était l'acte final du procès. Il ne reste plus à l'auteur qu'à raconter les dernières années de Galilée, à qui l'Inquisition, comme on sait, ne permit pas de retourner immédiatement à Florence. Ces dernières années furent fort tristes.

La seconde partie du Livre est presque purement théologique. Il s'agit d'examiner la question : le jugement contre Galilée a-t-il porté atteinte à l'infaillibilité que l'Église réclame pour ses décrets? Voici la théorie du P. Grisar. Le pape ne peut jamais céder la moindre part de son autorité à personne; donc aucune congrégation, même émanant directement de lui, ne peut être considérée comme infaillible. Quant à la confirmation par le Saint-Père, elle ne peut non plus changer la portée du décret; car l'infaillibilité du pape est limitée au cas où il parle *ex cathedra.* Or, si, dans le procès de Galilée, Paul V n'a pas agi comme simple théologien (*doctor privatus*), qualité admise par toutes les autorités, il n'a pas cependant prononcé *ex cathedra.* Le P. Grisar suppose un état pour ainsi dire intermédiaire où le pape, quoique parlant au nom de sa fonction comme chef de l'Église, ne prononcerait pourtant pas *ex cathedra* et ne serait nullement infaillible.

En lisant les développements du P. Grisar, il faut reconnaître qu'il a été dans une position des plus difficiles. La Congrégation de l'Inquisition, comme celle de l'Index, existe toujours; elles émettent encore des décrets; il serait peu opportun d'amoindrir la valeur de ses actes. Aussi, tout en détruisant leur infaillibilité, le P. Grisar a grand soin d'ajouter la nécessité de leur rendre la plus stricte obéissance. Et cette obéissance ne doit pas être seulement extérieure (*silentium reverentiale*), mais aussi intérieure, c'est-

à-dire qu'on doit s'efforcer d'y croire en quelque sorte. Cependant, ici encore, l'auteur distingue cette croyance (*assensus religiosus*) de celle qu'on doit à un décret du concile ou du pape (*assensus absolute indubius et supra omnia firmus*) (p. 179). C'est une de ces distinctions subtiles et profondes dont les théologiens de tous les temps ont eu le secret, et le P. Grisar se montre bien le digne successeur de ces scolastiques qu'il admire tant.

La partie théologique est suivie de quelques Chapitres, traitant des questions d'un ordre mixte et s'attachant au procès de Galilée, telles que l'état des esprits en Italie à cette époque, le rôle des jésuites, le sort de la théorie de Copernic après sa condamnation, etc. Le tout se termine par une recherche qui nous paraît bien un peu téméraire. Elle ne vise rien moins que de découvrir le but que la Providence s'est proposé en suscitant ainsi « apparemment » des difficultés à son Église.

Ch. Henry et É. Meyerson.

MÉLANGES.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES.

SESSION DE LA ROCHELLE.

Ire ET IIe SECTIONS. — MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIE, GÉODÉSIE ET MÉCANIQUE.

Président d'honneur.... M. P. TCHEBYCHEF, Membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg.

Président.............. M. Édouard COLLIGNON, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Secrétaire.............. M. STEPHANOS (Dr Cyparissos).

Séance du 25 août 1882.

M. P. Tchebychef fait une Communication *Sur la rectification des courbes*. L'illustre géomètre montre le parti que l'on

peut tirer pour la rectification des courbes de l'emploi des points dont les coordonnées servent à trouver l'*aire*, d'après la méthode exposée par lui au Congrès de Lyon, méthode qui vient d'être enrichie par des recherches fort intéressantes de M. Radau. En traitant de cette manière le cas le plus simple, on parvient à reconnaître que l'arc d'une courbe peut être représenté, avec une approximation notable, par la somme des deux côtés égaux du triangle isoscèle construit sur la corde de l'arc comme base et ayant pour hauteur les $(\sqrt{\frac{4}{3}})^{\text{ièmes}}$ de la flèche élevée perpendiculairement au milieu de la corde jusqu'à sa rencontre avec l'arc. La courbe symétrique autour de l'axe des x, dont les arcs compris entre deux points symétriques se rectifient exactement de cette manière, se trouve avoir pour équation $3ay^2 = x(a - x)^2$.

M. le général Parmentier parle *Sur certaines formules de quadrature*. On doit à M. Parmentier une formule d'approximation pour la quadrature des courbes planes, qui constitue un heureux perfectionnement de la méthode de Poncelet. Cette formule, comme l'auteur l'a déjà fait remarquer (*Nouv. Ann.*, t. XV, 1876), peut aussi être obtenue en cherchant à simplifier celle de Simpson. M. Parmentier fait connaître maintenant deux autres formules qu'on obtient en suivant le même ordre d'idées, et qui ont la propriété de fournir la valeur exacte de l'aire toutes les fois qu'il s'agit de paraboles du deuxième ou du troisième degré. Ces nouvelles formules sont, il est vrai, un peu moins simples que la première, mais conduisent à une plus grande approximation.

M. le Dr Prompt, de Nice, expose ses recherches *Sur la signification mathématique de l'Atlantide*. En racontant, dans le dialogue de Timée, la fable de l'*Atlantide*, Platon avait donné une description minutieuse de la métropole d'un des royaumes qui se trouvaient sur cette île. M. Prompt a pensé que les dimensions attribuées par Platon aux différentes parties de cette ville ne seraient que des symboles numériques, analogues à ceux dont il est question dans d'autres parties de Timée. Il a donc cherché à découvrir leur signification en recourant à des interprétations astronomiques, musicales, etc.

La Communication de M. Prompt a donné lieu à plusieurs ob-

servations de la part de MM. Collignon, Tchebychef, Parmentier.

M. Collignon présente, au nom de M. G. Jung, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, des *Propositions relatives à la détermination des centres de gravité de solides ou de surfaces de révolution complets ou incomplets*. La principale de ces propositions, qui constitue un complément utile de la règle de Guldin, est la suivante : « Si l'aire plane F (ou la courbe plane S) tournant d'un angle θ autour d'une droite a, située dans son plan, engendre une portion de solide (ou de surface) de révolution, le centre de gravité du solide engendré (ou de la surface engendrée) coïncide avec le centre de gravité de l'arc de cercle décrit par le point A, antipôle de la droite a par rapport à l'ellipse centrale de l'aire plane F (ou de la courbe plane S). »

M. Collignon fait ensuite une Communication *sur un problème de Géométrie*. M. Collignon cherche les courbes planes dont l'aire polaire (c'est-à-dire en coordonnées polaires) est une fonction donnée de l'arc. Il fait voir d'abord que la détermination de ces courbes équivaut à celle des courbes dont l'arc s est égal à une fonction donnée $\psi(p)$ de la distance p du pôle à la tangente de la courbe. Le problème se ramène ainsi à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2} - \psi'(p)\frac{dp}{d\alpha} + p = 0,$$

α étant l'angle polaire sous-tendu par l'arc s. M. Collignon considère diverses transformations de cette équation différentielle, qui conduisent, les unes à des procédés graphiques, les autres à des développements en fonctions continues, permettant d'obtenir des solutions approximatives de la question. Il fait voir enfin comment, étant donnée une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires, la connaissance de la relation $s = \psi(p)$ correspondante, ou bien de celle qui existe entre l'arc et l'aire polaire de cette courbe, peut servir à mettre en évidence les propriétés géométriques ou mécaniques de la courbe.

Séance du 26 août.

M. Domenico Ragona, directeur de l'Observatoire de Modène parle de certaines *Nouvelles formules relatives à la détermina-*

tion de la déclinaison magnétique absolue. Dans le Congrès de Montpellier (1879), M. Ragona avait fait connaître une méthode pour la détermination de la déclinaison magnétique absolue. M. Ragona présente maintenant une nouvelle formule relative au cas où l'on observe, avant et après la détermination de l'azimut magnétique, un nombre quelconque d'étoiles. La grandeur cherchée s'obtient alors par l'emploi de la méthode des moindres carrés.

M. Ferrero, colonel d'état-major, directeur de l'Institut géographique militaire italien (à Florence), fait un *Rapport sur les progrès des travaux géodésiques en Italie et sur l'Institut géographique militaire italien.*

D'après M. Ferrero, les travaux géodésiques qu'on exécute en Italie, depuis son unification, ont pour base les méthodes d'observation et de calcul les plus récentes; mais ce qui peut constituer le mérite spécial des travaux italiens, c'est une organisation qui fait concourir dans un même but toutes les forces utiles dont dispose le pays.

Il existe, en Italie, une Commission géodésique composée de membres appartenant au ministère de la guerre, au ministère de la marine et à celui des travaux publics, et des directeurs des principaux Observatoires astronomiques. Les travaux de la Commission sont très variés et comprennent des travaux trigonométriques et géométriques, des travaux astronomiques, des travaux mixtes, enfin des publications. Plusieurs établissements scientifiques prennent part à ces travaux, auxquels ils apportent un précieux concours par des moyens intellectuels et matériels. Tels sont l'Institut géographique militaire, le Bureau hydrographique de la marine et les Observatoires astronomiques de Milan, Padoue, Rome et Naples.

La triangulation de premier ordre constitue un réseau qui couvre toute l'étendue de l'Italie et de ses îles. Le réseau est déjà établi en grande partie. Dans trois ans il le sera en totalité et, dans six ou sept ans, il sera tout calculé et compensé. La précision des observations exécutées atteint le plus haut degré que comportent les instruments et les méthodes actuelles. Quant au nombre et à la distribution des bases, ils ont été établis de manière à assurer

aux côtés les plus éloignés une erreur moyenne ne dépassant pas le $\frac{1}{100000}$ de la longueur.

A côté des triangulations de premier ordre, on exécute des nivellements géométriques et trigonométriques. On fait aussi des observations maréographiques au moyen de maréographes installés dans différents ports du royaume.

M. Ferrero insiste, en finissant, sur la part qui revient à l'Institut géographique militaire. Cet Institut, qui ne compte pas moins de deux cent cinquante employés, a pour mission de faire la triangulation du royaume ainsi que tous les travaux cartographiques qui intéressent l'armée et les administrations. La carte italienne sera terminée en 1892, c'est-à-dire trente ans après son commencement.

A la suite de cette Communication, M. le commandeur Alex. Brocchi parle *Des maréographes existant en Italie et des observations maréographiques italiennes*.

Séance de l'après-midi.

M. Tchebychef présente à la section une *Machine arithmétique à mouvement continu*. Cette machine est composée d'un *additionneur*, pouvant être employé séparément, pour opérer l'addition et la soustraction et d'un mécanisme auxiliaire servant à effectuer, avec le concours de l'*additionneur*, la multiplication et la division. Dans l'additionneur, les échappements qu'on emploie ordinairement pour produire brusquement les changements des chiffres de la somme provenant du report sont remplacés par des trains épicycloïdaux qui produisent ces changements *graduellement*. La composition de l'additionneur est rendue ainsi fort simple. Quant à l'ambiguïté qui se présente lorsqu'on voit dans une même lucarne deux chiffres à la fois, elle est écartée au moyen de bandes que l'on voit dans ces lucarnes. Parmi ces bandes, on distingue aisément la principale, laquelle ne contient que les vrais chiffres de la somme. Le mécanisme servant à opérer la multiplication et la division est composé d'un cylindre denté et de pignons qui peuvent glisser le long de leurs axes. Les dents du cylindre et celles des pignons ont une forme telle que les pignons ne puissent jamais rester libres. On rend ainsi complètement im-

possibles les fautes qui auraient pu résulter de ce que les pignons ne s'arrêtent pas toujours assez vite quand les dents du cylindre cessent de les pousser.

M. Baehr, professeur à l'École Polytechnique de Delft (Hollande) fait une Communication *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants et sans second membre, dans le cas où l'équation caractéristique a des racines égales.*

M. Andréief, professeur à l'Université de Kharkof (Russie), parle *Sur les polygones de Poncelet.* Dans son *Traité des propriétés projectives des figures,* Poncelet avait ramené la démonstration de son fameux théorème, sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre, à celle de la proposition suivante : « Étant données deux coniques dans un plan et que l'on considère un polygone de m côtés inscrit dans l'une et dont $m - 1$ côtés soient tangents à l'autre, le dernier côté de ce polygone enveloppe une conique appartenant au faisceau déterminé par les deux coniques considérées. » C'est de cette proposition importante que M. Andréief présente une nouvelle démonstration. Sa démonstration présente cet avantage, qu'elle satisfait aux exigences de la géométrie de situation et aussi qu'elle n'est fondée que sur la considération de figures qui restent toujours réelles tant que les deux coniques considérées sont réelles.

MM. Collignon et Vazeilles ajoutent quelques remarques sur le même sujet.

M. Cyparissos Stephanos fait ensuite une communication *Sur le mouvement d'une figure de forme invariable.* Dans cette communication, M. Stephanos expose les principes d'une nouvelle méthode pour l'étude géométrique du déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan ou d'un corps solide autour d'un point fixe de l'espace. Cette méthode est fondée sur la représentation, par des points de l'espace, des diverses positions que peut prendre la figure plane dans son plan ou le corps solide autour du point fixe de l'espace, positions qui sont en nombre simplement infini. Un mouvement, comprenant une simple infinité de positions de la figure mobile, est ainsi représenté par une

certaine courbe, lieu des points qui représentent les positions successives de cette figure. La considération de cette courbe est d'une grande utilité pour l'étude du mouvement correspondant.

Le procédé de la représentation des positions d'un corps solide autour d'un point de l'espace est intimement lié à la théorie des quaternions de Hamilton. M. Stephanos fait voir, à ce propos, dans quel genre de recherches le Calcul des quaternions est particulièrement approprié.

M. Marcel Deprez, *Sur le dynamomètre hydraulique de M. Froude.*

Séance du 28 août.

M. Laisant, député, parle d'abord *Sur un théorème d'Algèbre.* Ce théorème constitue une généralisation d'une proposition donnée à peu près simultanément par MM. Biehler et Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1880). Le nouveau théorème peut être énoncé de la manière suivante : « Soit $x = f(s, t)$ une fonction réelle quelconque de deux variables s, t. Remplaçons-y s et t par $\frac{z^2+1}{z}$ et $\frac{z^2-1}{iz}$. Supposons maintenant qu'en résolvant par rapport à z l'équation ainsi obtenue

$$f\left(\frac{z^2+1}{z}, \frac{z^2-1}{iz}\right) = x,$$

on tire pour une des racines $z = \varphi(x, i)$. L'équation

$$[\varphi(x, i)]^m = A + Bi,$$

où A et B représentent deux quantités réelles telles que $A^2 + B^2 = 1$, et $m' i = \sqrt{1}$, aura m racines égales. » En prenant pour la fonction $f(s, t)$ simplement $\frac{t}{s^2}$, on obtient la proposition de MM. Biehler et Laguerre.

M. Laisant présente ensuite une *Remarque sur les podaires.* Lorsqu'on a une courbe (X), on peut considérer ses podaires successives $(P_1), (P_2), \ldots (P_{m-1}), (P_m) \ldots$, inclinées d'un certain angle α, et prises par rapport à un pôle fixe O. Si l'on considère

sur ces courbes un système de points $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$ correspondant à un même point P de la courbe (X), on trouve que les triangles

$$OXP_1, OP_1P_2, \ldots, OP_{m-1}P_m$$

sont tous directement semblables entre eux. La même proposition a évidemment lieu pour le système plus complet de courbes qu'on obtient en adjoignant aux courbes précédentes les *antipodaires* successives de (X) inclinées du même angle α et prises par rapport au même pôle O.

M. Laisant communique enfin certaines *Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même.*

M. Laisant s'occupe d'abord du cas où tous les points de la figure mobile décrivent des droites, puis il donne cette proposition :

« Si l'on considère une figure plane qui se meut sur un plan en restant semblable à elle-même, et que, pour un moment quelconque du mouvement, on trace les vitesses (ou les accélérations d'un même ordre quelconque) des divers points qui la composent, les extrémités de ces vitesses (ou de ces accélérations) formeront une figure semblable à la première. »

M. Stephanos ajoute quelques remarques sur le même sujet.

M. Tchebychef fait une Communication *Sur le choix du rayon dans les intégrales définies prises le long d'un cercle par lesquelles on exprime les probabilités d'après leurs fonctions génératrices.* M. Tchebychef montre comment on doit choisir la valeur du rayon dans les intégrales qui donnent la valeur des probabilités d'après leurs fonctions génératrices, pour faciliter la détermination de leurs valeurs limites dans le cas où le nombre des épreuves est infiniment grand.

M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique, communique plusieurs *Théorèmes de Géométrie.* Ces théorèmes se rapportent, les uns à certains points remarquables du plan d'un triangle, les autres à certains lieux définis par des propriétés des droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle par un point de son plan.

M. Collignon expose ses recherches sur certains *Problèmes de Mécanique*. Dans cette Communication, M. Collignon traite d'abord le mouvement d'un point pesant sur une corde de la sphère terrestre. Il suppose pour cela que la densité du globe soit partout la même, et que, par conséquent, la pesanteur varie à l'intérieur proportionnellement à la distance au centre. Il suppose, en outre, que le glissement du point développe un frottement proportionnel à la pression normale exercée par ce point sur la droite directrice et que le coefficient f de ce frottement soit connu.

Le point qui se meut, sous ces conditions, sur une corde terrestre AB, en partant de l'extrémité A de cette corde, doit s'arrêter à une certaine distance de l'autre bout B de cette corde. Il est bien remarquable que la durée de ce trajet serait égale à $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, R étant le rayon de la Terre et g l'accélération, due à la pesanteur, à la surface du globe. Cette durée est donc indépendante de la direction de la corde AB et ne dépend pas davantage du coefficient f. S'il n'y avait point de frottement, le mobile irait jusqu'à B et atteindrait ce point après le même laps de temps. Si l'on voulait appliquer ce mode de locomotion souterrain, dont la pesanteur ferait à peu près tous les frais, on pourrait aller d'un point quelconque du globe à un autre en 42 minutes 11 secondes. Cependant, en dehors de différentes causes qui rendent ce système impraticable, M. Collignon remarque que les pressions énormes que l'air atmosphérique devrait exercer aux profondeurs qu'on serait obligé d'atteindre pour des parcours d'une certaine étendue seraient un obstacle absolu.

M. Collignon passe ensuite à la considération du mouvement d'un point M assujetti à glisser sans frottement sur une courbe fixe et attiré vers un centre O par une force proportionnelle à la distance OM. Il examine en particulier cette question : « Quelles sont les courbes pour lesquelles ce mouvement est *pendulaire*, c'est-à-dire identique, quant à la relation qui existe entre les arcs parcourus et le temps, au mouvement d'un point sur une droite fixe quand il est attiré par un point fixe de la droite proportionnellement à la distance à ce point? » Les courbes ayant cette propriété, et que M. Collignon appelle *pendulaires*, sont telles que le rayon vecteur r et l'arc s sont liés par une relation de la

forme

$$r^2 = as^2 + bs + c,$$

a, b, c étant des constantes. Si, par une ligne AB pendulaire par rapport à un point O, l'on fait passer un cône ayant son sommet en O, on aura encore les courbes pendulaires par rapport au même point en déroulant ou en enroulant, comme on voudra, cette surface conique. La recherche des courbes pendulaires dans l'espace se ramène donc à la même recherche dans le plan. M. Collignon donne en finissant l'équation générale en termes finis des courbes pendulaires planes.

La *section* procède ensuite à l'élection de son Président et de ses délégués pour l'année prochaine. M. Collignon est élu président à l'unanimité. M. Mannheim, délégué sortant, est élu de nouveau.

Séance de l'après-midi.

M. Casalonga fait une Communication *Sur la transformation de la chaleur en travail mécanique et réciproquement.*

M. le Dr Guébhard expose un *Procédé expérimental pour la résolution du problème des isothermes dans le plan.* M. Guébhard a été conduit, par ses expériences, à ce résultat que lorsqu'on place à une petite distance d'une feuille horizontale de métal, exactement limitée aux parois perpendiculaires d'une auge électrique, un système cylindrique quelconque d'électrodes verticales, les anneaux colorés (de Nobili) qui prennent naissance figurent avec une très grande approximation le système théorique des lignes équipotentielles que donnerait l'application directe de ces mêmes électrodes sur un plan conducteur du même contour que la feuille. Cela permet de réaliser divers systèmes de lignes équipotentielles ou isothermes de ce plan.

MM. Collignon, Hennessy et Stephanos présentent des observations sur le sujet de cette Communication.

M. Baehr parle *Sur une question d'optique.* Le problème traité par M. Baehr est le suivant : « Étant donné un cylindre circulaire sur la surface duquel se réfléchissent des rayons lumineux issus d'un point, trouver sur le cylindre des courbes telles

que les rayons réfléchis suivant les points de ces courbes forment des surfaces développables.

M. Hennessy, membre de la Société royale de Londres, professeur à Dublin, fait une Communication *Sur une question de Géodésie*. M. Hennessy parle de la méthode à suivre pour déterminer la valeur la plus probable de la longueur de l'axe polaire de la Terre en partant des mesures faites de divers méridiens terrestres.

M. Tchebychef fait quelques remarques à propos de cette Communication.

M. le Président présente ensuite à la section les travaux manuscrits suivants :

Essai sur une génération géométrique des raies de Fraunhofer, par M. Escary, professeur au Prytanée militaire;
Note sur un des principes de la Géométrie, par M. Laquière, ancien élève de l'École Polytechnique;
Sur les sphères assujetties à rester tangentes à deux surfaces données, par M. Pellet;
Sur les équations résolvantes, par le même.
Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par M. Turquan, docteur ès Sciences.

Séance du 30 août.

M. Tchebychef fait une Communication *Sur les fonctions dont la dérivée d'un certain ordre s'éloigne le moins possible de zéro*. — M. Tchebychef montre le rôle que jouent ces fonctions dans la question d'interpolation et dans le problème de raccordement, fait voir comment on peut les déterminer dans le cas le plus simple, et indique enfin un théorème d'Analyse qui en résulte.

M. Bouquet de la Grye, ingénieur hydrographe de la marine, parle *Sur l'intensité de la pesanteur*.

M. Cornu, membre de l'Institut, ajoute quelques observations sur le sujet de cette Communication.

M. Cyparissos Stephanos fait une Communication *Sur les invariants des formes du cinquième et du sixième ordre*. M. Ste-

phanos indique les principaux résultats auxquels on arrive dans la théorie des invariants d'une forme binaire du sixième ordre, lorsque l'on considère cette forme comme la jacobienne d'un faisceau de formes binaires du quatrième ordre. Il fait ensuite l'application de ces résultats à la théorie des invariants de la forme du cinquième ordre. Une forme binaire f du sixième ordre admet, comme on sait, cinq invariants, A, B, C, D, R, qui sont respectivement des degrés 2, 4, 6, 10, 15, par rapport aux coefficients de cette forme. D'un autre côté, un faisceau de formes biquadratiques ayant f pour jacobienne admet comme invariants, à côté de A, B, C, deux autres invariants, plus simples que D et R, dont l'un, D_θ, est du second degré, et l'autre, E, du neuvième degré, par rapport aux coefficients des *covariants élémentaires* f et $\theta = \theta_x^2$ du faisceau. Par suite de cela, les invariants D et R peuvent être exprimés en fonction entière de A, D_θ, B, C et E. Ainsi, l'invariant D est égal à une fonction de A, D_θ, B et C. Cependant R se décompose en deux facteurs, dont l'un coïncide avec E, tandis que l'autre peut être exprimé en fonction de A, D_θ, B, C. En dehors de cet invariant R, il y a aussi d'autres combinaisons entières des invariants A, B, C, D qui se décomposent en deux facteurs, fonctions des invariants A, D_θ, R, C. Tel est le discriminant de la forme f. Il en est de même pour l'invariant de f dont l'évanouissement exprime la condition pour que, parmi les cinq faisceaux de formes biquadratiques ayant f pour jacobienne, il y en ait deux qui coïncident. Dans le cas où la forme f coïncide avec la hessienne d'une forme φ du cinquième ordre, et que, de plus, le faisceau considéré, ayant f pour jacobienne, est formé par les premières polaires de φ, la seule particularité qui s'introduit dans le système des cinq invariants A, D_θ, B, C, E consiste en ce que D_θ devient égal à un multiple numérique de A. Les quatre invariants de la forme φ du cinquième ordre coïncident alors avec les quatre invariants A, B, C, E du faisceau dont il s'agit.

M. le colonel Ferrero fait une Communication *Sur la nécessité de coordonner les travaux cartographiques et géométriques de toutes les administrations de l'État et sur l'institution, dans ce but, d'un Conseil central.*

C. S.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

V. ERMAKOF. — Intégration des équations différentielles de la Mécanique. — Intégration des équations du premier ordre aux dérivées partielles.

PRÉFACE.

Dans cet Ouvrage, je me propose principalement de parler des méthodes d'intégration des équations qu'on nomme *canoniques*. Il n'existe, à ma connaissance, aucun Traité complet où cette question soit traitée conformément aux exigences de la Science moderne; c'est ce qui m'a engagé à faire paraître cet Ouvrage.

En outre, selon mon avis, les géomètres qui ont traité la question d'intégration des équations canoniques ont suivi une méthode d'exposition incommode, simple au début, mais qui présente de grandes difficultés dans la suite. Au lieu de commencer directement par traiter l'intégration des équations canoniques, Jacobi, Bour, Serret, Bertrand et d'autres géomètres se sont occupés exclusivement de l'intégration des équations différentielles du premier ordre aux dérivées partielles; car l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles.

Il m'a semblé qu'il valait mieux commencer par l'exposition de la théorie complète de l'intégration des équations canoniques; on peut alors, en quelques mots, montrer de quelle manière on peut déduire d'un système d'intégrales des équations canoniques une intégrale d'une équation du premier ordre aux dérivées partielles; c'est cette méthode que j'emploie dans cet Ouvrage. Jacobi et Bour, qui ont choisi une voie commode, n'ont pu donner une théorie complète de l'intégration des équations simultanées du premier ordre aux dérivées partielles. Et il n'y a pas longtemps que Lie et Mayer, avec une difficulté assez grande, ont démontré que l'intégration de m équations simultanées du premier ordre aux dérivées partielles peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation différentielle avec un nombre des variables différant du premier de $m - 1$. Le théorème de Lie et Mayer est d'une

grande importance pour les équations canoniques; en voici le motif. Jacobi a démontré que l'intégration des équations canoniques avec $2n+1$ variables peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles avec $n+1$ variables, et réciproquement.

De plus, Jacobi a démontré que, ayant obtenu pour les équations canoniques m intégrales qui satisfont à certaines conditions, on peut ramener l'intégration des équations canoniques à l'intégration de $m+1$ équations aux dérivées partielles avec $n+1$ variables. Jacobi s'arrêta à ce théorème et n'en tira pas d'autres conclusions. De cette manière, Jacobi avait augmenté les difficultés du problème; car, au lieu d'une équation avec $n+1$ variables, nous avons à intégrer $m+1$ équations aux dérivées partielles ayant le même nombre de variables. Lie et Mayer ont fait disparaître ce malentendu, car ils ont démontré que l'intégration de $m+1$ équations aux dérivées partielles avec $n+1$ variables peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation avec $n-m+1$ variables. Nous avons dit plus haut que Jacobi donne une méthode pour ramener l'intégration d'une équation aux dérivées partielles avec $n-m+1$ variables à l'intégration des équations canoniques avec $2n-2m+1$ variables.

En employant une voie assez longue, nous parvenons au résultat suivant :

Si nous avons m intégrales qui satisfont à certaines conditions, alors le nombre des variables dans les équations canoniques peut être diminué de $2m$. Ce théorème est démontré dans ce Mémoire sans employer les équations aux dérivées partielles.

On sait que Cauchy a posé et résolu le problème suivant :

Intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de telle manière que la fonction cherchée pour une valeur particulière d'une variable soit égale à une fonction donnée des autres variables.

Pour résoudre ce problème, Cauchy a donné une méthode différente de la méthode de Jacobi.

Jusqu'à présent, personne n'est parvenu à perfectionner la méthode de Jacobi de manière à l'appliquer directement à la résolution du problème de Cauchy. Dans ce Mémoire, je démontre

qu'en employant ma méthode, qui n'est autre chose que la méthode de Jacobi appliquée exclusivement aux équations canoniques, le problème de Cauchy se ramène à l'élimination des variables entre certaines équations. Le problème de Cauchy est surtout simplifié dans ma méthode par l'introduction d'une nouvelle notion : « l'intégrale principale des équations aux dérivées partielles du premier ordre. » Je montre de quelle manière on peut obtenir cette intégrale. On peut aussi obtenir sans difficulté l'intégrale principale des équations aux dérivées partielles, si le système complet des intégrales des équations canoniques est connu.

Ainsi ce Mémoire présente une théorie complète et systématique de l'intégration des équations canoniques et des équations aux dérivées partielles de premier ordre.

Je donne ensuite une théorie abrégée de l'intégration des systèmes des équations canoniques simultanées. Je me sers des systèmes simultanés comme un moyen de démontrer quelques théorèmes qui se rapportent à l'intégration d'un système d'équations canoniques.

On sait que la plupart des équations de la Mécanique ont quelques intégrales qui ne dépendent pas des forces; ces intégrales sont les équations des aires et les équations du mouvement du centre de gravité.

On sait, en outre, que ces équations ne dépendent pas de la position des axes de coordonnées, c'est-à-dire qu'ils conservent leurs formes si nous les rapportons à des axes des coordonnées arbitraires.

Ceci donne naturellement naissance à la question suivante : Ces deux propriétés des équations de la Mécanique ne sont-elles pas liées l'une à l'autre étroitement?

Je réponds à cette question affirmativement, et je démontre, dans le § 38, un théorème plus général : « Si une équation canonique peut être transformée dans une autre forme aussi canonique, si les formules de transformation contiennent m constantes arbitraires qui n'entrent explicitement ni dans les équations données, ni dans les transformées, alors, en se servant des quadratures, on peut obtenir m intégrales des équations données. » Ces intégrales s'obtiennent par des formules de transformation; ainsi elles se-

ront des intégrales communes pour toutes les équations canoniques, lesquelles, étant transformées à l'aide des mêmes formules, ne contiennent de constantes arbitraires ni dans la forme initiale, ni dans la forme transformée. En exposant une méthode tout à fait nouvelle pour l'intégration des équations canoniques, je suis loin de penser que mon exposition sera à l'abri de toute objection. J'espère que mes lecteurs me pardonneront s'ils trouvent dans mon travail quelques parties un peu obscures. J'ai tâché d'exposer d'une manière brève et concise les théorèmes connus.

En exposant les méthodes pour trouver l'intégrale singulière et l'intégrale générale de l'intégrale complète, j'évite d'employer le déterminant fonctionnel, ce qui rend mon exposition plus brève et plus claire.

Voici le sommaire de cet Ouvrage :

Dans les § 1 à 7, j'expose les méthodes d'intégration des équations différentielles simultanées simples et des équations linéaires aux dérivées partielles. Les théorèmes démontrés dans ces paragraphes servent d'introduction à l'intégration des équations canoniques.

Dans le § 8, je donne la condition à laquelle doit satisfaire l'intégrale des équations canoniques, et j'introduis le symbole de Poisson.

Dans le § 9, je démontre une identité donnée pour la première fois par Donkin.

Dans le § 10, je démontre le théorème de Poisson, lequel donne le moyen, à l'aide de deux intégrales, d'obtenir la troisième.

Dans les § 11 à 14, je donne les formules les plus générales pour la transformation des équations canoniques, d'une telle manière que les équations transformées conservent aussi la forme canonique.

Dans le § 15, je démontre que l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les § 16 et 17, on trouve quelques conséquences des formules de transformation des équations canoniques.

Dans le § 18, je démontre une propriété particulière des intégrales des équations canoniques.

Dans le § 19, je démontre que de la moitié du nombre des intégrales qui satisfont à certaines conditions, on peut obtenir les autres intégrales des équations canoniques, de même que l'intégrale de l'équation différentielle aux dérivées partielles.

Dans le § 20, je démontre une particularité d'un système des intégrales canoniques.

Dans le § 21, je prouve l'existence d'une infinité des intégrales canoniques.

Dans le § 22, je donne les conditions de l'existence simultanée de quelques systèmes d'équations canoniques.

Dans le § 23, on trouve, pour les systèmes des équations canoniques simultanées, un théorème analogue à ce qui est donné dans le § 13 pour un seul système.

Dans le § 24, je prouve que l'intégration de m systèmes simultanés des équations canoniques avec $2n+m$ variables peut être ramenée à l'intégration d'un système des équations canoniques avec $2n+1$ variables.

Dans le § 25, on démontre une particularité des intégrales des équations canoniques.

Dans les § 26, 27 et 28, on expose la méthode de Jacobi pour obtenir des intégrales de telle sorte que les parenthèses de Poisson, formées avec elles, deviennent identiquement égales à zéro.

Dans le § 29, on démontre que, ayant m intégrales satisfaisant à quelques conditions, le nombre des variables dans les équations canoniques peut être diminué de $2m$.

Dans les § 30 et 31, on donne une autre méthode, un peu différente de la précédente, pour diminuer le nombre des variables.

Dans les § 32 et 33, nous analysons quelques cas particuliers des équations canoniques.

Dans le § 34, se trouve exposée la méthode de la variation des constantes arbitraires dans l'intégration des équations de la perturbation.

Dans le § 35, je démontre que, si les formules de transformation des équations canoniques contiennent m constantes arbitraires, lesquelles n'entrent ni dans les équations données ni dans les équations obtenues, alors, à l'aide des quadratures, on peut trouver m intégrales indépendantes des formes des équations données.

Dans les autres paragraphes, je démontre de quelle manière,

d'un système complet d'intégrales des équations canoniques, on peut obtenir les différentes intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans le § 36 sont données les formules générales de la transformation des équations aux dérivées partielles.

Dans le § 37, je démontre que chaque équation aux dérivées partielles peut être transformée de telle manière que l'équation transformée ne contiendra pas la fonction cherchée, mais seulement ses dérivées partielles.

Dans le § 38, nous exposons la méthode pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles.

Dans le § 39, nous exposons les conditions de l'existence simultanée de certaines équations aux dérivées partielles avec une seule fonction cherchée.

Dans le § 40, nous donnons la méthode pour obtenir une intégrale complète de quelques équations aux dérivées partielles.

Dans les § 41 et 42, je montre de quelle manière on peut déduire, de l'intégrale complète, l'intégrale singulière et générale.

Dans le § 43, je montre que l'intégrale complète peut être représentée sous différentes formes, et je donne une méthode pour obtenir l'intégrale principale.

Dans le § 44, j'expose la méthode pour résoudre le problème de Cauchy.

MÉLANGES.

ACHÈVEMENT DE LA DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DONNÉE PAR STEINER POUR CE THÉORÈME : « LE CERCLE POSSÈDE LA PLUS GRANDE PARMI TOUTES LES FIGURES PLANES ISOPÉRIMÈTRES ; »

PAR M. H. EDLER, DE HALLE.

(Présenté à la Société royale de Göttingue par H.-A. Schwarz.)

Traduction par M. l'abbé PANTONNIER.

Une grande partie des recherches que Steiner a publiées dans deux Mémoires insérés dans le XXIVe volume du *Journal de Crelle* sous ce titre : « Sur le maximum et le minimum des figures dans le

plan, sur la sphère et dans l'espace en général », repose sur ce théorème que de toutes les figures planes de même périmètre le cercle a la plus grande surface.

On a élevé contre les démonstrations géométriques élémentaires indirectes que Steiner a données de ce théorème fondamental l'objection formelle qu'elles reposent toutes sans exception sur une hypothèse non démontrée. En effet, chacune de ces démonstrations repose sur l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

1° De toutes les figures planes de même périmètre *il y en a une* dont la surface est maximum ;

2° De toutes les figures planes de même surface *il y en a une* dont le périmètre est minimum.

Ces hypothèses restent sans démonstration. De plus les démonstrations de Steiner restent sujettes à la même critique que Steiner a dirigée contre la démonstration donnée par Lhuilier pour le théorème que, de tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral a la plus grande surface.

Pour ce dernier théorème, en montrant directement qu'un triangle équilatéral a une plus grande surface que tout autre triangle de même périmètre, Steiner en a donné une démonstration remarquable de rigueur et de simplicité, mais il a fait aussi désirer pour le théorème fondamental se rapportant au cercle énoncé plus haut une démonstration géométrique élémentaire directe d'une simplicité analogue et d'une égale rigueur.

Par une démonstration publiée dans le X° Volume du *Journal pour l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles* (1879, p. 245), j'ai essayé de satisfaire aux conditions de rigueur imposées à une telle démonstration.

Cette démonstration repose essentiellement sur ceci : qu'il est toujours possible de transformer par des constructions géométriques un polygone irrégulier terminé par 2^n côtés rectilignes en un polygone régulier d'un même nombre de côtés, et de même périmètre, mais comprenant une plus grande surface. La surface du polygone régulier est alors comparée à celle du cercle de même périmètre au moyen de considérations géométriques simples.

En continuant à m'occuper de ce sujet, j'ai trouvé que la démonstration était susceptible d'être notablement simplifiée tout en conservant l'idée fondamentale, de sorte qu'après cette simplification

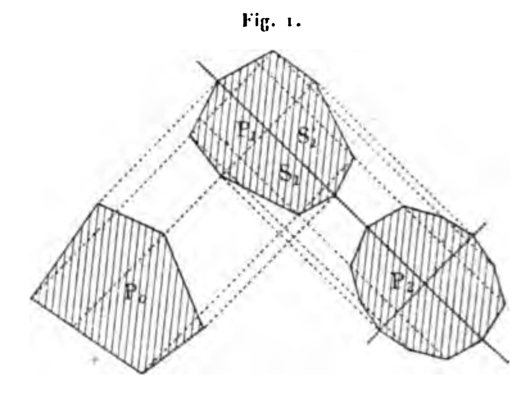
elle entre complètement dans l'ordre des idées qui jouent un rôle fondamental dans les recherches de Steiner et qu'elle peut être considérée comme une continuation, un complément des considérations se rapportant au cinquième mode de démonstration de Steiner.

C'est cette démonstration simplifiée que je vais me permettre d'exposer.

1. Étant donné un polygone irrégulier quelconque terminé par n côtés rectilignes, on peut construire *un polygone régulier* de 2^{n-1} côtés au plus de *moindre périmètre* et dont la surface soit supérieure ou au moins égale à celle du polygone proposé.

Démonstration. — Qu'on imagine, menées par les n sommets du polygone donné P_0, n droites parallèles entre elles par lesquelles la surface du polygone est divisée en $(n-1)$ trapèzes parallèles dont deux sont remplacés par des triangles. Si l'on transforme ces trapèzes parallèles d'après la méthode de Steiner dans le cinquième mode de démonstration (*Œuvres de Steiner*, t. II, p. 264), en conservant la longueur des côtés parallèles, leur distance, par un simple glissement le long des parallèles sur lesquelles ils se trouvent de manière à obtenir des trapèzes parallèles ayant un axe de symétrie, de tous ces trapèzes symétriques on forme un nouveau polygone P_1 (*fig.* 1).

Fig. 1.

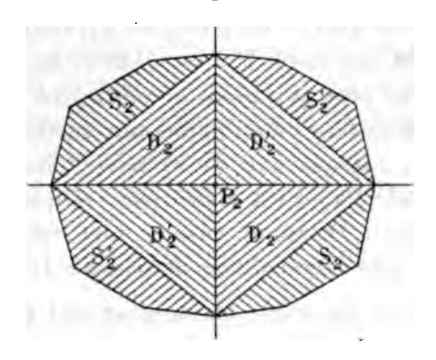


Le polygone P_1 a la même surface que P_0, mais un périmètre moindre : il a $2(n-1)$ côtés et est divisé par son axe de symétrie en deux moitiés symétriques, les segments de polygone S_1 et S'_1.

De la même manière qu'on a fait dériver le polygone P_1 du polygone P_0, faisons dériver du polygone P_1 un polygone P_2 en menant par les sommets de P_1 des parallèles à l'axe de symétrie.

Le polygone P_2 a même surface que P_0, mais un périmètre moindre. Il a au plus $4(n-2)$ côtés, et est séparé par ses deux

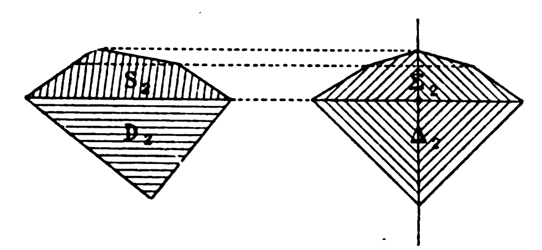
Fig. 2.



axes de symétrie en quatre parties symétriques deux à deux (*fig.* 2).

Chacune de ces *parties* a au plus $(n-2)$ côtés communs avec le périmètre de P_2. Considérons-en une seulement (*fig.* 3). Par

Fig. 3.



une diagonale passant par les deux sommets se trouvant sur les axes de symétrie on sépare la surface de ce segment de polygone en deux parties, à savoir un triangle rectangle D_2 et un segment polygonal S_2. On peut, en conservant son hypoténuse, changer le triangle rectangle D_2 en un autre triangle rectangle isoscèle Δ_2 qui aura une surface plus grande que D_2, ou égale dans le cas où D_2 lui-même était isoscèle.

Changeons le segment polygonal en choisissant l'hypoténuse du triangle D_2 pour base en menant par les sommets de S_2 des parallèles à cette hypoténuse, de manière à avoir un segment polygonal Σ_2 de même surface, de même base, possédant un axe de symétrie perpendiculaire à cette base. Ce segment polygonal en dehors de la base a au plus $2(n-3)$ côtés, et son périmètre n'est pas en tout cas plus grand que celui de S_2. Si maintenant de Δ_2 et de Σ_2 on forme le quart d'un polygone P_3, comme D_2 et S_2 forment le quart du polygone P_2, on obtient un polygone P_3 de $2^3(n-3)$ côtés au plus qui, ayant un périmètre moindre que P_0, a une plus grande surface ou au moins une surface égale.

Le polygone P_3 a quatre axes de symétrie, dont deux consécutifs, forment l'angle $\frac{1}{4}\pi$; il est divisé par ces quatre axes en *huit* parties symétriques. Divisons ensuite une de ces huit parties du polygone par une diagonale en un triangle D_3 ayant cette diagonale pour base et un angle au sommet égal à $\frac{\pi}{4}$ et en un segment polygonal S_3 qui, outre sa base commune avec le triangle D_3, a au plus $(n-3)$ côtés. Transformons le triangle D_3 en conservant sa base et l'angle au sommet en un triangle isoscèle Δ_3. Transformons de même le segment polygonal S_3 en un segment polygonal Σ_3 de même base, de même surface que S_3 et d'un périmètre moindre ou au plus égal, possédant un axe de symétrie perpendiculaire sur sa base, et ayant, outre cette base, au plus $2(n-4)$ côtés.

De Σ_3 et de Δ_3 formons la huitième partie d'un nouveau polygone P_4 qui, avec un périmètre moindre que P_0, a une surface plus grande ou au moins égale, qui possède huit axes de symétrie dont deux consécutifs font entre eux un angle égal à $\frac{1}{8}\pi$. Le nombre des côtés de ce polygone est au plus $2^4(n-4)$.

On peut continuer de cette manière. Le succès (étonnant) de cette construction consiste en ceci que l'opération, dans un certain sens, se termine nécessairement. A chaque opération, en effet, dans l'expression donnant le nombre des côtés du polygone, l'un des facteurs est doublé, l'autre diminuant d'une unité au moins et ne pouvant devenir plus petit que 1.

Après n opérations au plus la construction indiquée conduit donc à un polygone régulier P ayant au plus 2^{n-1} côtés qui avec un

moindre périmètre a une surface supérieure ou au moins égale à celle du polygone donné P_0.

Le théorème énoncé est par suite démontré.

2. Tout polygone régulier a une surface moindre que le cercle de même périmètre.

Démonstration. — Soit un polygone régulier P de périmètre U, soit R le rayon du cercle inscrit dans ce polygone.

Soit un cercle K dont le rayon sera R′ qui ait le périmètre U et soit U′ le périmètre du polygone régulier P′, circonscrit au cercle K et du même nombre de côtés que P.

De la similitude des polygones P et P′ il résulte

$$\frac{U}{U'} = \frac{R}{R'}.$$

Désignons par P, K, P′ les surfaces de ces trois figures, on a

$$P = \frac{1}{2} RU, \quad K = \frac{1}{2} R'U, \quad P' = \frac{1}{2} R'U'.$$

On a d'ailleurs $P' > k$, puisque la surface k est une partie de la surface P′. Par suite, on a ainsi $U' > U$, d'où aussi $R' > R$, donc $K > P$.

3. Des deux théorèmes I et II réunis, il résulte que tout polygone plan P_0, limité par des côtés rectilignes, a une surface moindre que le cercle de même périmètre.

Si l'on veut établir un théorème analogue pour une figure plane quelconque, limitée en tout ou en partie par des lignes courbes, on peut continuer comme il suit.

Changeons, d'après une des méthodes données par Steiner, la figure F, qui d'après l'hypothèse n'est pas un cercle, en une autre figure F′ de même périmètre, mais *de plus grande surface* que la figure F. Construisons ensuite un polygone rectiligne P_0 dont les sommets soient sur le périmètre de la figure F′ dont les côtés soient par suite des cordes de la ligne limitant F′, et dont la surface diffère de la surface de F′ *de moins* de l'excès de la surface F′ sur la surface F. Le polygone P_0 a alors sous un moindre périmètre une plus grande surface que F. Par suite du théorème précédent, le

polygone P_0 a une surface inférieure à celle du cercle de même périmètre, et à plus forte raison une surface inférieure à celle du cercle de même périmètre que la figure F. Par suite, la figure F dont la surface est inférieure à celle du polygone P_0 a une moindre surface que le cercle de même périmètre.

Dès lors le théorème énoncé au commencement est ainsi directement démontré. A. P.

SUR LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DES POINTS IMAGINAIRES;

PAR M. CYPARISSOS STEPHANOS.

On sait que les éléments imaginaires ont été introduits en Géométrie, par Poncelet et Chasles, pour les mêmes raisons que l'introduction des quantités imaginaires s'est imposée à l'analyse. Ces illustres géomètres se sont contentés toutefois d'examiner celles des propriétés de deux éléments imaginaires conjugués qui se rapportent d'une manière symétrique à ces deux éléments. De cette manière la question de la *séparation* de deux éléments imaginaires conjugués, question qui consiste à caractériser ces deux éléments par des propriétés *réelles* distinctes, restait intacte jusqu'à ce que von Staudt en eût fait connaître la solution dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* (¹).

Depuis, plusieurs travaux remarquables ont été consacrés à la théorie de Staudt (²). Il est pourtant fort à regretter que cette théorie ne soit pas encore suffisamment connue.

Il semble que, pour présenter cette théorie d'une manière appropriée aux habitudes les plus communes parmi ceux qui s'intéressent à la Géométrie, on ne saurait mieux faire que de l'établir en s'aidant de considérations analytiques. C'est ce que nous avons tâché de faire dans ce qui suit pour donner la définition géométrique des points imaginaires.

Je partirai de la définition analytique d'un point imaginaire,

---

(¹) Nürnberg, 1856, 1857, 1860 (en trois livraisons).

(²) Notamment celui de M. Lüroth : *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen* (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 145-214).

comme un point fictif dont les coordonnées sont imaginaires. Je supposerai, naturellement, que les formules relatives au changement des coordonnées, valables pour les points réels, le sont aussi pour les points imaginaires. Cela étant, je chercherai les propriétés réelles qui se rattachent à un point imaginaire et qui peuvent servir à le caractériser complètement.

Mais, avant d'aborder cette question même, je vais passer en revue certains faits qui rendront notre tâche plus aisée.

I.

1. Une droite doit être considérée, indépendamment de toute notion métrique, comme une ligne fermée pouvant être parcourue en entier par un point suivant deux sens différents.

On peut aller d'un point d'une droite à un autre point en suivant deux chemins continus différents, en se mouvant dans un sens ou dans l'autre, et décrivant ainsi l'une ou l'autre des deux portions de la droite aboutissant à ces deux points. Ainsi l'on ne peut définir un sens sur une droite qu'en donnant trois points A, B, C, qui indiquent trois positions successives d'un point qui se mouvrait toujours dans le même sens et parcourrait celle des deux portions de la droite aboutissant aux points A et C dans laquelle se trouve le point B.

2. Dans tout système réel de coordonnées établies sur une droite et servant à attribuer d'une manière uniforme les diverses valeurs d'un paramètre λ aux divers points de cette droite, il y a à distinguer trois points réels P_0, P_1, P_∞ correspondant respectivement aux valeurs $0, 1, \infty$ du paramètre λ, points qui jouent un rôle principal.

Le paramètre λ correspondant ainsi à un point réel P de cette droite est, comme on sait, égal au rapport anharmonique $(P_\infty P_0 P_1 P)$. Ce paramètre est positif ou négatif suivant que le sens $P_0 P P_\infty$ coïncide avec le sens $P_0 P_1 P_\infty$ ou bien avec le sens $P_\infty P_1 P_0$.

On voit ainsi qu'étant donné un système de coordonnées sur une droite, ayant pour points principaux P_0, P_1, P_∞, on peut appeler *sens positif* de la droite le sens $P_0 P_1 P_\infty$ et *sens négatif* le sens contraire $P_\infty P_1 P_0$. En d'autres termes, on peut désigner par + et —

les deux sens $P_0P_1P_\infty$ et $P_\infty P_1P_0$ respectivement. *Réciproquement* on peut attacher aux deux signes + et — les deux directions $P_0P_1P_\infty$ et $P_\infty P_1P_0$ respectivement. Ce dernier principe est d'une grande importance pour l'interprétation géométrique des imaginaires, comme nous le verrons bientôt.

3. Étant données sur une même droite deux séries homographiques de points, on sait que, lorsqu'un point de la première se meut dans un sens déterminé s_1, le point correspondant de la seconde se meut aussi dans un sens déterminé s_2, qui peut coïncider avec le sens $+s_1$ ou bien avec le sens $-s_1$. Pourtant, dans le cas où la correspondance homographique entre les deux séries est singulière, il n'en est plus ainsi. Dans ce cas, intermédiaire entre les deux précédents, à un point arbitraire de la première série correspond un point fixe de la seconde, tandis qu'à un certain point de la première correspond un point arbitraire de la seconde. De cette manière il n'y a plus moyen de lier entre eux par l'homographie considérée deux sens s_1 et s_2 attachés respectivement aux deux séries.

La relation qui existe entre les coordonnées p et q de deux points correspondants dans deux séries homographiques est de la forme

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2}.$$

Pour que cette correspondance homographique soit singulière il faut que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

de la substitution précédente soit nul.

On voit par là que, dans le cas où la correspondance homographique n'est point singulière, les deux sens s_1 et s_2 attachés par l'homographie sur les deux séries correspondantes doivent être identiques ou opposés suivant le signe de Δ. Il est du reste aisé de voir, en ayant égard au cas où la substitution précédente se réduit à $q = p$, que c'est le premier ou le second cas qui a lieu suivant que Δ est positif ou négatif.

Ainsi donc :

Si l'on a sur une droite une homographie réelle entre deux

points p et q, définie par la relation

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2},$$

les deux sens s_1 et s_2 de cette droite qui se correspondent, par cette homographie, seront identiques ou opposés suivant que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1,$$

est positif ou négatif.

4. Lorsqu'on a sur une droite deux systèmes différents de coordonnées, il convient de savoir comparer entre eux les sens positifs attachés à ces deux systèmes. La proposition précédente permet de trancher cette question lorsqu'on connaît la substitution

$$(1) \qquad \lambda = \frac{k_1 \mu + l_1}{k_2 \mu + l_2},$$

par laquelle on passe du premier système de coordonnées (λ) au second (μ).

Soient P_0, P_1, P_∞ les points principaux du premier système de coordonnées; Q_0, Q_1, Q_∞ ceux du second.

Il est aisé de voir que :

Le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$, attaché au premier système de coordonnées, coïncide avec le sens positif $Q_0 Q_1 Q_\infty$, ou bien avec le sens négatif $Q_\infty Q_1 Q_0$, attaché au second système de coordonnées, suivant que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

de la substitution (1) par laquelle on passe de l'un à l'autre de ces deux systèmes, est positif ou négatif.

Considérons en effet la correspondance homographique qui existe entre deux points P et Q liés entre eux par l'égalité des rapports anharmoniques

$$(Q_\infty Q_0 Q_1 Q) = (P_\infty P_0 P_1 P).$$

On voit que dans cette homographie aux points P_0, P_1, P_∞ correspondent respectivement les points Q_0, Q_1, Q_∞. Si maintenant p et q sont les paramètres μ de deux points correspondants P et Q,

on aura

$$p = (Q_\infty Q_0 Q_1 P),$$
$$q = (Q_\infty Q_0 Q_1 Q) = (P_\infty P_0 P_1 P).$$

De là on voit que q est égal au paramètre λ du point P dont le paramètre μ est égal à p. La correspondance entre P et Q sera donc définie dans le second système de coordonnées (μ), par la relation

$$q = \frac{k_1 p + l_1}{k_2 p + l_2}.$$

Maintenant on peut remarquer que, d'après le numéro précédent, le sens $P_0 P_1 P_\infty$ attaché à la première série est identique ou opposé au sens $Q_0 Q_1 Q_\infty$ attaché à la seconde, suivant que le déterminant

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1$$

est positif ou négatif. C'est bien cela qu'il nous fallait démontrer (¹).

II.

5. Deux points imaginaires conjugués sont toujours situés sur une droite réelle sur laquelle ils définissent une involution quadratique ayant ces deux points pour points doubles. Cette involution suffit évidemment pour déterminer le couple des points imaginaires conjugués dont il est ainsi le représentant géométrique réel.

Si

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = 0$$

est l'équation qui fournit les paramètres x des deux points imaginaires conjugués (pris par rapport à un système de coordonnées réelles établi sur la droite réelle qui porte ces points), la correspondance involutive dont il s'agit sera

$$a_0 xy + a_1 x + a_1 y + a_2 = 0.$$

(¹) Aux propositions précédentes (nᵒˢ 3 et 4) se trouve intimement lié ce fait connu : qu'étant donnés trois points A, B, C d'une droite, correspondant aux valeurs a, b, c du paramètre λ, le sens ABC est identique ou opposé au sens $P_0 P_1 P_\infty$ suivant que la quantité

$$(b - a)(c - a)(c - b)$$

est positive ou négative.

Une pareille involution a cette propriété caractéristique que si l'on considère deux points x et y qui se correspondent dans cette involution, lorsque le point x se meut dans un sens déterminé, le point y se meut aussi dans le même sens.

C'est précisément ce fait qui a été utilisé par Staudt pour la séparation des deux points doubles d'une pareille involution, puisqu'il a défini un point imaginaire comme *représenté par une involution quadratique (entre les points d'une droite réelle) sans points doubles réels, involution supposée décrite dans un sens déterminé.*

Cela revient à dire que, étant donnés deux points imaginaires conjugués, représentés par une involution quadratique sans points doubles réels, on peut séparer ces deux points entre eux en leur attachant respectivement, et cela d'une manière bien tranchée, les deux sens différents suivant lesquels la droite réelle qui les porte peut être décrite.

C'est à la démonstration de ce que, de cette manière, on arrive à séparer entre eux deux points imaginaires conjugués que je passe maintenant. Mais, à côté de cette démonstration, nous aurons à observer certains faits qui permettent de constater la liaison intime qui existe entre le fait de la concordance de deux sens qui se correspondent dans une involution quadratique à points doubles imaginaires et de ce que l'adjonction de sens différents à deux points imaginaires conjugués répond bien à une propriété effective de ces points, liaison qui justifie l'énoncé sous lequel Staudt a présenté la définition des points imaginaires.

6. *Soient deux points imaginaires conjugués* P' *et* P'', *et supposons que ces points aient, dans un système de coordonnées* (P_0, P_1, P_∞) *établi sur la droite réelle qui joint ces points, pour paramètres* λ :

$$\lambda' = a + bi \quad \text{et} \quad \lambda'' = a - bi.$$

Je dis que, si b *est positif, on peut distinguer entre eux les points* P' *et* P'' *en attachant au premier point le sens* $P_0 P_1 P_\infty$ *et au second le sens opposé* $P_\infty P_1 P_0$, et cela par la considération de ce que le coefficient de i dans le paramètre λ du premier point est positif, tandis qu'il est négatif dans le paramètre du second point (conformément au principe du n° 2).

Pour prouver que cette manière d'attacher des sens différents à deux points imaginaires conjugués n'est point arbitraire, mais correspond à une propriété effective de ces points, je vais montrer que *les sens ainsi attachés à deux points imaginaires conjugués sont indépendants du choix des coordonnées.*

Soit

$$\varphi = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$$

l'équation ayant pour valeurs les deux paramètres $\lambda' = x'_1 : x'_2$ et $\lambda'' = x''_1 : x''_2$. Le premier membre de cette équation doit naturellement conserver un même signe pour tout système de valeurs réelles de x_1 et x_2; ce signe sera celui des coefficients a_0 et a_2. Je désignerai par ε l'unité réelle précédée par ce signe.

En supposant maintenant qu'au point P' correspond, d'après ce qui précède, le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$ et au point P'' le sens opposé, on devra avoir

$$\begin{cases} \lambda' = \dfrac{x'_1}{x'_2} = -\dfrac{a_1}{a_0} + i\dfrac{\varepsilon}{a_0}\sqrt{D}, \\ \lambda'' = \dfrac{x''_1}{x''_2} = -\dfrac{a_1}{a_0} - i\dfrac{\varepsilon}{a_0}\sqrt{D}, \end{cases}$$

où

$$D = a_0 a_2 - a_1^2,$$

pour que le coefficient de i dans la valeur de λ' soit positif.

Rapportons maintenant les deux points P' et P'' à un second système de coordonnées $\left(\mu = \dfrac{y_1}{y_2}\right)$. Soit

$$\lambda = \frac{k_1 \mu + l_1}{k_2 \mu + l_2}$$

ou bien

$$\begin{cases} x_1 = k_1 y_1 + l_1 y_2, \\ x_2 = k_2 y_1 + l_2 y_2, \end{cases}$$

la substitution qui permet de passer du premier système de coordonnées au second. Le déterminant de cette substitution sera

$$\Delta = k_1 l_2 - k_2 l_1.$$

L'équation quadratique $\varphi = 0$, transformée par cette substitution, deviendra

$$\Phi = A_0 y_1^2 + 2 A_1 y_1 y_2 + A_2 y_2^2 = 0,$$

étant posé

$$A_0 = a_0 k_1^2 + 2a_1 k_1 k_2 + a_2 k_2^2,$$
$$A_1 = a_0 k_1 l_1 + a_1 k_1 l_2 + a_1 k_2 l_1 + a_2 k_2 l_2,$$
$$A_2 = a_0 l_1^2 + 2a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2.$$

Quant aux deux racines λ' et λ'' de l'équation $\varphi = 0$, elles sont transformées respectivement par la même substitution en

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mu' &= \frac{y_1'}{y_2'} = -\frac{A_1}{A_0} + i\frac{\varepsilon\Delta}{A_0}\sqrt{D}, \\ \mu'' &= \frac{y_1''}{y_2''} = -\frac{A_1}{A_0} - i\frac{\varepsilon\Delta}{A_0}\sqrt{D}. \end{aligned} \right.$$

Comme maintenant $\frac{\varepsilon}{A_0}$ est toujours positif, on voit que ce n'est que lorsque Δ devient négatif qu'il arrive que les signes des coefficients de i dans ces valeurs de μ' et μ'' ne soient pas les mêmes que les signes des coefficients correspondants dans les valeurs de λ', λ''. Or, en ayant égard au résultat du n° 4, d'après lequel c'est seulement lorsque Δ devient négatif que le sens positif $Q_0 Q_1 Q_\infty$, relatif au système de coordonnées μ, cesse d'être le même que le sens positif $P_0 P_1 P_\infty$, relatif au système λ, pour devenir identique avec l'opposé de celui-ci, on voit que les sens que nous avons attachés respectivement à deux points imaginaires d'une droite, quoique définis nécessairement par une propriété de leurs coordonnées, restent les mêmes de quelque manière que l'on change le système de coordonnées. Ainsi se trouve démontrée la proposition très importante énoncée au commencement du présent numéro.

7. On peut aussi interpréter d'une autre manière les formules du numéro précédent, relatives à la transformation par une substitution linéaire des paramètres de deux points imaginaires conjugués. On peut en effet supposer que cette substitution représente, non plus un changement de coordonnées, mais une correspondance homographique entre deux points dont les paramètres (dans un même système ou dans des systèmes différents de coordonnées) sont λ et μ. On arrive ainsi au résultat important suivant :

Si l'on considère deux séries homographiques de points (pouvant être situés sur deux droites différentes) et que l'on

envisage le sens s_2 dans lequel la seconde série est décrite lorsque la première série est décrite dans un sens déterminé s_1, à tout point imaginaire de la première série attaché au sens $+s_1$ (ou au sens $-s_1$) correspondra dans la seconde un point imaginaire attaché au sens $+s_2$ (ou au sens $-s_2$).

La proposition précédente ne saurait évidemment avoir une signification bien précise, sans la démonstration préalable de l'indépendance des sens attachés, d'après ce qui précède, à deux points imaginaires conjugués du choix particulier du système de coordonnées. Il est pourtant à remarquer que cette indépendance ne saurait non plus exister sans que la proposition dont il s'agit eût lieu en même temps, puisqu'on a là deux faits qui ne constituent que deux interprétations différentes d'un même fait analytique.

A la proposition précédente on peut rattacher ce fait, que *lorsqu'on a sur une droite deux séries homographiques dont les deux points communs sont imaginaires, les deux sens s_1 et s_2 correspondants de ces deux séries coïncident.* Dans le sens où les deux séries sont en situation involutive, on obtient précisément la propriété utilisée par Staudt dans sa définition des points imaginaires (n° 5).

8. Étant données deux séries homographiques de points, considérons un couple de points imaginaires conjugués de la première et le couple des points correspondants de la seconde. Il est clair que l'involution ayant pour points doubles les points du second couple sera la *transformée,* par l'homographie considérée, de l'involution déterminée par le premier couple, c'est-à-dire que deux points associés de cette seconde involution seront les transformés (les correspondants), par l'homographie, de deux points associés de la première involution.

D'après cela, étant donnée une homographie réelle à points fondamentaux (points se correspondant à eux-mêmes) imaginaires, chercher ces points fondamentaux, c'est chercher les involutions à points doubles imaginaires, qui sont échangeables avec cette homographie, qui, en d'autres termes, sont *transformées* en elles-mêmes par cette homographie. Il n'y a naturellement qu'une seule involution ayant cette propriété, c'est l'involution ayant pour

points doubles les points fondamentaux de l'homographie proposée ([1]).

9. Il peut paraître arbitraire de vouloir employer, pour la représentation géométrique de deux points imaginaires conjugués, l'involution quadratique ayant ces points pour points doubles, plutôt que toute autre homographie ayant ces mêmes points pour points fondamentaux. Un tel procédé de représentation, en dehors d'autres inconvénients, présenterait encore celui-ci, que l'homographie ayant deux points imaginaires conjugués pour points fondamentaux serait transformée en son inverse par toute involution qui échange entre eux ces deux points imaginaires. Cependant, si cette homographie était *cyclique,* c'est-à-dire si, répétée un certain nombre k de fois ($k > 2$), elle donnait l'homographie identique, qui fait correspondre chaque point à soi-même, on pourrait définir le couple des points imaginaires non plus par cette homographie, mais par un quelconque des groupes de k points obtenus par l'application répétée de cette homographie à un même point réel. En prenant les points successifs d'un pareil groupe dans un sens ou dans l'autre, on aurait la représentation de l'un ou de l'autre des deux points imaginaires conjugués. Ce procédé a été indiqué par M. F. Klein (*Göttinger Nachrichten,* 1872, p. 373), et exposé géométriquement par M. Lüroth (*Math. Annalen,* vol. XI, 1877, p. 84-110) ([2]).

([1]) On sait que dans le cas où une homographie est involutive, en dehors de l'involution ayant pour points doubles les points fondamentaux de l'homographie, il y a encore une infinité d'autres involutions réelles qui lui sont échangeables. Toutefois, ces involutions ont leurs points doubles réels et constituent des points associés dans l'homographie involutive proposée.

([2]) En dehors des travaux déjà cités, on pourra aussi consulter, au sujet de la définition géométrique des éléments imaginaires, le Mémoire de M. Stolz : *Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytische Geometrie* (*Math. Annalen,* Vol. IV, 1871), ainsi que le travail de M. August : *Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie* (*Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin,* 1872).

PREMIÈRE PARTIE.

[illegible] DE LA FORMULE DE M. TCHEBYCHEF [illegible] INTÉGRALE DÉFINIE PAR [illegible]

[illegible]

[illegible] Pétersbourg.

[illegible] Société *mathématique de* [illegible] donné une formule [illegible]

[illegible] continues entre les [illegible] restant positive entre [illegible] dont le terme général est

[illegible]

[illegible] rang ($m+1$), ob- [illegible] de l'intégrale

[illegible]

[illegible] M. Tchebychef donne [illegible] de R_n. [illegible] la quantité

[illegible]

A, B étant les plus grandes valeurs absolues des dérivées d'ordre n $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$, entre les limites d'intégration;

2° Si les dérivées d'ordre n des fonctions u et v ne changent pas de signe entre les limites d'intégration, le signe de R_n est celui du produit

$$\frac{d^n u}{dx^n}\frac{d^n v}{dx^n}.$$

Dans le cas particulier de $n = 1$, $\theta = 1$, la seconde propriété se réduit au théorème de M. Tchebychef, démontré par M. Korkine dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XCVI, n° 5; l'expression exacte du terme complémentaire pour ce même cas particulier a été donnée par M. Andréief dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkof* (mars 1883), et se déduit aussi simplement de l'identité donnée par M. Korkine (*loc. cit.*).

Dans la Note suivante, nous donnerons la valeur exacte du terme complémentaire R_n pour le cas le plus général, et la démonstration des propriétés mentionnées plus haut.

Pour abréger l'écriture, nous désignerons toujours par fx, φx, ψx, ... les diverses fonctions de x, que nous aurons à considérer, en omettant les parenthèses; en outre, comme toutes les intégrales dans les formules suivantes seront prises entre les mêmes limites a et b, nous omettrons la désignation de ces limites en écrivant

$$\int fx\,dx \quad \text{au lieu de} \quad \int_a^b fx\,dx.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des quantités indépendantes quelconques, comprises entre les limites a et b et fx, φx deux fonctions continues entre les mêmes limites. Introduisons les notations suivantes :

$$\Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1 & \psi_{n-1}x_2 & \ldots & \psi_{n-1}x_{n+1} \\ \psi_{n-2}x_1 & \psi_{n-2}x_2 & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_1 & \psi_1 x_2 & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$\psi_1 x, \psi_2 x, \ldots, \psi_{n-1} x$ étant les fonctions entières, définies comme il a été dit plus haut.

$\Delta_{n-1}(\varphi)$ est le déterminant obtenu de $\Delta_{n-1}(f)$, si l'on y remplace la fonction fx par φx,

$$(3) \qquad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1 & \psi_{n-1}x_2 & \ldots & \psi_{n-1}x_n \\ \psi_{n-2}x_1 & \psi_{n-2}x_2 & \ldots & \psi_{n-2}x_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad \prod_1^n \theta x_i\, dx_i = \theta x_1\, \theta x_2, \ldots, \theta x_n\, dx_1\, dx_2, \ldots, dx_n,$$

θx étant une fonction restant positive entre les limites a et b;

$$(5) \qquad I_{n-1}(f, \varphi) = \int^{(n+1)} \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i,$$

le signe $\int^{(n+1)}$ désignant l'intégrale multiple d'ordre $(n+1)$, toutes les intégrations étant effectuées entre les limites a et b,

$$(6) \qquad I_{n-1} = \int^{(n)} \Delta_{n-1}^2 \prod_1^n \theta x_i\, dx_i.$$

Nous allons déduire une formule de réduction de l'intégrale $I_{n-1}(f, \varphi)$, formule qui nous conduira immédiatement à la formule de M. Tchebychef avec le terme complémentaire. Pour cela, décomposons les déterminants $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ d'après les éléments de la première ligne; nous aurons

$$\Delta_{n-1}(f) = \psi_{n-1}x_1\,A_1 + \psi_{n-1}x_2\,A_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1}\,A_{n+1},$$
$$\Delta_{n-1}(\varphi) = \psi_{n-1}x_1\,B_1 + \psi_{n-1}x_2\,B_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1}\,B_{n+1};$$

A_i, B_i étant les déterminants mineurs, indépendants de x_i.

Effectuant le produit de

$$\Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi),$$

on aura

$$(7) \qquad \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) = \sum_{(i)} \psi_{n-1}^2 x_i\,A_i B_i + \sum_{(i,k)} \psi_{n-1}x_i\,\psi_{n-1}x_k\,A_i B_k.$$

La première somme contient $(n+1)$ termes, dont chacun s'ob-

tient du premier par un échange des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la seconde s'étend sur toutes les combinaisons des valeurs 1, 2, ..., $(n+1)$ de i et k, inégales entre elles, et contient évidemment $n(n+1)$ termes dont chacun s'obtient du premier par un échange des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Multipliant les deux membres de l'égalité (7) par $\prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i$ et intégrant $(n+1)$ fois entre les limites a et b, nous aurons, d'après ce qui a été dit, la formule qui suit :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I}_{n-1}(f,\varphi) &= (n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1}^2 x_1 \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i \\ &\quad + n(n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1}x_1 \psi_{n-1}x_2 \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_2 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant transformer le second membre de la formule (8). En mettant pour A_1, B_1, B_2 leurs valeurs, savoir :

$$\mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_2 & \psi_{n-2}x_3 & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \psi_{n-3}x_2 & \psi_{n-3}x_3 & \ldots & \psi_{n-3}x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ fx_2 & fx_3 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B}_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_2 & \psi_{n-2}x_3 & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \psi_{n-3}x_2 & \psi_{n-3}x_3 & \ldots & \psi_{n-3}x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi x_2 & \varphi x_3 & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B}_2 = -\begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_1 & \psi_{n-2}x_3 & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \psi_{n-3}x_1 & \psi_{n-3}x_3 & \ldots & \psi_{n-3}x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi x_1 & \varphi x_3 & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix},$$

on voit immédiatement que le premier terme du second membre de la formule (8) se réduit à

$$\begin{aligned} &(n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx \int^{(n)} \Delta_{n-2}(f)\,\Delta_{n-2}(\varphi) \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i \\ &= (n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx\, \mathrm{I}_{n-2}(f,\varphi), \end{aligned}$$

conformément aux notations (2) et (5).

Pour réduire le second terme du second membre de (8), rappelons d'abord que, d'après la propriété fondamentale des fonctions $\psi_m x$, on a

$$(9) \qquad \int \psi_m x\, \omega x\, \theta x\, dx = 0,$$

ωx désignant une fonction entière quelconque de degré égal ou inférieur à $m - 1$. Cela posé, remarquant que A_1 est indépendant de x_1 et B_2 de x_2, écrivons le second terme de la formule (8) de la manière suivante :

$$(10) \qquad n(n+1)\int^{(n-1)} \left(\int \psi_{n-1} x\, B_2\, \theta x_1\, dx_1 \int \psi_{n-1} x_2\, A_1\, \theta x_2\, dx_2\right) \prod_3^{n+1} \theta x_i\, dx_i.$$

Or,

$$A_1 = \quad (-1)^{n+1} f x_2 \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_3 & \psi_{n-2} x_4 & \cdot\ \cdot & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_3 & \psi_{n-3} x_4 & \dots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \rho x_2,$$

$$B_2 = -(-1)^{n+1} \varphi x_1 \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_3 & \psi_{n-2} x_4 & \dots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_3 & \psi_{n-3} x_4 & \dots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \sigma x_1.$$

ρx et σx étant des fonctions entières de x de degré $(n-2)$, on voit, en vertu de l'équation (9), que la quantité (10) se réduit à

$$n(n+1)\int f x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int^{(n-1)} \Delta_{n-2}^2 . \prod_1^{n-1} \theta x_i\, dx_i$$

$$= n(n+1)\, I_{n-2} . \int f x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx.$$

Par conséquent, la formule (8) nous donne

$$(11) \quad \begin{cases} I_{n-1}(f, \varphi) = (n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx . I_{n-2}(f, \varphi) \\ \qquad - n(n+1)\, I_{n-2} \int f x\, \psi_{n-1}\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx. \end{cases}$$

En faisant ici une hypothèse particulière sur les fonctions fx,

φx, savoir

$$fx = \varphi x = \psi_{n-1} x,$$

on aura, remarquant que dans ce cas $I_{n-1}(f, \varphi)$ se réduit à zéro, et $I_{n-2}(f, \varphi)$ à I_{n-1}, la formule

$$I_{n-1} = n I_{n-2} \int \psi_{n-1}^2 x \, \theta x \, dx,$$

en vertu de laquelle la formule (11) se réduit à la forme

$$(12) \quad \frac{I_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1) I_{n-1}} = \frac{I_{n-2}(f, \varphi)}{n I_{n-2}} - \frac{\int fx \, \psi_{n-1} x \, \theta x \, dx \int \varphi x \, \psi_{n-1} x \, \theta x \, dx}{\int \psi_{n-1}^2 x \, \theta x \, dx},$$

Posant successivement $n = 2, 3, \ldots, n$, ajoutant les résultats et remarquant que

$$\frac{I_0(f, \varphi)}{2 I_0} = \frac{\int\int (fx_2 - fx_1)(\varphi x_2 - \varphi x_1) \theta x_1 \, \theta x_2 \, dx_1 \, dx_2}{2 \int \theta x \, dx}$$

$$= \int fx \, \varphi x \, \theta x \, dx - \frac{\int fx \, \theta x \, dx \int \varphi x \, \theta x \, dx}{\int \theta x \, dx},$$

on obtient

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int fx \, \varphi x \, \theta x \, dx \\ & = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int fx \, \psi_{n-1} x \, \theta x \, dx \int \varphi x \, \psi_{n-1} x \, \theta x \, dx}{\int \psi_{n-1}^2 x \, \theta x \, dx} + \frac{I_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1) I_{n-1}}, \end{aligned} \right.$$

convenant de poser $\psi_0 x = 1$.

C'est précisément la formule de M. Tchebychef avec le terme complémentaire

$$(14) \qquad R_n = \frac{I_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1) I_{n-1}}.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons simplifier l'expression de R_n. Considérant les déterminants $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$, et remarquant

que la fonction entière $\psi_{n-1}x$ peut se mettre sous la forme

$$\psi_{n-1}x = C_{n-1}x^{n-1} + a_0\psi_{n-2}x + a_1\psi_{n-3}x + \ldots + a_{n-2},$$

$C_{n-1}, a_0, a_1 \ldots a_{n-2}$ étant des constantes. Nous pouvons remplacer les premières lignes de ces déterminants par

$$C_{n-1}x_1^{n-1} \quad C_{n-1}x_2^{n-1} \quad \ldots \quad C_{n-1}x_{n+1}^{n-1}$$

en vertu des propriétés connues des déterminants; en général, la ligne

$$\psi_m x_1 \quad \psi_m x_2 \quad \ldots \quad \psi_m x_{n+1}$$

pourra être remplacée par

$$C_m x_1^m \quad C_m x_2^m \quad \ldots \quad C_m x_{n+1}^m,$$

C_m étant le coefficient de x^m dans $\psi_m x$. En faisant la même réduction des éléments dans le déterminant Δ_{n-1} et divisant les deux membres de la fraction (14) par $(C_{n-1}.\, C_{n-2} \ldots C_1)^2$, on aura

$$(15) \qquad R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_{n-1}(f)\, D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i}{(n+1)\int^{(n)} D_{n-1} \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i}$$

où

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Passant à la démonstration des propriétés de R_n, nous allons d'abord établir à l'égard des déterminants de la forme $D_{n-1}(f)$ la proposition très simple qui suit :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ désignent des quantités indépendantes et fx une fonction quelconque, continue pour toutes les valeurs de x, comprises entre la plus petite et la plus grande des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, on aura

$$(16) \quad D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_1)f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}$$

ou

$$D_{n-1}(f) = \frac{D_n . f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}$$

$f^{(n)}x$ étant la dérivée $n^{\text{ième}}$ de fx, et ξ un nombre moyen entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}.$$

Cette proposition est évidente pour $n = 1$, car

$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ fx_1 & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1)f'\xi.$$

Donc, pour nous assurer de l'exactitude de la proposition énoncée, il suffit de prouver que, étant supposée vraie pour une certaine valeur de n, elle le sera aussi pour la valeur de n immédiatement supérieure. Suivant cette voie, transformons $D_{n-1}(f)$ comme il suit :

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1 & fx_3 - fx_1 & \dots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1 \dots (x_{n+1} - x_1)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_{n+1} + x_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} + x_1 x_2^{n-3} + \dots x_1^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2} + x_1 x_{n+1}^{n-3} + \dots + x_1^{n-2} \\ \dfrac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} & \dots & \dfrac{fx_{n+1} - fx_1}{x_{n+1} - x_1} \end{vmatrix},$$

ou, retranchant des éléments de chaque ligne lès éléments correspondants des lignes précédentes, multipliés par les mêmes facteurs, et désignant par Fx la fonction

$$\frac{fx - fx_1}{x - x_1},$$

nous aurons

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1) \dots (x_{n+1} - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2} \\ Fx_2 & Fx_3 & \dots & Fx_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Supposant la proposition énoncée vraie pour le déterminant d'ordre n qui figure dans la formule précédente, on aura

$$(17)\quad D_{n-1}(f) = \frac{(x_2 - x_1) \dots (x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n) F^{(n-1)}\eta}{1.2 \dots (n-1)},$$

η étant un nombre moyen entre les quantités $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$.

D'ailleurs,

$$Fx = (fx - fx_1)(x - x_1)^{-1}.$$

Donc, appliquant la formule de Leibnitz, on aura

$$\begin{aligned} F^{(n-1)}x &= (x - x_1)^{-1} f^{(n-1)}x \\ &\quad - (n-1)(x - x_1)^{-2} f^{(n-2)}x \\ &\quad + (n-1)(n-2)(x - x_1)^{-3} f^{(n-3)}x \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} 1.2 \dots (n-1)(x - x_1)^{-n}(fx - fx_1) \\ &= 1.2 \dots (n-1) \frac{fx_1 - fx - (x_1 - x) f'_x - \dots - (x_1 - x)^{n-1} f^{n-1}x}{(x_1 - x)^n} \\ &= \frac{1.2 \dots (n-1) f^{(n)}\zeta}{1.2 \dots n}, \end{aligned}$$

ζ étant un nombre moyen entre x_1 et x.

Par conséquent, désignant par ξ un nombre intermédiaire entre η_1 et x_1, on aura

$$\frac{F^{(n-1)}(\eta_1)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n},$$

et la formule (17) donnera

$$D_{n-1}(f) = \frac{(x_2-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_1)f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n},$$
$$= \frac{D_n f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n},$$

ce qui démontre la formule (16).

Cette formule nous permet de mettre l'expression de R_n, donnée par la formule (15), sous la forme

$$(18)\qquad R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 f^{(n)}\xi\,\varphi^{(n)}\xi_1 \prod_1^{n+1} \theta x_i\,dx_i}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \theta x_i\,dx_i}.$$

ξ, ξ_1 étant des nombres variables, restant entre les limites d'intégration. La seconde des deux propriétés de R_n, mentionnées au commencement de la note, est évidente d'après la forme même sous laquelle se présente R_n dans la formule (18).

Pour avoir la première, remarquons que, d'après la formule (18), on voit que la valeur absolue de R_n ne surpasse jamais la quantité

$$(19)\qquad Q^2AB = \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod_1^{n+1} \theta x_i\,dx_i}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \theta x_i\,dx_i} AB.$$

A, B étant les plus grandes valeurs absolues de $f^{(n)}x$, $\varphi^{(n)}x$ entre les limites d'intégration. D'un autre côté, si l'on pose dans la formule (13) $fx = \varphi x = \psi_n x$, tous les termes du second membre, à l'exception de R_n, se réduisent à zéro; d'après la propriété fondamentale des fonctions $\psi_m x$, R_n se réduit à

$$Q^2(1.2\ldots n\,C_n)^2$$

à cause de

$$f^{(n)}x = \varphi^{(n)}x\,\psi = \psi^{(n)}x = 1.2\ldots n\,C_n,$$

et la formule (13) donnera

$$\int \psi_n^2 x\,\theta x\,dx = Q^2(1.2\ldots n.C_n)^2;$$

par conséquent, la quantité (19) prend la forme

$$\frac{\int \psi_n^2 x\,\theta x\,dx}{(1.2\ldots n.C_n)^2}\,AB = \frac{\int \psi_n^2 x\,\theta x\,dx}{\left(\dfrac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2}\,AB,$$

ce qui démontre la première propriété de R_n.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOSSFELD (C.). — Construction des Kegelschnitts aus fünf zum Teil imaginären Curvenelementen. *Inaugural-Dissertation*, 27 p. in-4°. Iena, 1882.

L'auteur résout, par des considérations appartenant à la Géométrie synthétique et en se plaçant au point de vue de von Staudt, les problèmes relatifs à la construction d'une conique connaissant cinq éléments; ces éléments sont ou des points ou des tangentes; deux éléments de même nature peuvent d'ailleurs être imaginaires conjugués; l'auteur suppose alors ces éléments donnés, s'il s'agit de points, par une suite de points en involution à points doubles imaginaires, et, s'il s'agit de tangentes, par un faisceau de droites en involution à rayons doubles imaginaires.

Léon RODET. — Les prétendus problèmes d'Algèbre, ou Manuel du Calculateur égyptien. Paris, in-8°, 122 p.; 1882.

Ce travail a été suggéré à l'auteur par les *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik* de M. Cantor. Résumons donc, d'après ce Livre, l'état de la Science égyptienne autant qu'elle est connue aujourd'hui.

Le manuel d'Aahmes est l'unique document mathématique que nous possédons de cette époque; il est connu sous le nom de *Papyrus Rhind* (c'est le nom du premier éditeur) ou de *Papyrus Eisenlohr* (c'est le nom du traducteur). D'après M. Cantor, ce serait un Ouvrage essentiellement pratique, composé pour les marchands, sous le règne de Ra-a-us, l'Apophis des Grecs, appartenant à la dynastie des Hi-Ksos, c'est-à-dire entre 2000 et 1700 avant J.-C. On y verrait une arithmétique des fractions assez singulière. Les Égyptiens calculeraient seulement avec les fractions de l'unité (il faut excepter $\frac{2}{3}$). Étant incapables d'en écrire d'autres, ils seraient forcés de réduire toutes les fractions à numérateurs quel-

conques en sommes de fractions d'unité, et c'est pour faciliter cette opération, évidemment la plus importante de leur arithmétique des fractions, que l'on avait dressé le tableau par lequel commence le papyrus. Mais, malgré de si grandes difficultés, les Égyptiens auraient su exécuter avec leurs fractions un grand nombre d'opérations; ils les ajoutaient, par exemple, en les réduisant à un dénominateur commun. Ils auraient de même connu les équations du premier degré, et l'on trouverait quelques questions impliquant la connaissance des progressions arithmétique et géométrique. Les calculs simples auraient été faits à l'aide des doigts; pour les cas compliqués, à l'aide d'un instrument quelconque. En Géométrie et en Stéréométrie, ils auraient cherché à transformer le cercle en carré; leur quadrature conduit à la valeur $\pi = 3,1604$. Ils auraient connu aussi la mesure du rectangle; quant au triangle, ils calculaient son aire d'après la formule $\Delta = a\frac{b}{2}$, formule qui, dans certains cas, ne présente pas un très grand écart de $\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Ils auraient enfin appliqué la théorie des proportions à la section de la pyramide droite : ce seraient les premières traces de la Trigonométrie.

Tel est, en résumé, le contenu du papyrus Aahmes, d'après M. Cantor. Les études que nous allons analyser ne s'attachent qu'à la partie arithmétique et particulièrement aux problèmes qui, d'après MM. Cantor et Eisenlohr, sont déjà de l'Algèbre.

L'idée maîtresse qui a guidé M. Rodet dans ses recherches est celle de la persistance des procédés mathématiques. Il retrouve les traces de la manière du scribe égyptien dans les manuels grecs, arabes, hindous, persans, hébreux, jusque dans Léonard de Pise, et ces écrits, en général plus explicites, lui servent à élucider les points obscurs du livre de Aahmes.

C'est sur les problèmes Seghom (M. Cantor écrit Seqem) que les investigations de M. Rodet se portent en premier lieu. Dans ces problèmes, le scribe égyptien se servait, d'après les savants allemands cités, de l'opération que nous nommons aujourd'hui *réduction au même dénominateur*. Or, d'après M. Rodet, il n'en est rien. Tout comme Mahmoud, de Hérat, et Aben Ezra, dont l'auteur cite de nombreux exemples, Aahmes a d'abord cherché un



nombre assez grand pour qu'il pût en tirer ses fractions comme nombres entiers ou à peu près entiers ; ce nombre (*môré* en hébreu et *mokhraj* en arabe), l'auteur le nomme *bloc extractif*. Le nombre trouvé, on substituait aux fractions des nombres entiers et l'on procédait en sommant ces derniers. La somme obtenue ainsi était divisée par le bloc extractif et donnait le résultat vrai. Pour faire mieux ressortir la différence qui existe entre ce procédé et celui que nous employons maintenant, l'auteur cite Bhaskâra, contemporain de Aben Ezra, dont les procédés élégants se rapprochent beaucoup des nôtres. Mais son argument principal consiste en ce que les nombres substitués aux fractions n'étaient souvent qu'à peu près entiers, tandis que des fractions avec un numérateur fractionnaire étaient parfaitement inconnues dans l'antiquité.

Il n'y a pas moins de divergence entre MM. Cantor et Rodet quant à la nature même de ces problèmes. Le n° 23 essayait, d'après M. Cantor, de compléter par addition les fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{45}$ à $\frac{2}{3}$; Aahmes aurait fait l'addition des fractions données, aurait retranché leur somme $\left(\frac{23\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{3}}{45}\right)$ du chiffre indiqué $(\frac{2}{3})$ et décomposé le reste $\left(\frac{6\frac{1}{8}}{45}\right)$ en deux fractions $(\frac{1}{9}, \frac{1}{40})$. D'après M. Rodet, au contraire, Aahmes a choisi un bloc extractif (45), substitué aux fractions des nombres entiers $(11\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}\frac{1}{8}, 4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1)$, pris leur somme $(23\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8})$ et, pour produire le « manquant » $(6\frac{1}{8})$, fait croître le bloc extractif jusqu'à ce qu'il eût obtenu le chiffre demandé, ce qui lui a donné également pour résultat $\frac{1}{9}\frac{1}{40}$. Le doute est possible dans ce problème, parce que le calcul y est fort peu explicite, par suite d'un manque de place, d'après M. Rodet ; mais il nous montre, par l'analyse des problèmes n°s 21 et 22, que ces procédés étaient bien ceux du scribe égyptien.

Viennent ensuite les douze premiers calculs du même Chapitre qui, d'après M. Cantor, enseigneraient la complétation par multiplication. Ils servent, nous dit au contraire M. Rodet, à démontrer empiriquement le lemme : « Lorsqu'on fait subir une même opération à diverses quantités, les résultats obtenus varient dans le même rapport que les quantités d'où l'on part. » On fait subir aux quantités multiples ou sous-multiples l'une de l'autre

deux opérations : l'une consiste à y ajouter sa moitié et son quart, tandis que dans l'autre on y ajoute ses deux tiers et puis son tiers; au moins c'est ainsi que cette dernière opération se présente sur le papyrus ; mais M. Rodet présume que son sens primitif consistait à ajouter les deux tiers et à retrancher le tiers, ce qui a été changé par le copiste.

Nous abordons enfin ces problèmes *Hau* ou de la quantité, auxquels les précédents servent simplement d'introduction. C'est ici que M. Cantor a cru trouver des procédés algébriques : les calculs sont, d'après lui, des équations du premier degré à une inconnue, exécutées à peu près comme nous le faisons aujourd'hui, c'est-à-dire qu'on sommait les coefficients de l'inconnue pour ramener l'équation à la forme $\frac{a}{b}x = e$, et l'on divisait par cette somme des coefficients le nombre connu (l'inconnue se trouvant naturellement dégagée dans tous ces problèmes). Ces procédés algébriques, M. Rodet les a vainement cherchés dans les calculs en question ; il n'a trouvé que l'application du procédé purement arithmétique de la « fausse position ». On substituait, d'après lui, à l'inconnue un nombre quelconque (en choisissant habilement le mokhraj pour en pouvoir tirer les fractions comme nombres entiers), on faisait subir à ce résultat faux toutes les opérations demandées et le nombre sortant servait à corriger le faux résultat; d'après le lemme démontré, il y avait entre lui et le nombre connu du problème la même relation qu'entre le faux et le vrai résultat. De cette manière, le principe de la proportionnalité se trouvait seul invoqué et, comme le dit M. Rodet, cette sorte de formule, avant que les algébristes de nos jours aient eu l'idée de l'écrire $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, au lieu de $a : b :: c : x$, avait toujours passé pour tout autre chose qu'une équation.

Cette manière d'envisager les procédés que nous venons d'expliquer, M. Rodet l'appuie par des citations des mathématiciens de tous les peuples; l'auteur du *Lilâvâti*, que nous avons vu plus haut s'approcher tant des procédés modernes, fait ses calculs de cette manière.

Aahmes a cependant encore une autre manière de procéder, légèrement différente : c'est celle où la fausse position n'est plus

le mokhraj, mais l'unité. Alors la correction qui ressort au cours du calcul, n'ayant à multiplier que l'unité, constitue elle-même le résultat, et ce sont surtout ces procédés qui donnent aux problèmes l'apparence de solutions algébriques.

Le travail de M. Rodet ne se borne pas à des questions purement mathématiques. C'est ainsi qu'il attribue le sens « Chapitre » au mot que M. Eisenlohr a traduit par « précepte » (*Vorschrift*); quant au mot *seghom* ou *seqem*, il ne peut pas, d'après M. Rodet, avoir le sens « d'une addition de fractions qu'on ramène au dénominateur commun »; mais, à cet endroit, ainsi que M. Eisenlohr l'a indiqué ailleurs, il signifie « complément » (*Ergänzung*); de même, M. Rodet rétablit pour le mot *nâh* la signification « croître », au lieu de « multiplier » (*vervielfältigen*).

L'Appendice contient une heureuse découverte. Il y a, dans le papyrus Rhind, un petit tableau des puissances du nombre 7 et, vis-à-vis de chacune d'elles, est un mot qu'on croyait être le nombre de cette puissance; ces noms étaient fort étranges (l'écrit, le chat, la souris, l'orge, le boisseau). Or l'auteur nous montre, grâce à un passage de Léonard de Pise, que ces noms provenaient probablement d'un problème dont les nombres indiqués constituaient la solution. Cette découverte est intéressante, surtout au point de vue de M. Rodet : elle semble établir un vrai lien entre Aahmes et le grand mathématicien du moyen âge.

Le travail de M. Rodet a été vivement critiqué par MM. Revillout, dans une Revue consacrée spécialement à l'égyptologie. Les critiques se sont placés à un point de vue entièrement différent de celui de M. Rodet; d'après eux, aucune analogie n'existe entre les sciences mathématiques de l'ancienne Égypte et les procédés de Léonard de Pise. Pour M. Rodet, les savants allemands attribuent aux Égyptiens des procédés trop modernes; les nouveaux critiques supposent, au contraire, l'état de la Science chez les Égyptiens encore bien plus avancé. D'après eux, les procédés, bien plus élégants en réalité, ont été artificiellement alourdis pour être appropriés à l'entendement du mauvais écolier auquel avait servi ce cahier.

Car c'est bien d'un cahier d'écolier qu'il s'agit d'après MM. Revillout, et non, comme l'avaient supposé MM. Cantor, Eisenlohr et Rodet, d'un livre d'enseignement. Quant à cette circonstance,

que le manuscrit a été copié par un scribe (honneur dont les épreuves d'écolier ne jouissent pas toujours), MM. Revillout supposent que l'original avait été retrouvé parmi d'autres écrits par un littérateur qui n'y entendait pas beaucoup, et copié pour un cultivateur qui y entendait encore moins. Ce dernier a été évidemment trompé; les vrais mathématiciens de l'Égypte avaient ri de lui et peut-être le malhonnête scribe aurait-il même été puni pour sa fourberie. Ce qui prouve la réalité de cette supposition, d'après MM. Revillout, ce sont les calculs faux, exécutés par l'élève, qui suivent en général dans le papyrus un calcul juste, donné pour modèle par le maître. Ces erreurs, notées en marge par le maître, ont amené ainsi une répétition des mêmes procédés, jusqu'à ce que l'élève eût compris le calcul. Souvent aussi le maître fournissait, pour ainsi dire en passant, à l'élève des solutions qu'il avait dû chercher préalablement par un procédé bien plus compliqué.

C'est surtout ce dernier point qui pourra nous servir à préciser les vues des critiques de la *Revue égyptologique*.

Dans le n° 40, par exemple, on demande de diviser le nombre 100, en telle sorte, que les cinq parties soient en progression décroissante par différences et que les deux dernières réunies égalent le septième des trois premières. Ce problème est résolu par la substitution d'une fausse position ($5\frac{1}{2}$). Or, d'après MM. Revillout, le maître, avant de fournir ce nombre, aurait exécuté un calcul qui pourrait se traduire ainsi dans le langage moderne :

$$a + a + d = \tfrac{1}{7}(a + 2d + a + 3d + a + 4d),$$
$$14a + 7d = 3a + 9d, \quad 11a + 7d = 9d, \quad 11a = 2d:$$

donc $5\frac{1}{2}a = d$, et c'est ce nombre qu'il a dicté à l'élève.

On conçoit que dès lors les résultats auxquels arrivent MM. Revillout doivent être tout à fait différents de ceux que nous avons vus développés par M. Rodet; presque partout les critiques de la *Revue égyptologique* recourent aux hypothèses de MM. Cantor et Eisenlohr.

Ainsi la manière dont les savants allemands ont envisagé l'addition des fractions leur paraît parfaitement justifiée; c'est bien par réduction au dénominateur commun que l'Égyptien procédait. S'il n'écrivait pas le dénominateur, c'est qu'il ne lui était guère

possible d'écrire des fractions avec un numérateur autre que l'unité; mais, dans sa pensée, ces nombres soi-disant entiers qu'il substituait étaient bien de vraies fractions.

Les critiques passent rapidement le chapitre de *Seqem*. L'hypothèse d'un lemme, étant en désaccord avec le titre, leur paraît avoir très peu de chance d'être admise.

Quant au Chapitre de *Hau*, auquel le travail de M. Rodet doit son nom, c'est là un point que ses critiques ont examiné avec le plus de soin et, ici encore, ils sont arrivés à des conclusions diamétralement opposées à celles de M. Rodet.

Il y a bien, dans tout cela encore, une différence de principes. Pour M. Rodet, la « fausse position », comme procédé purement arithmétique, est, pour ainsi dire, plus naturelle, plus conforme à la manière de penser des nations moins civilisées; donc il incline à la supposer antérieure à l'Algèbre, et c'est aussi notre sentiment. Pour MM. Revillout, au contraire, la fausse position est une forme de la décadence; elle s'est développée au moyen âge des procédés algébriques, et elle a même partout été précédée par ces derniers. Donc, si nous trouvions dans Aahmes la fausse position, nous serions forcés de supposer une Algèbre encore antérieure. Mais, en vérité, le procédé de l'Égyptien ne ressemblerait que fort superficiellement à la fausse position; il serait, au contraire, tout à fait conforme à l'Algèbre et surtout presque identique à celui de Diophante. D'ailleurs cette ressemblance des calculs, tant d'Aahmes que de Diophante, à celui de la fausse position ne serait point fortuite, puisque c'est justement des procédés du mathématicien d'Alexandrie que la fausse position se serait développée.

Les hypothèses linguistiques de M. Rodet ne trouvent pas non plus l'approbation de ses critiques qui, ici encore, préfèrent les traductions données par MM. Eisenlohr et Cantor.

Nous avons désiré mettre sous les yeux du lecteur le pour et le contre, notre incompétence en égyptologie ne nous permettant pas de prendre parti. Toutefois, ces recherches ont porté déjà des fruits : le travail de M. Cantor a inspiré à M. Sylvester (*American Journal of Mathematics*, vol. III, n° 4, p. 332, déc. 1880) un important développement qu'on ne nous saura pas mauvais gré, croyons-nous, de produire en français :

« L'inversion d'un nombre entier s'appellera une *fraction*

simple; toute autre fraction, rationnelle ou irrationnelle, peut être appelée *complexe;* mais il doit être bien entendu qu'il ne sera question, dans ce qui suit, que de fractions proprement dites de l'une ou l'autre sorte, à savoir, de fractions plus grandes que o et moindres que 1.

» Supposons que Q représente une fraction quelconque; si Q est compris entre $\frac{1}{u_0 - 1}$ et $\frac{1}{u_0}$, nous pouvons poser $Q = \frac{1}{u_0 - \delta_0} + Q'$, expression dans laquelle δ_0 est ou o ou un nombre entier positif, et Q' continuera à former une fraction proprement dite, laquelle pourra de même être résolue en $Q' = \frac{1}{u_1 - \delta_1} + Q''$, et ainsi de suite indéfiniment.

» Mais, si nous faisons $\delta_0, \delta_1, \ldots$ égaux chacun à o, le mode de développement devient déterminé. J'appellerai toute représentation déterminée de ce genre d'une quantité fractionnaire un *sorite.* Il va de soi qu'en développant une fraction donnée sous forme d'un sorite, les dénominateurs successifs, que j'appellerai ses *éléments,* peuvent être obtenus par un procédé de division; si la fraction à développer est rationnelle, le diviseur réel sera un entier continuellement décroissant et, par conséquent, toute fraction complexe rationnelle peut être développée (et seulement d'une manière) sous la forme d'un sorite limité.

» Les éléments d'un sorite sont analogues aux quotients partiels d'une fraction continue régulière; mais il existe entre les deux cas cette différence que, tandis que les dernières quantités sont parfaitement arbitraires, les éléments en question seront soumis à certaines lois que je vais présentement examiner.

» Soient $u, p, q, \ldots, r, s, \ldots, t, u$ les éléments d'un sorite. Il est clair que le dernier reste étant l'inverse de $\frac{1}{t} + \frac{1}{u}$, nous devons avoir $\frac{1}{t} + \frac{1}{u} < \frac{1}{t-1}$, c'est-à-dire $u > t^2 - t$, $u \geqq t^2 - t + 1$. En outre, si nous considérons le reste qui donne naissance à l'élément r, il doit être de la forme $\frac{1}{s - \varepsilon}$, où ε est une fraction quelconque, et nous devons avoir alors

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s-\varepsilon} < \frac{1}{r-1} \quad \text{ou} \quad s - r \geqq r^2 - r.$$

d'où

$$s \overline{\gtrless} r^2 - r + t;$$

en sorte que la relation qui existe entre deux éléments consécutifs est la même, qu'ils soient ou non à la fin du développement; et si $u_x\, u_{x+1}$ sont deux entiers consécutifs dans une série, la seule condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de l'existence d'un sorite dont ces nombres seraient les éléments est que nous ayons, pour toutes valeurs de x, $u_{x+1} \overline{\gtrless} u_x^2 - u_x + 1$.

» Si u_{x+1} est toujours égal à $u_x^2 - u_x + 1$, nous obtiendrons une série qu'on peut appeler un *sorite limite.*

» Il est évident que toute fraction simple $\frac{1}{u_0 - 1}$ peut être développée sous la forme d'un sorite infini dont les éléments seront $u_0, u_1, u_2, \ldots$, soumis aux relations ci-dessus. Un sorite infini dans le cas limitant est, par conséquent, exprimable sous la forme d'une fraction finie, et la même chose sera vraie pour un sorite dont la branche de droite, commençant à un terme quelconque u_i, savoir :

$$\frac{1}{u_i} + \frac{1}{u_{i+1}} + \frac{1}{u_{i+2}} + \ldots,$$

forme un sorite limite.

» Mais, dans tout autre cas, un sorite ne peut être égal à une fraction finie; car une pareille fraction ne peut être développée que d'une manière sous forme d'un sorite, et un pareil sorite est nécessairement limité quant au nombre de ses termes.

» D'où il est impossible que la somme des inverses d'une série ascendante d'entiers positifs, tels que le carré de la différence entre chacun d'eux et celui qui le précède immédiatement est plus grand que la différence entre ce précédent et l'unité, puisse représenter une quantité rationnelle; car, s'il en était ainsi, nous aurions $u_{x+1} - u_x > (u_{x-1} - 1)^2$, c'est-à-dire $u_{x+1} > u_x^2 - u_x + 1$, et la série formerait un sorite qui n'appartiendrait pas au cas limite.

» Je vais maintenant examiner quelques-unes des propriétés de la série de termes définis par la condition $u_{x+1} = u_x^2 - u_x + 1$.

» Tout d'abord, je remarquerai que chaque terme u_{x+i} peut être exprimé sous la forme $\mathrm{P}u_x + 1$; car supposons la propriété

vraie pour une certaine valeur de i; alors, puisque

$$u_{x+i+1} - 1 = z_{x+i}(u_{x+i} - 1),$$

la chose est évidemment vraie pour celui qui suit immédiatement; or, la proposition étant vraie pour $i = 1$, elle est également vraie en général.

» Il résulte de là que chaque élément d'un sorite limite est premier avec tous ceux qui le suivent et, conséquemment, que deux termes quelconques du sorite sont premiers entre eux.

» Maintenant, pour plus de simplicité, servons-nous de $v_0, v_1, v_2, \ldots$ pour représenter $(u_0 - 1), (u_1 - 1), (u_2 - 1), \ldots$; nous aurons alors

$$v_1 - v_0 = v_0^2, \quad v_2 - v_1 = v_1^2, \quad v_3 - v_2 = v_2^2, \quad \ldots.$$

» Par suite $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \ldots, v_x - v_0$ (ainsi qu'il résulte immédiatement de l'addition des équations ci-dessus) seront tous de la forme Pv_0^2, où P est une fonction rationnelle et entière de v_0, et v_x sera de la forme $Pv_0^2 + v_0$. Cette conclusion amène à une représentation de la somme d'un nombre donné de termes d'un sorite finissant par une fraction de son terme inférieur; car

$$\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{v_{x+1} - v_x}{v_x v_{x+1}} = \frac{v_x^2}{v_x v_{x+1}} = \frac{v_x}{v_x + v_x^2} + \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{1}{u_x},$$

d'où

$$\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_x} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_{x+1}} = \frac{v_{x+1} - v_0}{v_0 v_{x+1}} = \frac{(v_{x+1} - v_0) + v_0^2}{v_{x+1} : v_0},$$

qui est de la forme $\frac{P}{Pv_0 + 1}$, et est, par conséquent, une fraction de son terme inférieur.

» Maintenant, si nous représentons le produit des éléments $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_x$ par Πu_x et la somme de leurs combinaisons $x - 1$ à $x - 1$ par $\Pi' u_x$, le rapport $\frac{\Pi' u_x}{\Pi u_x}$ sera aussi la même fraction de son terme inférieur, puisque (comme on l'a fait voir) tous les éléments du sorite sont premiers entre eux.

» De là nous pouvons déduire les équations

$$u_{x+1} = u_0 + (u_0 - 1)^2 \Pi' u_x,$$
$$u_{x+1} = 1 + (u_0 - 1) \Pi u_x.$$

dont la seconde servira à donner une limite inférieure du degré de convergence d'un sorite quelconque.

» En effet, dans le cas d'un sorite limite, nous avons

$$u_1 > (u_0^2 - u_0),$$
$$u_2 > (u_0 - 1)\, u_0 u_1 \quad > (u_0^2 - u_0)^2,$$
$$u_3 > (u_0 - 1) u_0 u_1 u_2 > (u_0^2 - u_0)^4,$$

et de même, en général,

$$u_x > (u_0^2 - u_0)^{2^{x-1}},$$

parce que la solution de l'équation

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \theta_{i-2} + \ldots + \theta_0 \quad \text{est} \quad \theta_i = 2^{i+1}\,\theta_0.$$

» Dans tout autre sorite, dans lequel l'élément initial est toujours u_0, la valeur de l'élément distant de x rangs doit être *a fortiori* plus grande que la valeur $(u_0^2 - u_0)^{2x-1}$ qui vient d'être obtenue pour le cas limite.

» Les considérations qui précèdent m'ont été suggérées par le Chapitre de la *Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, qui traite de la singulière méthode en usage chez les anciens Égyptiens pour opérer avec les fractions. Ils avaient la curieuse habitude de résoudre toute fraction en une somme de fractions simples, en suivant pour cela une certaine méthode traditionnelle, qui ne conduirait pas, je me hâte de le dire, excepté dans un petit nombre de cas très simples, au développement sous la forme spéciale à laquelle, dans ce qui précède, j'ai donné le nom de *sorite fractionnel.*

» J'ajoute quelques exemples du développement d'une fraction rationnelle sous forme de sorite.

» Soit $\frac{4699}{7320}$ la fraction à développer. L'opération peut être disposée comme suit :

(2).	(8).	(60).	(3660).
4699	2078	1984	1920
7320	14640	117120	7027200
9398	16624	119040	7027200

(2) est le nombre supérieur d'une unité à E $\frac{7320}{4699}$;

$$9398 = 2 \times 4699; \quad 2078 = 9398 - 7320; \quad 14640 = 2 \times 7320.$$

» Un élément (2) est maintenant déterminé et il reste à développer la fraction $\frac{2078}{14640}$.

» (8) est un nombre supérieur d'une unité à E $\frac{14640}{2078}$;

$$16624 = 8 \times 2078;\quad 1984 = 16624 - 14640;\quad 117120 = 8 \times 14640.$$

» Un second élément, (8) est maintenant trouvé, et il reste $\frac{1984}{117120}$ à développer. En continuant de cette manière et avec des numérateurs 4699, 2078, 1984, 1920, qui diminuent nécessairement à chaque opération, nous arrivons enfin à l'élément 3660 avec un reste o. Le sorite demandé est donc

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{60} - \frac{1}{3660}.$$

» Comme second exemple, prenons la fraction $\frac{335}{336}$.

» L'opération peut être disposée d'une façon analogue à celle de l'exemple précédent, savoir :

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
335	[illegible]	330	[illegible]
336	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] que

[illegible]

[illegible] l'histoire des [illegible]

[illegible] et [illegible].

MÉLANGES.

SERENUS D'ANTISSA;

Par M. Paul TANNERY.

Serenus d'Antissa est l'auteur de deux petits Traités (*De la Section du cylindre* et *De la Section du cône*), qui suivent d'ordinaire, dans les manuscrits grecs, les quatre premiers Livres des *Coniques* d'Apollonius, et que Halley a publiés dans son édition du géomètre de Perge ([1]).

« Nous ne savons rien de Serenus », dit d'ailleurs Halley dans sa préface, « si ce n'est qu'il était né à Antissa, ville de l'île de Lesbos, qu'outre ses deux Traités il avait écrit des Commentaires sur Apollonius, et qu'il vivait avant Marinus, disciple de Proclus, comme il résulte de la citation qu'en fait Marinus dans sa préface aux *Données* d'Euclide. »

Cependant, en énumérant les commentateurs d'Apollonius dans l'ordre suivant : Pappus, Hypatia, Serenus, Eutocius, Halley semble disposé à faire vivre Serenus après Hypatia, par conséquent au v[e] siècle après J.-C.

Montucla a considéré l'époque où vivait Serenus comme indéterminée dans les quatre premiers siècles de l'ère chrétienne; il n'a pas précisé les raisons qui lui faisaient restreindre l'intervalle de près de sept siècles entre Apollonius et Marinus.

Dans son édition de l'*Astronomie* de Théon de Smyrne (Paris, 1849), M. Th.-H. Martin a publié un fragment qui suivait dans le manuscrit le texte de Théon, et portait l'intitulé : *Extraits des Lemmes de Serenus le philosophe.*

On ne peut douter de l'identité de cet auteur de *Lemmes;* car Serenus d'Antissa est précisément qualifié de *philosophe* dans les

---

([1]) *Apollonii Pergæi Conicorum libri octo, et Sereni Antissensis de Sectione Cylindri et Coni libri duo.* Oxoniæ, e theatro Sheldoniano, an. Dom. MDCCX.

titres des deux Traités publiés par Halley. Mais on ne peut rien conclure de là sur l'époque où vivait ce mathématicien ; car, comme le remarquent M. Th.-H. Martin et M. Cantor, l'extrait se borne à l'emprunt d'un énoncé purement géométrique dont un scoliaste anonyme fait une application astronomique.

Bretschneider ([1]), qui d'ailleurs sur ce dernier point n'a pas reconnu la vérité, a prétendu faire remonter l'époque de Serenus à 220-180 avant J.-C., c'est-à-dire à la génération qui suit immédiatement celle d'Apollonius. Son principal motif est qu'Antissa a été complètement détruite par les Romains en 167 avant J.-C. D'ailleurs les travaux de Serenus lui paraissent de l'ordre de ceux que dut provoquer la publication des *Coniques*.

M. Cantor ([2]) a objecté avec grande raison, après F. Blass, que le nom latin de Serenus indique une date postérieure, et qu'il faut redescendre au moins après le commencement de l'ère chrétienne, époque à laquelle une nouvelle Antissa se trouvait d'ailleurs rebâtie. Le judicieux historien, en parlant de Serenus, lorsqu'il arrive à cette date du commencement de l'ère chrétienne, fait toutes réserves en ce qui concerne l'époque de sa vie; il se contente de remarquer que, en raison du caractère de ses écrits, il ne convient point de trop le rapprocher de Marinus de Neapolis, lequel est mort avant les dernières années du v[e] siècle après J.-C.

Je vais essayer d'établir que Serenus doit être placé chronologiquement entre Pappus et Hypatia, par conséquent au IV[e] siècle de notre ère.

2. L'opinion de Bretschneider doit, en premier lieu, être absolument écartée. Serenus dit dans sa préface de la *Section du Cylindre :*

« Ceux des *anciens* (οἱ τῶν παλαιῶν) qui ont traité des coniques ne se sont pas contentés du concept ordinaire du cône formé par la révolution d'un triangle rectangle, ils ont voulu plus de généralité et plus d'extension dans leurs savantes recherches et ont con-

([1]) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* Leipzig, 1870, p. 183-184.
([2]) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig, 1880, p. 347-349.

sidéré non seulement des cônes droits, mais encore des cônes scalènes. »

Or nous savons pertinemment par Geminus, dans Eutocius (éd. Halley, p. 9), que cette généralisation a été l'œuvre d'Apollonius. Serenus en était donc assez éloigné pour le considérer comme un *ancien*.

Bretschneider a été évidemment trompé par le début de la même préface, où Serenus dit que « beaucoup de ceux qui s'occupent de Géométrie croient que la section oblique du cylindre diffère de la section conique, appelée ellipse », et par l'objet du Traité qui est la réfutation de cette erreur. Mais il faut voir là, non pas l'indice d'une époque où la Science progresse, bien au contraire la preuve d'une décadence déjà profonde.

On est assez loin des *anciens* pour que la tradition soit perdue; les premiers travaux, qui n'ont pas été recueillis dans la collection du τόπος ἀναλυόμενος, que détaille Pappus dans son Livre VII, n'existent plus, et par suite des lacunes de cette collection et de la mauvaise direction de l'enseignement, on est arrivé à mettre en doute des points qui ne faisaient pas question pour Euclide ou pour Archimède, ou bien, comme Serenus, à considérer comme nouvelles des questions qui avaient dû évidemment être traitées dès le temps de Ménechme.

L'œuvre même de Serenus indique elle-même par ses imperfections qu'on est bien loin de l'âge héroïque. Elle est encore, il est vrai, assez satisfaisante pour que, comme le remarque M. Cantor, il ne faille pas lui attribuer une date trop voisine de Proclus ou de Marinus. Mais, si l'on compare par exemple Serenus et Pappus, on ne peut se dissimuler l'infériorité du premier.

Si l'on prend la *Section du cône*, où Serenus étudie les variations de l'aire du triangle obtenu en coupant un cône droit ou scalène par un plan passant par le sommet, je crois qu'on ne trouverait pas ailleurs 63 propositions accumulées pour des résultats aussi insignifiants; le problème fondamental, qui d'ailleurs est *solide*, n'est même pas abordé.

Dans la *Section du cylindre*, je remarque, à la fin de la préface, cette assertion singulière : « que la section du cylindre droit est seulement identique à celle du cône droit, et qu'il faut supposer

le cylindre scalène pour en identifier la section avec l'ellipse en général ».

Dans ce Traité d'ailleurs, Serenus, malgré sa promesse, ne traite pas le cas général; il ne considère pour les cylindres scalènes que les sections faites par des plans perpendiculaires à celui qui passe par l'axe et par sa projection sur le plan du cercle de base; il ne paraît pas avoir compris la distinction établie par Apollonius, dont il essaye cependant de calquer fidèlement les démonstrations, entre les axes des sections coniques et les diamètres conjugués.

Je passe sur quelques détails techniques, moins importants, qui dénotent également un âge relativement récent; mais, pour mieux édifier sur l'homme et sur l'époque, je crois devoir traduire un passage qui suit la proposition 30 :

« Que ce que nous avons dit suffise pour le problème que nous nous étions proposé et sur lequel nous pourrions nous étendre encore davantage. Il est temps de passer à la question que j'ai annoncée tout à l'heure; l'origine de son examen, qui n'est pas hors de propos, a été pour moi motivée comme suit. Le géomètre Peithôn, en expliquant dans un de ses écrits ce que sont les parallèles, ne s'est pas contenté de ce qu'avait dit Euclide, mais l'a éclairci par un exemple ingénieux : les droites parallèles, dit-il, sont telles que celles que nous voyons formées sur les murs ou sur le sol par les ombres des colonnes à l'opposite d'une lampe ou d'un flambeau. Cela a paru fortement risible à tout le monde, mais non pas à moi qui respecte l'auteur et qui suis son ami. Seulement il faut examiner la question mathématiquement. »

Suivent des démonstrations assez complexes de propositions qui se trouvent en fait supposées dans les *Optiques* d'Euclide.

3. Il est clair que nous ne concluons pas la date des écrits de Serenus de leur imperfection même, mais de ce fait qu'ils ont été conservés malgré cette imperfection, et qu'ils se sont accolés aux *Coniques* d'Apollonius, comme les Livres XIV et XV des *Éléments* à l'œuvre d'Euclide.

Rien n'empêche évidemment d'admettre, par exemple, qu'au temps qui suivit Euclide il y avait des géomètres d'assez peu de

talent pour produire une œuvre aussi imparfaite que le Livre XV; mais l'invraisemblable serait qu'elle eût été conservée dès lors, comme un complément nécessaire des *Éléments*, et admise même par Théon d'Alexandrie, dans son édition, sans corrections ni retouches. Il est donc unanimement reconnu aujourd'hui que ce Livre XV est du VIe siècle de notre ère. C'est un raisonnement analogue que je fais pour Serenus.

J'ajouterai que, si Serenus avait écrit avant Pappus, ses deux Traités auraient dû être dès lors accolés aux *Coniques* et par conséquent entrer dans la *Collection analytique* des Anciens. Tout au moins Pappus n'eût pas manqué de signaler ce complément de l'Ouvrage, comme il l'a fait pour un travail analogue, celui de Charmandros sur les *Lieux plans* d'Apollonius.

Mais je crois qu'on peut tirer un argument encore plus décisif de ce fait que Serenus avait commenté les *Coniques*, ainsi qu'il nous l'apprend lui-même (éd. Halley, p. 16). Le travail de Pappus dans son Livre VII me paraît en effet inexplicable, s'il y avait eu de son temps un commentaire sur un quelconque des Ouvrages de la *Collection analytique*.

A proprement parler, du reste, Pappus n'a pas commenté les *Coniques*, comme Halley semble le dire; il a publié un certain nombre de lemmes sur les *Coniques*, comme sur la plupart des autres Traités analytiques. L'opinion générale est d'ailleurs que Pappus est l'auteur de ces lemmes; mais il est facile de se rendre compte qu'il n'en est rien. En effet, non seulement il ne dit rien de semblable quand il annonce (éd. Hultsch, p. 636) qu'il donnera pour chaque Traité de la collection *les lemmes cherchés* (τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα), mais encore quand il énumère successivement le nombre des théorèmes de chaque ouvrage, il y ajoute celui des lemmes, comme si ceux-ci en faisaient partie, et l'on croirait certainement qu'il en était ainsi, si l'on n'avait pas les *Coniques*.

Il est donc probable que jusqu'à Pappus on s'était contenté, pour combler les lacunes que présentaient ou semblaient présenter les Traités d'Analyse anciens, de rédiger des recueils de lemmes, qui devaient se trouver annexés à certaines éditions de ces Traités, manquer dans d'autres ou encore différer d'une édition à l'autre. Les auteurs de ces lemmes sont sans doute des mathématiciens

comme ceux que cite Pappus, à savoir Périclès ([1]), Charmandros ([2]), Héraclite ([3]).

Le but de Pappus a été évidemment de faire de son Livre VII le recueil général de tous ces recueils particuliers, travail évidemment très intéressant dans notre hypothèse, mais, je le répète, inexplicable s'il y avait eu déjà à cette époque un commentaire sur les *Coniques*.

Le fait que Serenus a lui-même composé ou recueilli des *Lemmes* ([4]), semble indiquer qu'il appartenait à une époque de transition, où le système des lemmes, tel que le révèle le Livre VII de Pappus, et où se maintiennent à un certain degré l'originalité mathématique et la tendance à améliorer les travaux des Anciens, a dû être abandonné pour celui des commentaires qui consacrera définitivement la décadence et qui est comme l'aveu qu'on ne peut plus désormais qu'admirer servilement des œuvres inimitables ([5]).

Porphyre et Pappus avaient déjà ouvert cette ère des commentaires pour Euclide et pour Ptolémée. Après eux, on dut naturellement aborder les géomètres qui avaient traité de matières plus hautes; c'est ce que commença au moins Serenus pour Apollonius et peut être pour Archimède (*Marinus*).

Il n'y a guère à douter au reste que les deux petits Traités de Serenus n'aient été liés par lui à une édition, partielle probablement, des *Coniques* (les quatre premiers Livres?), laquelle com-

---

([1]) P. 630, l. 25.

([2]) P. 664, l. 8. — Peut-être le *Charimander* cité sur les comètes par Sénèque, VII, 5, *Nat. quæst.*

([3]) P. 782, l. 5. — Ἡράκλειτος. Peut-être l'auteur de la *Vie d'Archimède* que cite Eutocius, et qu'il appelle Ἡράκλειος (Halley, p. 8) ou Ἡρακλείδης (Torelli, p. 204). La forme *Héraclius* est à bon droit suspecte, mais celle d'*Héraclide* n'est pas suffisamment garantie. Elle est très souvent d'ailleurs confondue dans les manuscrits avec la forme *Héraclite;* il est inutile d'en donner des exemples.

([4]) On peut rappeler également ici le recueil de Lemmes qui nous a été conservé par les Arabes sous le nom d'Archimède (Torelli, p. 355-361), et qui a une origine analogue.

([5]) Comme indice de la décadence de la langue technique au temps de Sérénus, on peut remarquer à ce sujet qu'il désigne comme ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια (certains petits lemmes, p. 18), les propositions 19 à 30 de sa *Section du cylindre*, alors que ces propositions renferment aussi bien des théorèmes que des problèmes, et n'ont d'ailleurs aucunement le caractère de lemmes.

prenait ses Commentaires, et qu'Eutocius n'ait plus tard utilisé son travail en même temps peut-être aussi que celui d'Hypatia.

4. Ce que nous avons déjà dit pourrait suffire pour écarter l'hypothèse qui ferait Serenus postérieur à la fille de Théon d'Alexandrie et laisserait à celle-ci l'honneur d'avoir la première essayé de commenter les *Coniques*. Mais on peut donner d'autres raisons contre cette hypothèse.

Si Halley a réellement été porté à l'adopter, c'est sans doute par le rapprochement entre les qualifications de « philosophe » données à Serenus d'une part, à Marinus de l'autre, et qui, pour nous modernes, semblent quelque peu singulières quand il s'agit d'auteurs mathématiques. Mais dans les deux cas l'épithète a dû être ajoutée par les copistes pour distinguer ces auteurs d'autres homonymes; en particulier, le premier pouvait être confondu avec un Ælius Serenus d'Athènes (*Suidas*), qui paraît avoir vécu en Égypte vers le IVe siècle de l'ère chrétienne (*Photius*, cod. 279), avoir par conséquent été contemporain du nôtre, et qui était, lui, désigné comme *littérateur* (Σερῆνος ὁ γραμματικός).

Il faut remarquer du reste que, depuis Ptolémée au moins, les mathématiciens semblent avoir affecté de se désigner comme philosophes. Par exemple, Pappus, Théon d'Alexandrie sont qualifiés comme tels dans Suidas, et le début de l'Almageste ainsi que le langage de Pappus (p, 34, 350, 1022, 1164) paraissent justifier l'emploi de cette dénomination (1).

En second lieu, on a vu que Serenus vivait dans un milieu scientifique, sinon savant; dans notre opinion sur l'époque de sa vie, on ne peut guère placer ce milieu ailleurs qu'en Égypte ; après Hypatia, il serait plus plausible de penser à Athènes, où Plutarque le platonicien essayait de renouer la « chaîne d'or » brisée depuis si longtemps. Mais, en Égypte ou à Athènes, Serenus aurait certainement été connu de Proclus. Or les détails biographiques sur ce dernier, comme en général sur les philosophes de son siècle, sont, quoique assez confus, passablement complets. Comme aucune trace de

(1) On sait d'ailleurs que, chez les Romains au moins, le terme *mathematicus*, avili par les astrologues de bas étage, était loin d'être honorable.

Serenus n'y apparaît, on peut dès lors inférer à bon droit qu'il était au moins du siècle antérieur.

La citation de Marinus : « Après Archimède, Serenus a considéré qu'il y a beaucoup d'objets déterminés naturellement » (sans être *donnés* au sens ancien, comme le rapport de la circonférence au diamètre) n'indique pas enfin que la date de l'auteur cité soit relativement très récente.

Je crois avoir accompli la tâche que je m'étais proposée et montré que de toutes les conjectures possibles, dans l'incertitude où nous laissent les données historiques sur le compte de Serenus, la plus plausible consiste à le placer dans l'intervalle qui sépare Pappus de Théon d'Alexandrie.

J'ajoute, comme détail bibliographique, que Serenus cite :

EUCLIDE (*Sur les parallèles*)..........	*Section du Cylindre.*	prop. 30
Éléments, XII, 11............	*Section du Cône,*	prop. 34
Optiques.....................	*Section du Cylindre.*	prop. 32
APOLLONIUS (*Coniques*, Livre I) :		
Définitions premières et secondes.....	»	définitions
Théorèmes 15......................	»	prop. 16-17
» 21......................	»	prop. 18
» 36......................	»	prop. 31

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHEFFLER.—DIE MAGISCHEN FIGUREN. Allgemeine Lsöung und Erweiterung eines aus dem Alterthume stammenden Problems. — 1 vol. in-8°, 112 p. Leipzig; 1882.

L'auteur traite d'une façon systématique des carrés magiques et d'autres figures analogues. La solution générale du problème du carré magique dans le cas d'un nombre impair d'éléments est remarquablement simple; concevons un carré formé au moyen de n^2 éléments et disposé comme un déterminant; soit $u_{p,q}$ le terme qui appartient à la $p+1^{\text{ième}}$ colonne et à la $q+1^{\text{ième}}$ ligne; soient de plus a, a'; b, b' quatre nombres entiers positifs ou négatifs; supposons enfin que $u_{p,q}$ se déduise du nombre

$$1+pa+qa'+(pb+qb')\,n,$$

en remplaçant $pa+qa'$, $pb+qb'$ par leurs plus petits restes positifs par rapport à n; si $ab'-a'b$ est un nombre premier à n, tous les nombres $u_{p,q}$ seront différents, en sorte que ces nombres ne seront autres que les nombres $1, 2, \ldots, n^2$; si les nombres a, b sont premiers à n, la somme des termes d'une ligne horizontale sera égale à $\frac{n(n^2+1)}{2}$; si les nombres a' et b' sont premiers à n, on obtiendra la même somme pour une ligne verticale quelconque; si les nombres $a+a'$, $b+b'$ sont premiers entre eux, on obtiendra encore la même somme pour la diagonale qui part du terme u_{00}, ou, pour deux lignes parallèles à cette diagonale, la comprenant entre elles et contenant ensemble n éléments; enfin, si les nombres $a-a'$ et $b-b'$ sont premiers à n, on aura des propriétés analogues relativement à la seconde diagonale. Si l'on satisfait à la fois à toutes ces conditions, on obtient ce que M. Scheffler appelle un carré magique complet. On ne peut évidemment satisfaire à toutes ces conditions dans le cas de n pair; il faut alors changer la définition du carré magique complet; le problème devient alors plus compliqué et nous devons renvoyer le lecteur au livre de M. Scheffler, de même que pour les triangles et polygones

magiques. M. Scheffler considère aussi des cubes magiques qui sont coupés par des plans parallèles aux faces suivant des carrés magiques ; le cube magique complet, composé d'un nombre impair d'éléments, se construit par un procédé tout semblable à celui que nous avons expliqué pour le carré magique.

Enfin ce livre se termine par un certain nombre d'applications qui offrent quelque intérêt théorique ou qui, pour parler comme Bachet, sont simplement *plaisantes et délectables*. J. T.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. SELIVANOF A M. HERMITE.

Pour résoudre l'équation du quatrième degré [1], Ferrari ramène son premier membre à la différence de deux carrés, d'où la résolution de l'équation proposée est immédiate. La manière la plus simple d'y parvenir me semble la suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

nous introduisons pour l'homogénéité y,

$$f(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Cette forme biquadratique se transforme en une forme quadratique, en posant

$$x^2 = z_1, \quad 2xy = z_2, \quad y^2 = z_3$$

et l'on trouve

$$F(z_1, z_2, z_3) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + (6c - 4u)z_1z_3 + uz_2^2 + 2dz_2z_3 + ez_3^2.$$

---

[1] Voir aussi à ce sujet le Mémoire de M. Darboux *Sur l'équation du quatrième degré*, dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XVIII, p. 220.

ou, en remplaçant $4cz_1z_3$ par cz_2^2,

$$F(z_1, z_2, z_3) + az_1^2 = 2bz_1z_2 + 2(c+2u)z_1z_3 + (c-u)z_2^2 + 2dz_2z_3 + ez_3^2.$$

D'après la méthode de Ferrari, cette forme se transforme en

$$A(z_1 + mz_2 + nz_3)^2 + B(z_2 + pz_3)^2 + Cz_3^2.$$

Pour avoir la somme de deux carrés, il faut déterminer u de manière que

$$ABC = 0.$$

Quelle que soit la valeur de u, la forme $F(z_1, z_2, z_3)$ se transforme en $f(x,y)$ en passant de z_1, z_2, z_3 à x et y. La forme $F(z_1, z_2, z_3)$, contenant la quantité arbitraire u, est identique avec la forme $f(x,y)$.

Le produit ABC est égal au déterminant de la forme quadratique $F(z_1, z_2, z_3)$. Nous avons donc l'équation résolvante de Ferrari sous cette forme élégante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2u \\ b & c-u & d \\ c+2u & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat est dû à M. Aronhold. Il est publié dans le t. 52 du *Journal de Crelle*, p. 95, mais la voie par laquelle on y parvient n'y est pas indiquée.

Quelques indications de M. Kronecker m'ont donné le moyen d'éclaircir cette voie.

SUR UN MANUSCRIT DU VATICAN, DU XIV° SIÈCLE, CONTENANT UN TRAITÉ DE CALCUL EMPRUNTÉ A LA MÉTHODE « GOBÂRI ».

LETTRE DE M. NARDUCCI A M. ARISTIDE MARRE.

Ayant rencontré dans le manuscrit de la reine de Suède, n° 1285 de la Bibliothèque du Vatican, d'une écriture serrée, de la seconde moitié du XIVe siècle, un Traité intitulé : *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam,* j'ai cru d'abord qu'il s'agissait d'une traduction latine de quelque Traité arabe sur

le GOBÂR (*pulvis*). (Qu'il me soit permis ici une hypothèse : le calcul *gobâr* serait-il une explication de l'abacus des anciens à l'usage des Orientaux, ainsi que le mot même le ferait soupçonner?) Mais un examen attentif du manuscrit en question m'a convaincu que, quoique ce Traité ressemble d'assez près, au moins en partie, par la méthode, à la traduction du regretté Wœpcke, publiée par vous avec de savantes notes dans le XIXe tome des *Atti* de l'Académie Pontificale des *Nuovi Lincei* (¹), il s'agit ici d'un travail original écrit et publié en Occident. C'est, à mon avis, une transition entre l'abacus et l'algorithme, faisant connaître la méthode *gobâr* indépendamment des anciens systèmes de l'abacus.

Le manuscrit que je viens de citer est un in-folio de 164 feuillets en parchemin, numérotés, sauf le premier, aux *rectos* 1-163. Il est relié en cartons recouverts intérieurement de parchemin et extérieurement de peau rouge, avec six nervures sur le dos, aux armoiries pontificales et royales. Dans l'intérieur de la première couverture se trouve une ancienne liste des Traités que ce manuscrit renfermait, et par laquelle on voit qu'il y en avait deux qui maintenant ont disparu (²).

Ce manuscrit contient les Traités et pièces suivantes (³):

1° (ff. 1*r*-8*r*): *In nomine domini miseratoris et pij. Incipit liber in sciencia astrolabii quadraginta in se continens capitula.*

Commence après la liste des chapitres : « (P)rimum capitulum in inventione astrolabii et nominum super eum cadentium. Primum horum est armilla super quam suspenditur astrolabium. »

(¹) *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, tome XIX, anno XIX (1865-1866); Rome, 1866, p. 360-383, séance VII du 3 juin 1866, *Introduction au calcul gobâr et hawâi, Traité d'Arithmétique traduit de l'arabe par François Wœpcke, et précédé d'une Notice de M. Aristide Marre, sur un manuscrit possédé par M. Chasles, etc., et contenant le texte arabe de ce Traité*. Rome, impr. des Sc. math. et phys., 1866, in f° de x-19 p.

(²) Ce sont : *Liber qui dicitur flos florum divi Hermetis de regulis astrolabij* et *Liber amforitmorum Zaelis in astrologia*. Ils précédaient immédiatement le planisphère de Ptolémée. Le Traité qui forme l'objet de cette lettre y est appelé : *Liber pulveris est in arsmetrica*.

(³) Les mots en italiques sont écrits à l'encre rouge dans le manuscrit.

Finit : « *Finis liber operis astrolabii edicione abileacim de macherit qui dicitur almacherita.* »

2° (ff.-8*r*-12*v* : *In nomine domini Ihesu incipiunt regule omnium planetarum.*

Commence : « Quicumque vult coequare planetas. »

3° (f. 13) : Tables lunaires et planétaires.

4° (ff. 14*r*-20*v*) : *Incipit introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam.*

Commence : « Quisquis in quatuor matheseos disciplinis.

Le feuillet 20 *v.* se termine par un petit chapitre sur la soustraction, par une Table des grades, et par une Table de multiplication.

5° (ff. 21*r*-36*r*) : *Incipiunt canones in motibus celestium corporum.*

Commence : « Quoniam cuiusque accionis quantitatem. »

Finit : « *Expliciunt canones in motibus celestibus.* »

6° (ff. 36*r*-38*r*) : *De constitutione astrolabii liber incipit.*

Commence : « Astrologice speculationis exercitium habere uolentibus. »

Finit : « *Explicit liber de constitutione astrolabij.* »

7° (ff. 38*r*-41*r*) : *Incipit liber de opere astrolabij.*

Commence : « Nomina instrumentorum astrolabii hec sunt. »

Finit : « *Explicit opus astrolabij.* »

8° (ff. 41*r*-42*v*) : Écrit qui commence : « Cura in quo mense anni cuiusuis an possit fieri eclipsis solis uel lune uolueris inuenire », et mélanges astrologiques. Ces deux vers, qui se trouvent au *v.* du f. 41, nous donnent la date (1204?) de l'original :

« Anni bis centum minus uno milia quinque
» Recessere tue noua legis tempora Xpe ».

9° (ff. 43*r*-102*v*) : *Hic est liber in summa de significationibus indiuiduorum superiorum super accidentia que efficiuntur in modo generationis et corruptionis de presentia eorum respectu ascendentium inceptionum coniunctionalium et alio-*

rum. et sunt .8. tractatus et .263. differentie. editus a iafar astrologo qui dictus est albumasar.

Commence, après la division de l'Ouvrage « *Differentia prima in premissione inceptionum universalium multarum utilitatum.* Omnia significationum indiuiduorum circularium sunt effectus inferiores. »

10° (ff. 103*r*-138*r*) : *Incipit liber .4. tractatuum Ptolomei alfilludhi in scientia astrorum. Et in primo tractatu sunt .24. capitula. Capitulum primum in collectione intellectus scientie iuditiorum astrorum.*

Commence : « Verum yesure in quibus est prognosticabilis scientie stellarum perfectio. » On lit en marge : « Tetrastin grece latine quadripartitus arabice alambra » (*sic*). Le quatrième Traité est intitulé :« *Incipit Tractatus quartus libri alarba Bartolomei* », c'est-à-dire « Quadripartiti Ptolomaei. »

11° (f. 138) : *Scientia proiectionis radiorum.*

Commence : « Cum proiectione radiorum.

12° ff. (139*r*-152*v*) : *Incipit introductorius alcabici ad iudicia astrorum interpretatus a iohanne yspalensi*, c'est-à-dire Jean de Séville.

Commence : « *Incipit prologus alcabici.* Postulata a domino pro bonitate uite ceyphaddala. »

13° *Planisperium Ptolomei hermanni secundi translatio.*

Commence : « Quemadmodum Ptolomeus et ante eum nonnulli. »

A part l'intérêt que peuvent avoir pour l'Histoire des Sciences surtout les n° 9, 10, 12 et 13, je reviens au n° 4 qui forme l'objet de ma Lettre. En voici le prologue, à la col. 1 du f. 14*r*, jusqu'à la ligne 18.

« *Incipit* [illegible] *liber qui et pulveris dicitur in ma-* [illegible].

« Si quis in quattuor [illegible] disciplinis exercitandus expe- [illegible] documenta uolet accedere, numero- [illegible] laborare. Tocius enim philosophie

studium numerorum naturis a curiosis rerum naturalium investigationibus comprobatur inuiti. His namque solis diuersas uices temporum colligimus. His mundane concordie amicas proportiones comprehendimus. His etiam astrorum motus et multiplices errantium syderum uariationes custodimus. Prenosse autem numerorum rationum inuestigationi inhiantem oportet, qui dicantur digiti, qui articuli, quique compositi numeri. Quid sint etiam aggregationes diminutiones, quid multiplicationes, diuisiones, et insuper numerorum radicum adinuentiones. Quibus singulis diligenter ordine et ratione exsecutis, facilior comparatur diligentie latioris ad ea que sequuntur intellectus ».

» Suit, jusqu'au *f.* 140. (col. 1, lig. 21), une exposition générale de la méthode, beaucoup plus étendue que celle que contient la traduction publiée par Wœpcke, mais que, dans sa substance, on peut dire identique, comme on pourra le voir par l'extrait qui suit :

» Numeri principium et origo unitas inuenitur. Est enim numerus unitatum collectio cuius, quia infinita est progressio et absque finis cognitione immensum producta, certis terminis et quibusdam limitibus propositis a phylosophie ciuibus illius habetur disciplina. Vnitatem enim, que principium est numeri, primum limitem constituerunt, ex cuius multiplicatione numeros qui sunt ab ea in denarium composuerunt. Nam eam duplicando fecerunt binarium, et triplicando ternarium, et sic in ceteris. Rursus uero denarium secundum limitem posuerunt, ex cuius multiplicatione, duplicatione, triplicatione noueni, illos numeros qui sunt ad .x. in centum reddiderunt, id est .xx. xxx. xl., et qui secuntur. Post hec autem centum tercium limitem ponentes ex illius similiter multiplicatione. viiii. alios numeros constituerunt, id est.cc. ccc. cccc., et si qui sunt in ordine. Quartum uero limitem dixerunt mille, et quintum. x̄., et sic sequentem in decuplatione, precedentis procreantem limitem in infinitum processerunt. Quorum quosdam digitos, quosdam articulos, quosdam etiam compositos appellare uoluerunt. Si quidem omnes numeri procreati a primo limite dicuntur digiti, a ceteris uero limitibus prouenientes dicuntur articuli. Qui autem inter articulos inueniuntur uocantur compositi. Notandum etiam est quod singulis limitibus cum a se procreatis numeris diuersa indierunt (*sic*) nomina, vocantes scilicet primum limitem

cum suis numeris differentiam unitatum, et primam et secundam eum a se prouenientibus numeris differentiam decenorum, secundum et tertium cum suis procreatis numeris differentiam centenorum et terciam, et sic in ceteris denominationem a limitibus facientes, ordinem naturalem eorum observantes.

» Quibus ita subtiliter adinuentis mentis in circuitu procedentes quamque differentiam (*sic*) numeros comprehenderunt. Quam ob rem, ut quod mentis exquisitione inuenerant uisui exponerent, novem notulas prolixitatem uitantes inuenerunt, quibus omnem numerum representare (*sic*) dispositione exercitantes se in hac per tria docuerunt. Quarum subscribuntur figure :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 (¹)

» Inventas notas, ita disposuerunt, ut nouem numeros prime differentie representarent eas in priori loco constituerunt. Vt autem numeros secunde differentie circulum in dextra parte et notulas in sinistra parte circulum ut fierent in secundo loco scripserunt. Numeros vero tercie differentie eis significantes duos circulos proponentes in tercio loco posuerunt, similiter in ceteris. Erit igitur prima notula in primo loco posita significans unum ; in secundo .x., in tercio centum, in quarto mille, in quinto decem millia, et sic in ordine. Et secunda nota in primo loco posita significat duo, in secundo xx., in tercio cc., in quarto duo millia, in quinto uiginti millia, et sic in ceteris intellige.

» Quod autem melius intelligatur demonstretur exemplo. Ponitur enim circulus in prima parte, et in secundo loco unitas, et representat .x. hoc modo [10], et si post ponatur binarius circulo significabit .xx. ita [20], et ternarius .xxx, [30], et quaternarius significabit .xl. positus ita [40], et sic de ceteris per ordinem. Sin

(¹) Ces chiffres ont été ajoutés d'une main beaucoup plus récente, de la fin du xvie siècle, tandis qu'ils avaient été laissés en blanc par le copiste. Évidemment le nombre 10 a été ajouté arbitrairement. La forme des chiffres à substituer, suivant les divers exemples numériques du Traité, est la suivante :

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 ·

A la place du 10, ajouté postérieurement, devait se trouver le *zéro*, représenté par un cercle comme aujourd'hui. En effet, il est appelé *circulus*, dans la suite de ce passage, et est représenté par un cercle dans les exemples qui suivent.

autem preponantur duo circuli, representabit eadem unitas in tercio loco posita centum hoc modo [100], et binarius ducenta, ita [200], et similiter omnes notule posite secundum numerum differentiarum habent represaintare (*sic*) earumdem numeros. Si autem diuersarum differentiarum numeri insimul fuerint representandi, ponentur notule eos representantes naturali dispositione. Que representat scilicet numerum prime differentie ponetur in primo loco, et que representat numerum secunde differentie in secundo loco, et sic de tercia et quarta, et ceteris que secuntur. Verbi gratia, volens representare centum .xi. ponet tres unitates in ordine ita [111], prima igitur earum in primo loco posita, in dextera scilicet parte, representat unum, et secunda .x. et tercia. c. Si uero in dispositione cuiuslibet numeri interciderit differentia uacua, ponetur in loco eius circulus. Vt si numerus tercie et prime differentie esset significandus, id est ducenta quatuor, esset differentia secunda uacua. Ponetur itaque quaternarius in primo loco, et circulus in secundo, et binarius in tercio loco ita [204]. Hec eadem in omni dispositione numerorum seruanda est regula. Hostenso (*sic*) qualiter per dispositionem nouem prepositarum figurarum et decimi circuli omnis numerus possit significari, qui sint etiam digiti, qui articuli et qui compositi numeri, transeundum est ad cetera capitula, et primum dicamus de numerorum aggregatione.

Or, voici les Chapitres dont le Traité se compose : F. 14 *v.*, col. 1-2 : « *De numerorum aggregatione.* Aggregare est quoslibet duos numeros uel plures in unum colligere ».

Exemple : 625 + 586 = 1211.

F. 14 *v.*, col. 2-f. 15 *r.*, col. 1 : « *De diminutione.* Diminuere est quemlibet numerum ex maiore se substrahere ».

Exemple : 12025 — 3604 = 8421.

F. 15 *r.*, col. 1 : « *De duplatione.* Duplare aliquem numerum est eius duplicati summam colligere ».

Sans exemple.

F. 15 *r.*, col. 1-2 : « *De numerorum mediatione.* Mediare aliquem numerum est eum in duas equales partes secare ».

Sans exemple.

F. 15 *r.*, col. 2-*v.*, col. 2 : « *De multiplicatione.* Multiplicare est aliquem numerum in alium eum secundum unitates illius duplicare. Cuius qui voluerit exercitari notitia, necesse est multiplicationes digitorum omnium in se et ad inuicem commendare memorie. Multiplicationis itaque talis est doctrina ».

Exemple : $104 \times 206 = 21424$.

F. 15 *v.*, col. 2-f. 17 *r.*, col. 2 : « *De numerorum diuisione.* Diuidere est numerum per alium maiorem secundum quantitatem minoris partiri, uel maioris ad minorem facere ».

Exemples : $\frac{228604}{236} = 968\,\frac{156}{236}$, $\frac{1800}{9} = 200$.

Ce second exemple est précédé de ces mots : « Notandum etiam est quod si post multiplicationem supra positi numeri et eius extractionem de diuidendo numero remanserunt circuli, post quos nullus sit numerus, illi sunt preponendi supraposito numero eo ordine quo sunt. Verbi gratia : Diuidendus est numerus, id est mille octingenti per nouem, quorum hec est figura

2
1800
9

. »

F. 17 *r.*, col. 1-2 : « *De numerorum fractionibus.* Et si cuiusque numeri denominatio partium possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen egiptiis denominationem suarum fractionum facere *a.* .lx. diuiserunt gradum unum in .lx. partes quas vocauerunt minuta. Item unumquodque minutorum diuidentes in .lx. partes alias appellauerunt eas secunda, eo quod essent partes partium in secundo loco, deinde partientes quodque secundum in .lx. partes, dixerunt eas tercia, et similiter diuiserunt singula tercia in .lx. partes quas uocauerunt quarta, eo quod essent in quarto loco a primis fractionibus, id est a minutiis, et ita descendentes inuenerunt quinta et sexta et septima, et hoc usque in infinitum ».

F. 17 *r.*, col. 2-*v.*, col. 2 : « *De multiplicatione fractionum.* »

F. 17 *r.*, col. 2-f. 18 *r.*, col. 1 : « *De fractionum numerorum diuisione* ».

F. 18 *r.*, col. 1-2 : « *De positione integrorum numerorum et fractionum.* »

Jusqu'ici les exemples sont appliqués aux diverses espèces de

grades, dont il est parlé ci-dessus. Les deux Chapitres suivants se rapportent à d'autres exemples numériques, savoir :

F. 18 *r.*, col. 2-*v.*, col. 1 : « *Item de diuersis fractionibus.* »

Exemples : $3 + \frac{1}{2} \times 8 + \frac{3}{11} = 28 + \frac{21}{22}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{21}$

F. 18 *v.*, col. 1-2 : « *De diuisione diuersarum fractionum.* »

Exemple : $\frac{20 + \frac{2}{13}}{3 + \frac{1}{3}} = 6 + \frac{3}{65}$.

F. 18 *v.*, col. 2-f. 19 *r.*, col. 1 : « *De radicum* (sic) *numerorum.* Post traditam multiplicandi et diuidendi plenam doctrinam, restat de radicibus numerorum dicendum. Quarum scientia non solum ualet ad geometriam et astronomiam, uerum etiam ad totam quadriuii disciplinam ualde est necessaria, quod leviter patet studenti in mathematica scientia. Videndum itaque est quid sit numerorum radix. Radix numeri est alter numerus in se multiplicatus reddens ipsum. Binarius enim radix dicitur quaternarii, quia in se ductus reddit quaternarium. »

F. 19 *r.*, col. 1-2 : « *De inuentione radicis integri numeri.* »

F. 19 *r.*, col. 2-*v.*, col. 1 : « *De exemplo inueniende radicis.* Proponitur numerus (5625) cuius radix inuenienda est. »

F. 19 *v.*, col. 1-2 : « *De radicibus fractionum.* »

F. 19 *v.*, col. 2-f. 20 *r.*, col. 1 : « *Exemplum de fractionibus :* cum autem radicem duorum et tercie atque decime unius uolueris inuenire. »

F. 20 *r.*, col. 1-2 : « *Item de inuentione radicum alio modo.* »

F. 20 *r.*, col. 2-*v.*, col. 1 : « *Item de inuentione radicis numeri integri cum fractionibus.* »

Le Traité se termine (f. 20 *v.*, col. 1-2) par deux Chapitres sans titre. Je rapporte le premier, comme preuve évidente que lorsque ce Traité fut composé, le système de l'abacus, dont les divers Traités qui nous restent se terminent par une section spéciale relative aux *minutiæ*, n'avait pas encore été entièrement abandonné :

« Scire autem oportet quod monas in .xii. diuiditur uncias. Vncia vero in .xxiiii. scripulos. Scripulus uero ex sex constat siliquis. Obulus autem ex tribus siliquis. Cerates uero continet unam et

semis siliquam. Siliqua autem unum continet calcum et terciam eius. Calcus autem ex tribus granis suam efficit quantitatem. Constat igitur calcum subsesquitertium esse ad siliquam, siliquam autem subsexquialteram esse ad ceratem. Cerates uero subdupla est ad obolum. Obolus autem medietas est scripuli. Scripulus uero subtriplus est adragmam (*sic*), dragma autem quarta pars est semuntie et octaua uncie, et uncia duodecima pars unitatis. Unitas uero est quo unaqueque res dicitur una. Hac commoda introductione de multiplicatione et diuisione ceterisque premissis ad quadriuii tocius disciplinam dicta sufficiant. Si quid autem ad ea que sequuntur necessarium pretermissum est, diligens lector per premissa leuiter poterit inuenire. »

Par l'analyse détaillée de ce Traité, qui ne me paraît pas dépourvu d'intérêt pour l'histoire des Sciences, j'en reviens au point même d'où j'étais parti dès le commencement de cette lettre, c'est-à-dire, en d'autres termes, que ce Traité paraît pouvoir clore les savantes recherches de Michel Chasles, insérées dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences ([1]), et être classé parmi les points de départ de celles de Woepcke : *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident* ([2]).

Veuillez agréer, etc.

Rome, le 26 juillet 1883.

HENRI NARDUCCI.

([1]) *Explication de l'abacus de Boèce* (IV, 96). — *Sur l'origine de notre système de numération* (VIII, 72). — *Explication des Traités de l'abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert* (XVI, 156). — *Règles de l'abacus* (XVI, 48). — *Analyse et explication du Traité de Gerbert* (XVI, 281). — *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'abacus* (XVI, 1393). — *Recherche des traces du système de l'abacus*, etc. (XVII, 143).

([2]) Rome, imprim. des Sc. math. et phys., 1859, in-4° de 72 p. Voyez aussi du même auteur : *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*, dans le *Journal asiatique*, 6e série, tome I, Paris, 1863, p. 27-79, 234-290, 442-529. Une savante récension de ces deux écrits de Woepcke, par M. J. de Goeje, se trouve dans les pp. 127-168 du volume intitulé : « *De Gids. Acht en twintigste jaargang. Derde serie. Tweede jaargang*. Amsterdam, 1864. »

DÉTERMINATION D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES DANS UN SYSTÈME ET ISOTHERMES;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans un travail déjà ancien, inséré en 1868 aux *Nachrichten* de Gœttingue, M. Enneper a déterminé toutes les surfaces dont la courbure totale est constante et pour lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes ou sphériques. Le résultat obtenu par cet habile géomètre est particulièrement intéressant : les surfaces déterminées par les conditions que nous venons d'énoncer ont leurs lignes de courbure planes dans un système et sphériques dans l'autre. De plus les plans des lignes de courbure du premier système passent par une même droite et, par conséquent, les sphères qui contiennent les lignes de courbure du second système ont toutes leur centre sur cette droite. Les surfaces de M. Enneper ont du reste été étudiées d'une manière détaillée par différents géomètres allemands; les équations qui les déterminent contiennent des fonctions elliptiques dont le module est absolument quelconque.

D'après une remarque faite par M. O. Bonnet, on peut déduire, de chaque surface dont la courbure *totale* est constante, deux surfaces dont la courbure *moyenne* est constante et qui sont parallèles à la première. On voit donc qu'aux surfaces à courbure totale constante découvertes par M. Enneper correspondent des surfaces à courbure moyenne constante qui auront, elles aussi, leurs lignes de courbure planes dans un système et sphériques dans l'autre. Ces dernières surfaces ont été l'objet d'une étude récente de M. Max Voretzsch (1).

Or, d'après un résultat que l'on doit encore à M. O. Bonnet, les surfaces dont la courbure moyenne est constante peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure ou, ce qui est la même chose, les lignes de courbure de chaque système constituent une famille de courbes isothermes.

(1) MAX VORETZSCH. *Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung bei welcher die eine der beiden Schaaren der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet ist.* Göttingen, 1883.

Il résulte donc de la recherche faite par M. Enneper qu'il existe des surfaces satisfaisant à cette double condition que leurs lignes de courbure soient planes dans un système et en outre que la surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. J'ai été ainsi conduit à chercher toutes les surfaces, autres que les surfaces de révolution, jouissant de cette double propriété. La solution de ce problème fait l'objet du présent travail.

Le résultat que j'ai obtenu me paraît remarquable : bien que les surfaces cherchées doivent satisfaire à la fois à deux équations aux dérivées partielles, on trouve qu'elles contiennent dans leur équation deux constantes et une fonction arbitraire. On a donc, d'une part, une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans un système, jouissant d'une propriété géométrique à laquelle les géomètres attachent quelque intérêt ; et, à un autre point de vue, on ajoute aux surfaces en très petit nombre dont les lignes de courbure forment un système isotherme toute une famille de surfaces qui, par cette propriété, viennent se placer à côté des surfaces de révolution et des surfaces minima.

Malgré le degré de généralité de la solution, on peut obtenir une construction géométrique simple de toutes les surfaces qui correspondent à des formes différentes de la fonction arbitraire. D'ailleurs les calculs que l'on doit développer pour obtenir les expressions des coordonnées d'un point de la surface cherchée en fonction de deux variables indépendantes offrent une intéressante application de la belle théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce qui est due à M. Hermite. A tous ces points de vue, j'ai pensé qu'il y aurait quelque utilité à faire connaître dans ses points essentiels la méthode que j'ai suivie.

I.

Je rappellerai d'abord les formules de la théorie des surfaces dont j'aurai à faire usage.

Soit

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 \tag{1}$$

l'expression de l'*élément linéaire* de la surface. Les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1, identiques au signe près à celles qui ont été considérées par M. Codazzi et M. Bonnet, doivent satisfaire aux

relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1,\\ \frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1,\\ \frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \mathrm{A}q_1+\mathrm{C}p=0,\quad r=-\frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v},\quad r_1=\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}.$$

Désignons par a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v=$ const. ou, ce qui est la même chose, de la tangente à l'arc $\mathrm{A}du$; par b, b', b'' les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $u=$ const. ou à l'arc $\mathrm{C}dv$, et enfin par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface. On devra avoir

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq, & \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1,\\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar, & \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1,\\ \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp, & \frac{\partial c}{\partial v} &= aq_1 - bp_1,\end{aligned}\right.$$

et les équations analogues pour a', b', c'; a'', b'', c''. Les équations (5) feront connaître les neuf cosinus; puis on obtiendra les coordonnées rectangulaires X, Y, Z d'un point de la surface exprimées en u, v par les quadratures

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathrm{X} &= \mathrm{A}a\,du + \mathrm{C}b\,dv,\\ d\mathrm{Y} &= \mathrm{A}a'\,du + \mathrm{C}b'\,dv,\\ d\mathrm{Z} &= \mathrm{A}a''\,du + \mathrm{C}b''\,dv.\end{aligned}\right.$$

Remarquons enfin que, si l'on emploie la représentation sphérique de Gauss, c'est-à-dire si, par le centre d'une sphère de rayon 1, on mène une parallèle à la normale, prolongée jusqu'à son intersection avec la sphère, le point de la sphère correspondant au point (X, Y, Z) de la surface aura pour coordonnées c, c', c''. L'élément linéaire de la sphère sera donc déterminé par la formule

$$(7)\qquad ds'^2=\Sigma\,dc^2=(p\,du+p_1\,dv)^2+(q\,du+q_1\,dv)^2.$$

II.

Après avoir rappelé les formules précédentes, nous allons les appliquer au problème proposé; nous supposerons les surfaces cherchées rapportées à leurs lignes de courbure. Cela s'exprimera, comme on sait et comme il est aisé de le vérifier, par les deux équations

$$(8)\qquad p = 0, \quad q_1 = 0.$$

De plus, comme les lignes de courbure doivent être isothermes, on pourra poser

$$(9)\qquad A = C = e^h,$$

h désignant une nouvelle variable, substituée à la valeur commune de A et de C

La formule (7) se réduit, dans le cas qui nous occupe, à la suivante :

$$ds'^2 = p_1^2\,dv^2 + q^2\,du^2.$$

On voit que les lignes de la sphère qui correspondent aux lignes de courbure de la surface forment un système orthogonal. Pour exprimer que les lignes de courbure de l'un des systèmes, par exemple les lignes $v =$ const., sont planes, il suffira d'exprimer que les lignes qui leur correspondent sur la sphère sont des cercles, c'est-à-dire que leur courbure géodésique est constante : cela conduit à l'équation

$$(10)\qquad qp_1 = -V\frac{\partial q}{\partial v},$$

où V désigne une fonction de v.

Les équations (8), (9), (10) sont l'expression complète des conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la surface cherchée. Si on les joint aux équations (2) et (3), on en déduira les valeurs suivantes des six quantités p, q, ... :

$$(11)\qquad \begin{cases} p = 0, & p_1 = -V' - V\dfrac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}; \\ q = V\dfrac{\partial h}{\partial v}, & q_1 = 0, \\ r = -\dfrac{\partial h}{\partial v}, & r_1 = \dfrac{\partial h}{\partial u}, \end{cases}$$

V' désignant la dérivée de V; en outre, la fonction h devra satisfaire aux deux équations aux dérivées partielles

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial h}{\partial v}}\right) = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$(13) \qquad (1+V^2)\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + VV'\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = 0.$$

L'intégration simultanée de ces équations est donc la première recherche que nous ayons à entreprendre.

L'équation (12) est du troisième ordre, mais il est aisé de l'intégrer complètement. En effet, si nous multiplions ses deux termes par $\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial h}{\partial v}}$, ils deviennent l'un et l'autre des dérivées exactes par rapport à v. Une première intégration donne ainsi

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\frac{\partial h}{\partial v}}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u).$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u)}} = \frac{\partial h}{\partial v},$$

et une nouvelle intégration par rapport à v nous donne

$$(14) \qquad \mathrm{L}\left[\frac{\partial h}{\partial u} + \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u)}\right] = h + f(u).$$

Il est vrai que nous avons négligé la solution particulière fournie par l'équation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u) = 0,$$

mais il est aisé de voir, en la combinant avec l'équation (12), qu'elle ne donne aucune autre solution du problème proposé que les sur-

faces de révolution. Cette solution était évidente *a priori*, et nous pouvons la négliger.

L'équation (14) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \mathrm{U} e^{h} + \mathrm{U}_1 e^{-h}, \tag{15}$$

où U et U_1 sont des fonctions quelconques de u. Il serait facile, en leur donnant des formes convenables, d'achever l'intégration; mais il nous a paru préférable de conserver l'équation (15).

Si dans l'équation (13) on substitue à la variable v la variable v_1 définie par l'équation

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}, \tag{16}$$

elle prend la forme très simple

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0. \tag{17}$$

Tout se réduit donc à l'intégration simultanée des équations (15) et (17).

En différentiant l'équation (15), on obtiendra la valeur de $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}$, que l'on pourra exprimer en fonction de h et de u. Portant cette valeur dans l'équation (17), on obtiendra

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \mathrm{U}' e^{h} + \mathrm{U}'_1 e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} - \mathrm{U}_1^2 e^{-2h} = 0.$$

Multiplions par $2\frac{\partial h}{\partial v_1}$ et intégrons par rapport à v_1, nous aurons

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + 2\mathrm{U}' e^{h} - 2\mathrm{U}'_1 e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} + \mathrm{U}_1^2 e^{-2h} + \mathrm{U}_2 = 0, \tag{18}$$

U_2 désignant une nouvelle fonction de u.

Les équations (15) et (18) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \varphi(h, u),$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + f(h, u) = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(h, u) &= \mathrm{U} e^{h} + \mathrm{U}_1 e^{-h}, \\ f(h, u) &= 2\mathrm{U}' e^{h} - 2\mathrm{U}'_1 e^{-h} + \mathrm{U}^2 e^{2h} + \mathrm{U}_1^2 e^{-2h} + \mathrm{U}_2. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Nous pouvons en déduire par la différentiation deux valeurs différentes pour $\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v_1}$, et, en exprimant que ces valeurs sont égales, nous trouverons l'équation de condition

$$(20) \qquad 2f\frac{\partial\varphi}{\partial h} + \varphi\frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Je dis que cette équation doit avoir lieu identiquement. En effet, s'il n'en était pas ainsi, elle déterminerait h qui serait fonction de la seule variable u, et la surface cherchée serait une surface de révolution. Nous avons déjà écarté cette solution, qui est évidente *a priori*.

En écrivant que l'équation (20) a lieu identiquement, c'est-à-dire que les coefficients des différentes puissances de e^h sont nuls, nous obtenons les trois équations

$$\frac{U''}{U} = \frac{U_1''}{U_1} = U_2 - 2UU_1,$$
$$6UU_1' + 6U'U_1 + U_2' = 0.$$

La dernière s'intègre immédiatement et l'on est ramené au système

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{U''}{U} = \dfrac{U_1''}{U_1} = U_2 - 2UU_1, \\ 6UU_1 + U_2 = C_1, \end{cases}$$

où C_1 désigne une constante arbitraire. Il faudra donc d'abord déterminer les fonctions U, puis intégrer le système des équations (15) et (18) ou, ce qui est plus simple, comme nous le verrons, le système *équivalent* des équations (15) et (17).

III.

Je commence par l'intégration du système (21). On déduit de la première équation

$$U_1U' - UU_1' = C,$$

C désignant une constante.

Si l'on prend comme inconnue auxiliaire

$$UU_1 = \theta,$$

on trouve

$$U_2 = C_1 - 6\theta,$$

$$U = \sqrt{\theta}\, e^{\int \frac{C\,du}{2\sqrt{\theta}}}, \quad U_1 = \sqrt{\theta}\, e^{-\int \frac{C\,du}{2\sqrt{\theta}}},$$

$$\frac{U''}{U} = \frac{U_1''}{U_1} = C_1 - 8\theta,$$

et θ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(22) \qquad 2\theta\theta'' - \theta'^2 + C^2 = 4\theta^2(C_1 - 8\theta).$$

Différentions cette équation, nous obtiendrons

$$\theta''' = 4\theta'(C_1 - 12\theta),$$

d'où nous déduirons par l'intégration

$$\theta'' = 4C_1\theta - 24\theta^2 + C_2.$$

On déduit immédiatement de cette dernière équation que l'inconnue auxiliaire θ dépend des fonctions elliptiques et qu'elle doit être de la forme

$$A + B\,\mathrm{sn}^2 u,$$

que l'on peut aussi écrire, en introduisant une constante ω,

$$B(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \omega).$$

En exprimant que cette valeur satisfait à l'équation (22), nous obtenons

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1}{2} k^2\, \mathrm{sn}\,\omega\, \mathrm{cn}\,\omega\, \mathrm{dn}\,\omega, \\ C_1 &= 3k^2\, \mathrm{sn}^2\omega - 1 - k^2, \\ \theta &= \frac{k^2}{4}(\mathrm{sn}^2\omega - \mathrm{sn}^2 u). \end{aligned} \right.$$

Les deux premières équations feront connaître k, ω en fonction de C, C_1 ; la dernière donnera θ.

Quant aux deux fonctions U, U_1, elles doivent satisfaire l'une et l'autre à l'équation

$$\frac{y''}{y} = C_1 - 8\theta,$$

ou

$$\frac{y''}{y} = 2k^2\, \mathrm{sn}^2 u - 1 - k^2 + 2k^2\, \mathrm{sn}^2\omega.$$

et, en outre, leur produit doit être égal à θ. On reconnaît le cas le plus simple de l'équation de Lamé, si complètement étudiée par M. Hermite, et les solutions U, U_1 sont précisément celles dont le produit est une fonction entière de $\operatorname{sn}^2 u$.

Il résulte des recherches de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LXXXV) que l'on aura

$$2iU = \rho \frac{H(u+\omega)H'(0)}{\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$2iU_1 = \frac{1}{\rho} \frac{H(u-\omega)H'(0)}{\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

ρ étant une constante à laquelle on peut donner une valeur quelconque; car sa variation donnera une série de surfaces semblables à l'une quelconque d'entre elles. Nous prendrons $\rho = i$, et les valeurs définitives de U, U_1 seront

$$(24) \quad \begin{cases} U = \dfrac{H'(0)H(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\[2ex] U_1 = -\dfrac{H'(0)H(u-\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{cases}$$

IV.

Nous avons maintenant à intégrer le système formé par les deux équations

$$\frac{\partial h}{\partial u} = U e^h + U_1 e^{-h},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0,$$

où U, U_1 désignent les fonctions définies par les formules (24).

La première de ces équations appartient à un type que l'on sait intégrer dès que l'on en connaît une solution particulière. Il suffit, en effet, de prendre comme inconnue soit e^h, soit e^{-h}, et l'on est ramené à une équation de Riccati; par conséquent, les valeurs de e^h correspondantes à quatre solutions particulières auront entre elles un rapport anharmonique constant, et l'intégrale générale sera donnée par une formule

$$e^h = \frac{P + QC}{R + SC},$$

où C désignera la constante arbitraire par rapport à u, fonction de v_1, et où P, Q, R, S seront des fonctions déterminées de u. Toute la difficulté se réduit donc à la recherche de solutions particulières de cette équation.

Or reportons-nous à l'équation (20) qui a lieu identiquement. Elle exprime, on le reconnaîtra par un calcul facile, que les fonctions h de u, définies par l'équation

$$f(h,u) = 2\,U' e^h - 2\,U'_1\, e^{-h} + U^2 e^{2h} + U_1^2\, e^{-2h} + U_2 = 0,$$

sont précisément des solutions particulières de l'équation à intégrer. Il suffira donc de résoudre l'équation

$$(25) \qquad U^2 e^{2h} + 2\,U' e^h + U_2 - 2\,U'_1\, e^{-h} + U_1^2\, e^{-2h} = 0,$$

qui est du quatrième degré par rapport à e^h, et l'on aura quatre solutions particulières qui permettront d'écrire l'intégrale générale cherchée.

Les invariants i et j de cette équation ont pour valeurs

$$i = \frac{1}{12}(1 - k^2 + k^4),$$

$$j = -\frac{1}{432}(1 + k^2)(2k^2 - 1)(k^2 - 2).$$

La résolvante du troisième degré a ses racines rationnelles

$$\frac{1 + k^2}{12}, \quad \frac{1 - 2k^2}{12}, \quad \frac{k^2 - 2}{12};$$

et, par des calculs qu'il me paraît inutile de reproduire, on obtient les expressions suivantes des quatre racines cherchées :

$$(26) \qquad e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u + \gamma - \omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u - \gamma - \omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u + \gamma + \omega}{2}\right)H\left(\frac{u - \gamma + \omega}{2}\right)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

où l'on donne à γ successivement les quatre valeurs

$$0, \quad 2K, \quad 2iK', \quad 2K + 2iK'.$$

D'ailleurs, comme on peut donner à l'expression de e^h la forme

$$(27) \qquad e^h = \frac{\Theta^2\left(\frac{u - \omega}{2}\right)}{\Theta^2\left(\frac{u + \omega}{2}\right)}\, \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{u - \omega}{2}}{k\,\mathrm{sn}^2\frac{u + \omega}{2} - k\,\mathrm{sn}^2\frac{\gamma}{2}}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

qui est linéaire par rapport à la constante $k \operatorname{sn}^2 \frac{\gamma}{2}$, on voit que l'intégrale générale cherchée sera donnée par l'une quelconque des formes équivalentes (26) ou (27), où γ sera la constante arbitraire.

Mais γ qui ne dépend pas de u est ici une fonction de v_1 qui reste à déterminer par la condition que h satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0.$$

Exprimons que cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs de u, nous aurons les équations

$$\gamma'^2 + 1 = 0, \quad \gamma''^2 = 0,$$

qui donnent

$$\gamma = \pm i v_1,$$

en négligeant une constante additive qu'on peut supposer réunie à v_1. En résumé, on trouve, pour la valeur définitive de h, la formule

$$(28) \qquad e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u + iv_1 - \omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u - iv_1 - \omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)H\left(\frac{u - iv_1 + \omega}{2}\right)} e^{u \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

et l'on connaît complètement l'élément linéaire de la surface cherchée aussi bien que les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1.

En éliminant v_1 entre l'équation (28) et sa dérivée, j'ai vérifié qu'on retrouve bien l'équation (15) qu'il s'agissait d'intégrer.

V.

Il reste maintenant à indiquer comment on trouvera les neuf cosinus $a, a', a'', \ldots$ et les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface. Mais auparavant je définirai une nouvelle fonction qui jouera un rôle essentiel de cette recherche.

Considérons la fonction

$$\frac{\Theta\left(\frac{u + iv_1 - \omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} e^{\frac{u + iv_1}{2} \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

de l'argument complexe $u + iv_1$. Il résulte de la formule (28)

que e^h est le module de cette fonction. On pourra donc poser

$$(29)\qquad e^{h+i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{-\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

et l'on obtiendra pour σ l'expression

$$(30)\qquad e^{i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

D'ailleurs, comme $h + i\sigma$ est une fonction de la variable complexe $u + iv_1$, on aura les équations bien connues

$$(31)\qquad \frac{\partial h}{\partial v_1} = -\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial \sigma}{\partial v_1},$$

qui nous seront utiles.

La fonction $i\sigma$ ne diffère de h que par les notations. Elle satisfait par conséquent à une équation tout à fait semblable à l'équation (15)

$$(32)\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v_1} = \mathrm{M}e^{i\sigma} + \mathrm{N}e^{-i\sigma},$$

où M et N ont pour valeurs

$$(33)\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{H}'(0)\Theta(\omega+iv_1)}{2\Theta(\omega)\mathrm{H}(iv_1)} e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\[2ex] \mathrm{N} = -\dfrac{\mathrm{H}'(0)\Theta(\omega-iv_1)}{2\Theta(\omega)\mathrm{H}(iv_1)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{cases}$$

Nous verrons plus loin comment la Géométrie fait prévoir l'existence de cette équation. La valeur de σ, contenant d'ailleurs l'arbitraire u qui ne figure pas dans la formule (32), donne par conséquent l'intégrale générale de cette équation différentielle.

VI.

Quand on connaît l'élément linéaire d'une surface et les six quantités qui figurent dans les formules de Codazzi, il reste à déterminer les neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires X, Y, Z.

On est conduit, comme l'a démontré M. Bonnet, à une seule surface; mais la détermination de cette surface dépend en général, comme il serait aisé de le prouver, de l'intégration d'une équation de Riccati. On a de nombreux exemples dans lesquels on se trouve arrêté et où l'intégration à effectuer paraît réellement impossible.

Dans le cas actuel, j'ai pu terminer les calculs et obtenir les neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires de la manière suivante :

Considérons un point de la surface et la tangente à la ligne de courbure plane $v =$ const. qui passe en ce point. Les cosinus directeurs de cette tangente sont, d'après les notations du § I, a, a', a''.

Si, par le centre d'une sphère de rayon 1, nous menons une parallèle à cette tangente, elle coupera la sphère en un point dont les coordonnées seront a, a', a''; nous aurons ainsi un mode de représentation sphérique de la surface distinct de celui de Gauss et qui va nous être très utile.

L'élément linéaire de la sphère sera donné par la formule

$$dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2$$

ou, en employant les formules (5) et (11),

$$dS^2 = V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\, du - \frac{\partial h}{\partial u}\, dv\right)^2.$$

Introduisons, en tenant compte de la formule (16), dv_1 à la place de dv et servons-nous des formules (31) pour substituer les dérivées de σ à celles de h. Nous obtiendrons ainsi l'expression très simple

$$dS^2 = d\sigma^2 + V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}\right)^2 dv_1^2. \tag{34}$$

Cette formule montre que les lignes $v_1 =$ const. de la sphère, qui correspondent aux lignes de courbure planes de la surface, sont des lignes géodésiques, c'est-à-dire des grands cercles. Ces lignes admettent pour trajectoires orthogonales les courbes $\sigma =$ const., ce qui donne la signification géométrique de la fonction σ.

Le résultat précédent pouvait être prévu géométriquement; car, si un point se déplace sur la surface en décrivant une ligne de

courbure plane, le point correspondant de la sphère, dans le mode de représentation que nous avons adopté, décrira évidemment le grand cercle dont le plan est parallèle au plan de la ligne de courbure; c'est en raison de cette propriété que nous nous sommes proposé de déterminer en premier lieu les cosinus a, a', a''.

Lorsque l'élément linéaire de la sphère prend la forme (34), on sait que le coefficientde dv_1^2 doit être de la forme

$$[\varphi(v_1)e^{i\sigma}+\psi(v_1)e^{-i\sigma}]^2;$$

cette remarque se vérifie bien ici en vertu de l'équation (32), que nous avons signalée d'avance à l'article précédent.

Revenons à la formule (34). Nous savons que σ, v_1 sont les coordonnées curvilignes d'un point de la sphère; σ désigne la distance de ce point à une courbe fixe (Γ) de cette sphère, distance comptée sur le grand cercle normal à (Γ), passant par le point. Quant à v_1, c'est une fonction de l'arc de la courbe (Γ), compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied du grand cercle normal. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point de (Γ) que nous considérerons comme des fonctions de l'arc de courbe compté à partir de l'origine choisie. Désignons cet arc par s et appelons $x', x'', \ldots$ les dérivées de $x, \ldots$ par rapport à s. Nous aurons

$$(35)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & xx'+\ldots=0,\\ x'^2+y'^2+z'^2=1, & x'x''+\ldots=0.\end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$(36)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix},$$

nous aurons les formules

$$(37)\qquad \begin{cases} yz''-zy''=-\Delta x',\\ zx''-xz''=-\Delta y',\\ xy''-yx''=-\Delta z',\end{cases}$$

dont la démonstration est immédiate.

Exprimons maintenant que le point (a, a', a'') de la sphère est situé à une distance σ sur l'arc de grand cercle, qui est normal à la courbe (Γ) au point (x, y, z). Nous obtiendrons, par des mé-

thodes tout élémentaires, les formules

$$(38)\quad \begin{cases} 2a = [x - i(yz' - zy')]e^{i\sigma} + [x + i(yz' - zy')]e^{-i\sigma}, \\ 2a' = [y - i(zx' - xz')]e^{i\sigma} + [y - i(zx' - xz')]e^{-i\sigma}, \\ 2a'' = [z - i(xy' - yx')]e^{i\sigma} + [z + i(xy' - yx')]e^{-i\sigma}. \end{cases}$$

Il nous reste à exprimer qu'en prenant pour s une fonction convenable de v_1, ces formules conduisent à l'expression (34) de l'élément linéaire.

Différentions la première, en tenant compte des relations (37). Nous trouvons

$$\begin{aligned} 2da &= x'\,ds[(1 + i\Delta)e^{i\sigma} + (1 - i\Delta)e^{-i\sigma}] \\ &\quad + i\,d\sigma\{[x - i(yz' - zy')]e^{i\sigma} - [x + i(yz' - zy')]e^{-i\sigma}\}. \end{aligned}$$

On déduit de là, en élevant au carré et ajoutant les équations analogues,

$$dS^2 = d\sigma^2 + \left(\frac{1 + i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{i\sigma} + \frac{1 - i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{-i\sigma}\right)^2 dv_1^2,$$

Si l'on compare à l'expression fournie par la formule (34) où l'on a remplacé $\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}$ par sa valeur

$$dS^2 = d\sigma^2 + (\mathrm{VM}e^{i\sigma} + \mathrm{VN}e^{-i\sigma})^2 dv_1^2,$$

on voit que l'on doit avoir

$$(39)\quad \begin{cases} (1 + i\Delta)ds = 2\mathrm{VM}\,dv_1, \\ (1 - i\Delta)ds = 2\mathrm{VN}\,dv_1. \end{cases}$$

Ces équations peuvent servir à un double usage.

Si l'on a choisi arbitrairement V en fonction de v, elles nous font connaître s et Δ en fonction de v et, par conséquent, Δ en fonction de s. Cette relation entre Δ et s détermine non la situation, mais la forme de la courbe (Γ). Au contraire, si l'on a pris (Γ) arbitrairement ainsi que k et ω, elles nous font connaître V et v_1 en fonction de s et, par suite, V, v_1 en fonction de v. On voit donc que l'on peut choisir arbitrairement la courbe (Γ). En d'autres termes, *parmi les surfaces que nous étudions, il y en aura toujours pour lesquelles les plans des lignes de courbure du premier système seront parallèles aux plans tangents d'un cône quelconque.*

La détermination de a étant faite, on aura b par l'une des formules (5) qui donne

$$\frac{\partial a}{\partial v} = br = b\frac{\partial h}{\partial u} = b\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}$$

et, par conséquent, la différentielle de la coordonnée rectangulaire X d'un point de la surface sera

$$dX = e^h\left(a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v}dv}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}}\right) = e^h\left(a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v_1}dv_1}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}}\right).$$

En remplaçant a par sa valeur, on trouve

$$(40)\qquad \begin{aligned} dX = e^h V x' dv_1 &+ [x - i(yz' - zy')]e^{h+i\sigma} d\left(\frac{u+iv_1}{2}\right) \\ &+ [x + i(yz' - zy')]e^{h-i\sigma} d\left(\frac{u-iv_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Voici comment on peut effectuer cette quadrature. e^h, considérée comme une fonction de $\frac{u}{2}$, est doublement périodique de seconde espèce et a les mêmes multiplicateurs que la fonction

$$e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\frac{H(x-2\omega)}{H(x)}.$$

Si l'on applique la formule donnée par M. Hermite pour la décomposition en éléments simples, on trouvera

$$(41)\qquad \left\{ \begin{aligned} e^h = {} & \frac{2M\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}\,e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\ & + \frac{2N\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\frac{u-iv_1+3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}\,e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \end{aligned}\right.$$

M et N ayant les valeurs définies par les formules (33).

Si l'on porte cette expression de e^h dans le premier terme seul de la formule (40), puis que l'on remplace

$$\begin{aligned} &2VMx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1+i\Delta)ds = d[x - i(yz' - zy')] \\ &2VNx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1-i\Delta)ds = d[x + i(yz' - zy')], \end{aligned}$$

on obtient

$$dX = \frac{\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(o)} \frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d[x-i(yz'-zy')]$$

$$+[x-i(yz'-zy')] \frac{\Theta^2\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H^2\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)+\ldots,$$

les termes non écrits se déduisant des précédents par le changement de i en $-i$.

Dans la seconde ligne de la formule précédente figure une fonction que l'on déduit de la suivante :

$$F(x) = \frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

en y remplaçant x par $\frac{u+iv_1}{2}$. Ici encore $F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, et une nouvelle application de la méthode de décomposition de M. Hermite nous donne

$$\frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} = \frac{\Theta^2(\omega)}{H'(o)H(2\omega)} \frac{d}{dx}\left[\frac{H\left(x-\frac{3\omega}{2}\right)}{H\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\right].$$

En faisant usage de cette formule, nous voyons que les deux premiers termes de dX deviennent la différentielle exacte d'un produit, et l'intégrale nous donne

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\Theta^2(\omega)[x-i(yz'-zy')]}{H(2\omega)H'(o)} \frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\ &+ \frac{\Theta^2(\omega)[x+i(yz'-zy')]}{H(2\omega)H'(o)} \frac{H\left(\frac{u-iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{aligned}\right.$$

On aurait pour Y et Z des expressions analogues. La question est donc complètement résolue.

VII.

Il nous reste maintenant à donner l'interprétation des formules et la construction géométrique de la surface. En multipliant l'équation (42) par x' et ajoutant les équations analogues, on a

$$x'X + y'Y + z'Z = 0.$$

Les coefficients ne dépendant que de v, cette équation représente les plans des lignes de courbure du premier système. Elle ne contient pas de terme constant, par suite *les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône*. C'est là une première propriété de la surface. Étudions maintenant les lignes de courbure planes.

Leurs plans sont normaux à la courbe sphérique que nous avons désignée par (Γ). Rapportons la ligne de courbure à deux axes rectangulaires choisis dans son plan, l'un Oy_1 allant au point où le plan coupe la courbe (Γ) et ayant pour cosinus directeurs x, y, z; l'autre Ox_1 perpendiculaire au premier et ayant pour cosinus directeurs

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'.$$

Appelons x_1 et y_1 les coordonnées relatives à ces axes. On trouvera aisément

$$(43) \qquad x_1 + iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{2H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} e^{(u + iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Les deux équations obtenues en séparant les parties réelles et les parties imaginaires donneront x_1, y_1. On voit donc que *la forme des lignes de courbure planes sera la même pour toutes les surfaces qui correspondent à un même système de valeurs de k et de ω et sera, au contraire, complètement indépendante de la forme de la fonction arbitraire qui entre dans les formules.* C'est la deuxième propriété géométrique assurément très remarquable de la surface.

En troisième lieu, cherchons l'arête du contact des plans des lignes de courbure avec le cône que ces plans enveloppent. Cette arête de contact sera définie par l'équation

$$x''X + y''Y + z''Z = 0,$$

à laquelle on donnera facilement la forme

$$(44)\qquad (1 + i\Delta)(x_1 + iy_1) + (1 - i\Delta)(x_1 - iy_1) = 0.$$

Si l'on tient compte des formules (39), cette équation devient

$$M(x_1 + iy_1) + N(x_1 - iy_1) = 0$$

ou, en remplaçant M et N par leurs valeurs,

$$(45)\qquad e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\Theta(\omega + iv_1)(x + iy_1) = e^{iv\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\Theta(\omega - iv_1)(x_1 - iy_1).$$

Remarquons, d'ailleurs, que le point situé à la distance 1 sur l'arc Oy_1 décrit la courbe (Γ) normale au plan de la ligne de courbure et, par conséquent, ce plan roule sur le cône qu'il enveloppe. L'équation précédente nous montre que *la droite de contact du plan de la ligne de courbure avec le cône enveloppe ne dépend que des constantes k, ω et nullement de la forme de la fonction arbitraire*. C'est la troisième propriété géométrique de la surface.

En réunissant tous ces résultats, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Considérons les coordonnées rectangulaires x_1, y_1 comme des fonctions des variables u, v_1 définies par la double équation

$$x_1 \pm iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{2H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\dfrac{u \pm iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{H\left(\dfrac{u \pm iv_1 + \omega}{2}\right)}\,e^{(u \pm iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

L'équation

$$v_1 = \text{const.}$$

définira une famille de courbes planes isothermes. Faisons correspondre à chaque courbe (v_1) la droite définie par l'équation

$$e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\Theta(\omega + iv_1)(x_1 + iy_1) = e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\Theta(\omega - iv_1)(x_1 - iy_1).$$

Faisons rouler le plan qui contient les courbes sur un cône quelconque ayant pour sommet l'origine des coordonnées. Alors la courbe (v_1), *qui dans chaque position du plan correspond à la génératrice de contact du plan et du cône, engendre précisément la surface cherchée.*

Il serait aisé d'établir, à l'aide de quelques considérations géométriques, une partie des résultats précédents et de montrer, en particulier, pourquoi la solution obtenue contient une fonction arbitraire. Je me contenterai de remarquer ici que, dans tout ce qui précède, j'ai seulement étudié le cas le plus général; les calculs se trouveraient en défaut si l'on envisageait ce cas particulier de l'équation de Lamé pour lequel les deux solutions U, U_1 se réduisent à une seule. Alors les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cylindre, et l'on obtient une classe de surfaces qui contient en particulier celles que l'on peut déduire par une dilatation des surfaces à courbure constante de M. Enneper.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SALMON (G.). — A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions. Fourth edit. Dublin, Hodges Figgis and Co. In-8°, xx-612 p.; 1882.

Cette nouvelle édition de l'excellent Ouvrage de M. Salmon n'a pas subi des changements aussi profonds que la précédente; elle s'en distingue seulement par quelques améliorations de détail. Nous nous empressons de la signaler, et nous espérons que bientôt aussi nous pourrons recommander à nos lecteurs la traduction française, qui est destinée à augmenter en France le nombre des admirateurs du savant géomètre anglais.

AMPÈRE (André-Marie). — Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience. Deuxième édition, conforme à la première publiée en 1826. Paris, A. Hermann, 164 p. grand in-8°; 1883.

Le Mémoire publié par Ampère dans le tome VI des *Mémoires de l'Académie des Sciences* est bien connu de tous les savants qui se sont occupés de la théorie mathématique de l'électricité. Il contient, comme on sait, le développement systématique des admirables recherches qu'Ampère avait faites sur la loi des actions électrodynamiques; même après les progrès si étendus qu'a faits cette branche de la Physique mathématique, il mérite à tous les égards d'être lu et médité par les physiciens et les géomètres. Aussi les exemplaires publiés en tirage à part à l'époque de l'impression du Mémoire étaient devenus extrêmement rares et à peu près introuvables. M. Hermann nous a donc rendu un réel service en publiant une nouvelle édition de cet important travail, édition qui est absolument conforme à la première et qu'il suffira évidemment d'annoncer.

MÉLANGES.

POUR L'HISTOIRE DES LIGNES ET SURFACES COURBES DANS L'ANTIQUITÉ;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

La première courbe qu'un géomètre grec ait considérée en dehors du cercle paraît avoir été la *quadratrice* (τετραγωνίζουσα) (¹)

$$\rho \sin\varphi = R \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi},$$

si son invention remonte réellement au sophiste Hippias d'Elis, qui florissait dans la seconde moitié du ve siècle avant J.-C.

Proclus (²), p. 272 : « D'autres ont résolu le même problème (la trisection de l'angle) par les quadratrices (³) d'Hippias et de Nicomède, lignes également *mixtes* (comme la conchoïde de Nicomède). »

P. 356 : « C'est, au reste, la coutume générale des mathématiciens, quand ils traitent des lignes, de donner le *caractère* (τὸ σύμπτωμα, la relation correspondant à ce que nous appelons aujourd'hui l'*équation*) de chaque espèce. Ainsi Apollonius donne le *caractère* de chacune des *coniques;* Nicomède a fait de même pour les *conchoïdes,* Hippias pour les *quadratrices,* Persée pour les *spiriques.* »

A la vérité, Hankel a prétendu, sans toutefois donner de raisons, que l'Hippias cité par Proclus dans ces deux passages n'était pas le contemporain de Socrate. Mais M. Cantor (*Vorlesungen,* p. 165) a excellemment défendu l'opinion commune, fondée d'ailleurs sur-

---

(¹) Je donne l'équation polaire de cette courbe sous la forme la plus simple qui corresponde à sa définition dans *Pappus*, IV, 31, éd. Hultsch, p. 252.

(²) *Procli Diadochi in primum* Euclidis Elementorum *librum commentarii.* G. Friedlein. — Leipzig, Teubner, 1873.

(³) Le pluriel est ici un hellénisme et ne doit nullement faire soupçonner que les anciens aient considéré sous le nom de *quadratrice* différentes espèces de courbes. *Mixtes* désigne chez Geminus, qui suit Proclus, les lignes autres que la droite et le cercle.

tout sur ce qu'on ne connaît pas d'autre géomètre du nom d'Hippias. Je me contenterai donc de répondre aux objections nouvelles formulées par M. G.-I. Allman (*Greek Geometry from Thales to Euclid,* Part II, Dublin, 1881).

1° Hippias d'Elis ne figure pas comme mathématicien, mais seulement comme autorité historique, dans la liste des géomètres de Proclus (p. 64-68), liste qui provient d'Eudème. L'inventeur de la quadratrice aurait mérité davantage.

Mais cette omission s'explique suffisamment par le discrédit qui frappait les sophistes aux yeux d'Eudème, et la liste en question en présente une autre bien plus singulière, celle de Démocrite.

2° Diogène Laërce (VIII, 83) dit qu'Archytas fut le premier à introduire un mouvement d'instruments dans une figure géométrique; et le tracé de la quadratrice réclame un tel mouvement. Cette remarque est inexacte. Un nombre indéfini de points de la quadratrice, aussi rapprochés qu'on le veut, peuvent être obtenus avec la règle et le compas, et il est douteux que les anciens aient jamais cherché un autre procédé pour construire cette courbe.

L'autorité de Diogène Laërce est d'ailleurs d'autant moins acceptable qu'il parle en termes exprès de la solution du problème de Délos par Archytas; or Eutocius (*Archimède,* éd. Torelli, p. 143-144) nous a conservé, d'une part, cette solution où ne figure l'emploi d'aucun instrument, et, d'un autre côté (p. 145), une lettre où Eratosthène affirme que, « si Archytas, Eudoxe, etc., furent capables de démontrer l'exactitude de leurs solutions, ils ne purent les réaliser manuellement et pratiquement, sauf jusqu'à un certain point Ménechme, mais d'une façon très pénible ».

Le *mésolabe* d'Eratosthène est de fait le plus ancien instrument dont on connaisse l'emploi pour une construction géométrique; car, en présence du texte que je viens de citer, on ne peut considérer que comme apocryphe l'élégante solution pratique du problème de Délos attribuée à Platon par Eutocius (p. 135). Ce même texte indique qu'avant Ménechme on ne se préoccupait pas du tracé pratique des courbes, tandis que l'inventeur des sections coniques aurait essayé plus ou moins de résoudre cette question pour les lignes qu'il avait découvertes.

3° M. Allman objecte encore que Pappus ne connaît nullement Hippias.

Pappus dit en effet (IV, 30, p. 250-2) : « Pour la quadrature du cercle, Dinostrate, Nicomède et quelques autres plus récents ont employé une courbe qui prend son nom de sa propriété même, car ils l'appellent *quadratrice;* voici sa génération. »

Dinostrate, frère de Ménechme, vivait vers le milieu du IVe siècle et doit avoir été postérieur à Hippias de deux générations. Quant à Nicomède, postérieur à Ératosthène, il appartient au IIIe siècle.

Mais la divergence des renseignements fournis par Proclus et par Pappus s'explique facilement par la différence des sources où ils puisent. Tout ce que dit le premier des courbes est incontestablement emprunté à Geminus, auteur du Ier siècle avant l'ère chrétienne, et son langage prouve dès lors que Geminus connaissait un écrit d'Hippias sur la quadratrice et le considérait comme inventeur de cette courbe, quoiqu'il n'ignorât pas que Nicomède s'en était également occupé.

Cette remarque nous permet d'écarter immédiatement le quatrième argument de M. Allman, à savoir qu'il y aurait eu un autre Hippias auquel pourraient se rapporter les citations de Proclus. Ce serait un architecte contemporain de Lucien, qui en fait un grand éloge comme géomètre, etc., dans son écrit : *Hippias ou le Bain*. A vrai dire, l'existence de cet Hippias n'est nullement prouvée, car l'écrit en question semble bien n'être qu'une pure fantaisie; mais, en tout cas, il est impossible de songer à aucun géomètre postérieur à Geminus ou même, nous semble-t-il, à Nicomède.

Quant à Pappus, il ne cite Geminus qu'à propos des travaux d'Archimède en Mécanique; il ne semble lui avoir rien emprunté pour la Géométrie, et notamment en ce qui concerne les lignes et les surfaces courbes. Sa manière de voir diffère en plusieurs points essentiels de celle de l'auteur suivi par Proclus. A la citation qu'il fait d'ailleurs (IV, 31, p. 254) d'un Sporos dont il reproduit les critiques sur la quadrature du cercle au moyen de la courbe d'Hippias, on ne peut guère douter que ce Sporos ne soit la source où il puise ce qu'il dit sur la quadratrice.

J'ai essayé d'établir ailleurs [1] que ce Sporos, de Nicée, vivait

---

[1] *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, p. 70-76, 257-261; 1882.

probablement à la fin du IIIe siècle de notre ère, c'est-à-dire qu'il était contemporain de Pappus, mais plus âgé que lui; qu'il avait recueilli, pour une compilation intitulée Ἀριστοτελικὰ κήρια (rucher aristotélique), les travaux mathématiques relatifs à la quadrature du cercle et à la duplication du cube; que ce recueil fut pour les deux objets la source principale de Pappus et d'Eutocius.

Au temps de Sporos, l'écrit d'Hippias pouvait parfaitement avoir disparu sans laisser de traces ailleurs que dans Geminus; et cela d'autant plus que les travaux postérieurs de Dinostrate, de Nicomède, etc., avaient naturellement dû le faire négliger. Le silence de Pappus sur Hippias n'a donc rien d'étonnant, et l'identification de cet Hippias avec le sophiste d'Elis reste, en somme, l'hypothèse la plus plausible.

II.

Il ne me paraît pas douteux que le but de l'invention de la quadratrice n'ait été le partage d'un angle ou d'un arc donné suivant un rapport donné. La génération de la courbe est combinée pour la solution immédiate de ce problème, tandis que la quadrature du cercle, ou plutôt la rectification de la circonférence, ne correspond, pour ainsi dire, qu'accidentellement à la solution d'un problème particulier, la recherche du point d'intersection de la courbe avec son axe. J'avais par suite été amené à interpréter le passage de Pappus, cité plus haut, en admettant que le travail d'Hippias s'était borné à la division d'un angle donné, que Dinostrate avait le premier fait l'application de la courbe à la quadrature du cercle, et que la dénomination qui lui a été donnée correspondait à ce travail postérieur. M. Cantor semble avoir admis (*Vorlesungen*, p. 167, 213), plus ou moins explicitement, les mêmes conclusions; mais, en y réfléchissant davantage, je crois qu'elles soulèvent de graves objections.

Tout d'abord le texte de Geminus dans Proclus suppose nettement que le nom de la courbe lui avait été donné par son inventeur Hippias. D'autre part, il est clair que l'usage pratique de la courbe suppose la construction d'un *patron* découpé en équerre avec la quadratrice remplaçant l'hypoténuse et applicable, comme notre *rapporteur*, sur les figures considérées. Dès lors la détermination de l'intersection de la courbe avec l'axe s'imposait immé-

diatement, et le problème n'est réellement pas si difficile qu'on doive croire qu'Hippias fût incapable d'apercevoir sa relation avec la quadrature du cercle. Enfin la célébrité de ce dernier problème était dès lors assez grande pour qu'Hippias lui empruntât le nom de sa courbe, plutôt qu'au problème qu'il avait sans aucun doute considéré en premier lieu.

Quant au témoignage de Pappus, les remarques que nous avons faites plus haut en infirment notablement la valeur, et je suis d'autant moins disposé à en tenir compte qu'il ne serait nullement en fait favorable à la thèse que j'examine; car non seulement il ignore absolument Hippias, mais il considère l'emploi de la quadratrice pour la division de l'angle comme une découverte relativement récente, ce qui est inadmissible. On pourrait seulement conclure de là que ni Dinostrate, ni Nicomède n'avaient traité ce problème sur la quadratrice.

Pappus, IV, 45, p. 284 : « Le partage d'un angle ou d'un arc donné en trois parties égales est un problème *solide,* comme nous l'avons démontré (c'est-à-dire un problème réclamant l'emploi de sections coniques); mais la division d'un angle ou d'un arc donné dans un rapport donné est un problème *grammique* (exigeant l'emploi de courbes plus complexes que les coniques); il a été résolu par les auteurs récents (ὑπὸ τῶν νεωτέρων), et nous le traitons de deux façons. »

Suivent en effet deux solutions, l'une par la quadratrice, l'autre (46) par la spirale d'Archimède. Pappus revient plus loin (IV, 51, p. 296) sur la même question pour montrer qu'on peut construire un angle incommensurable avec un angle donné.

Quant aux applications à la quadratrice, elles se rencontrent dans Pappus après le premier passage cité (IV, 31, 32, p. 256 et suiv.), puis (IV, 49, p. 292 : *Trouver un cercle dont la circonférence soit égale à une droite donnée, d'après le théorème démontré précédemment,* et IV, 50 : *Décrire sur une courbe donnée un arc de cercle qui soit à cette corde dans un rapport donné.* Dans tout cela, il n'y a rien évidemment d'original de la part de Pappus, quoique, dans ces derniers problèmes et dans ceux sur la division de l'angle, ce ne soit plus à Sporos qu'il fasse ses emprunts.

Mais, en dehors de Pappus et de Proclus, il existe dans l'antiquité, à propos de la quadratrice, un témoignage important sur

lequel l'attention n'a pas été suffisamment appelée, quoiqu'il ait été publié par Bretschneider. C'est un passage d'un commentaire de Jamblique sur les catégories d'Aristote, passage conservé par Simplicius (*Comment. in Aristotelis phys. libros quattuor priores,* ed. Diels, p. 60).

« Aristote ne connaissait probablement pas encore la quadrature du cercle, mais elle a été trouvée par les Pythagoriciens, comme il est clair d'après les démonstrations du pythagoricien Sextus qui avait reçu par une tradition éloignée la méthode de ses démonstrations. Plus tard Archimède l'a trouvée au moyen de la ligne hélicoïde, Nicomède au moyen de celle qu'on appelle proprement *quadratrice,* Apollonius au moyen d'une ligne qu'il appelle *sœur de la cochloïde* et qui est la même que celle de Nicomède, Carpos au moyen d'une ligne qu'il appelle simplement *de double mouvement;* beaucoup d'autres enfin ont diversement résolu le problème.»

Il ne semble pas qu'il y ait lieu de s'arrêter au témoignage concernant les Pythagoriciens; leur fanatique prôneur perd tout sens critique quand il s'agit d'eux. Il suffira de remarquer que Sextus ou plutôt Sextius ([1]) vivait sous Auguste et Tibère. Pour Archimède, Jamblique fait incontestablement allusion au théorème (περὶ ἑλίκων, XVIII) sur l'égalité entre la sous-tangente à la spirale à l'extrémité de la première spire et la circonférence du cercle correspondant, théorème que nous ne pouvons évidemment considérer comme donnant la quadrature du cercle, mais auquel les anciens attribuaient une importance considérable, en tant qu'établissant l'égalité d'une droite déterminée avec une courbe.

Nous rencontrons ensuite, en concordance avec Pappus et Proclus, une preuve du travail de Nicomède sur la quadratrice, puis une donnée importante; Apollonius s'est occupé de la même courbe, mais en lui donnant un autre nom : *sœur de la cochloïde.*

« *Cochloïde* est, d'après Pappus, le nom de la courbe inventée par Nicomède et que nous appelons *conchoïde* avec Proclus et Eutocius. Le terme *sœur de la cochloïde* doit donc avant tout être regardé comme une flatterie adressée par Apollonius à Nicomède. Il permet par conséquent de fixer l'époque de ce dernier

---

([1]) Il y eut deux philosophes de ce nom, le père et le fils; il est difficile de conjecturer duquel Jamblique a voulu parler.

entre Eratosthène et Apollonius, au lieu de la faire descendre après Apollonius, comme on le fait ordinairement. »

Il est difficile de savoir pourquoi le géomètre de Perge a tenu à rejeter le terme de *quadratrice*. Peut-être le trouvait-il trop général et regardait-il d'autres courbes, par exemple, lui aussi, la spirale d'Archimède, comme ayant autant de droits à ce titre; peut-être, ayant calculé plus exactement encore que le Syracusain le rapport de la circonférence au diamètre, voulait-il affirmer l'insuffisance des solutions graphiques.

Le rapprochement de la courbe d'Hippias avec la conchoïde, au point de vue géométrique, ne peut, d'autre part, être regardé que comme passablement forcé; cependant je serais porté à en induire qu'Apollonius avait prolongé la quadratrice en dehors du cercle générateur et qu'il en avait reconnu les asymptotes. On peut être confirmé dans cette hypothèse par ce fait que Geminus (Proclus, p. 111), essayant de classer les courbes d'après leur forme, n'en reconnaît point qui s'arrêtent brusquement, comme le supposerait pour la quadratrice la façon dont Pappus expose la génération de la courbe, et comme on la donne d'ordinaire d'après lui.

Avant de quitter la citation de Jamblique, j'ajouterai que, dans la courbe de *double mouvement* de Carpos, il est difficile de ne pas reconnaître la cycloïde dont la génération si simple n'a pas dû échapper aux anciens.

L'âge de Carpos ne peut être fixé avec précision. Proclus cite longuement (p. 241 et suiv.) une discussion sur la prééminence logique entre les théorèmes et les problèmes : dans cette discussion, Carpos le mécanicien soutenait une opinion opposée à celle de Geminus : il semble bien lui être postérieur. D'autre part, Pappus cite Carpos d'Antioche à propos des travaux mécaniques d'Archimède. On a ainsi un intervalle de trois siècles de Geminus à Pappus; mais, d'après le titre de l'ouvrage cité par Proclus (ἀστρολογικὴ πραγματεία, Traité astrologique), j'inclinerais à le placer avant Ptolémée, c'est-à-dire au premier siècle de l'ère chrétienne.

III.

La citation de Sporos par Pappus (IV, p. 254), relative à la quadratrice, renferme une expression qui mérite d'appeler l'attention.

Après avoir critiqué l'emploi de la courbe pour la quadrature et observé qu'en fait l'intersection avec l'axe ne peut être déterminée mathématiquement si l'on ne connaît pas le rapport de la circonférence au rayon, Sporos ajoute : « A moins de se donner ce rapport, il ne faut pas, par confiance dans la réputation des inventeurs, admettre une courbe en quelque sorte *trop mécanique* (μηχανικωτέραν πως οὖσαν) ».

Un peu plus loin (p. 258), Pappus reprend cette expression à son compte : « La génération de cette ligne (la quadratrice) est, comme on l'a dit, trop mécanique (μηχανικωτέρα), mais on peut l'analyser comme suit géométriquement par les *lieux en surfaces.* »

Ces deux passages sont remarquables parce que c'est uniquement sur eux qu'a été fondée la fameuse distinction des courbes *géométriques* et des courbes *mécaniques,* que le XVIIe siècle considérait comme ayant été classique dans l'antiquité : rien ne justifiait en réalité cette opinion; en fait, Pappus ne distingue guère les courbes que suivant qu'elles sont engendrées par des intersections de solides ou d'une autre façon. Dans la seconde classe, il range à côté des hélices (ce qui comprend les spirales) les quadratrices, les cochloïdes, les cissoïdes (III, p. 54, IV, p. 270). Geminus dans Proclus ne fait que des classements aussi artificiels.

Le véritable sens de l'expression est au reste assez obscur, et il est douteux qu'il soit le même pour Pappus et pour Sporos; chez le premier ce sens paraît plutôt à rapprocher de celui de *grossier;* il oppose la génération vulgaire à celle qu'il va donner, par d'élégantes combinaisons de surfaces, sur lesquelles nous allons revenir, combinaisons qui, au reste, n'aboutissent nullement à un mode de construction pratique, et surfaces qui supportent la construction de l'hélice ou de la spirale d'Archimède, c'est-à-dire de courbes aussi *mécaniques* au moins que la quadratrice.

Pour Sporos, le sens paraît différent, et il me semble précisé par un membre de phrase qui suit dans le texte, mais que le savant éditeur a regardé avec quelque raison comme suspect. Après *trop mécanique,* vient « et servant aux mécaniciens pour beaucoup de problèmes ». Quelle que soit l'origine de cette phrase, que Pappus y ait condensé avec trop de négligence le texte qu'il avait sous les yeux, qu'elle soit une glose postérieure, il n'en paraît pas moins probable que des équerres en quadratrice étaient depuis le temps

d'Hippias employées dans la pratique et que Sporos insiste sur ce que la construction nécessairement approximative de ces instruments ne permet point de les comparer à la règle et au compas.

Quoi qu'il en soit au reste à cet égard, je laisse ce sujet pour aborder ce que Pappus (IV, 33, 34, p. 258-264) appelle la génération géométrique de la quadratrice.

Chasles et M. Cantor ont déjà appelé l'attention sur ces deux propositions intéressantes où il est démontré :

1° Qu'on obtient une quadratrice en projetant sur le plan horizontal l'intersection d'une surface de vis à filet carré à axe vertical :

$$y = x \operatorname{tang} 2\pi \frac{z}{h},$$

et d'un plan passant par une des génératrices rectilignes de cette surface

$$z = my;$$

2° Que cette même surface de vis qui donne une quadratrice pour son intersection avec un plan peut être définie comme ayant pour directrice courbe non plus l'hélice, mais l'intersection d'un cône ([1]) ayant le même axe

$$n^2 z^2 = x^2 + y^2$$

et d'une surface cylindrique ([2]) à génératrices verticales et ayant pour trace horizontale une spirale d'Archimède dont le pôle est sur l'axe

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctang} \frac{y}{x}.$$

Il est intéressant de rechercher à quelle époque on doit attribuer ces propositions.

Il faut remarquer que la surface de vis est appelée *plectoïde* par Pappus ([2]). D'après le contexte, on ne peut douter que ce terme ne désigne une surface réglée à plan directeur, dont une des

---

([1]) Pappus suppose ce cône rectangle.

([2]) Plus littéralement *cylindroïde*.

([3]) P. 262, liv. XIV : ἐν πλεκτοειδεῖ ἐπιφανείᾳ. — P. 260, liv. XIII-XIV, le terme technique est illisible dans les manuscrits. F. Hultsch, induit en erreur par Toselli, a restitué à tort κυλινδρικῇ.

directrices est rectiligne et l'autre une courbe quelconque. C'est ce qu'on appelle d'ordinaire aujourd'hui une surface *conoïde*.

Il serait évidemment à désirer que l'on reprît le terme antique, incontestablement plus rationnel, et que l'on n'employât celui de *conoïde* que dans un sens où pût rentrer celui qu'Archimède lui donnait ([1]) pour désigner, par exemple, les surfaces de révolution du second degré.

Le terme de *plectoïde* ne se rencontre au reste ailleurs que dans un autre passage de Pappus (IV, 36, p. 270) que nous allons traduire.

Pappus distingue les trois genres de problèmes reconnus par les anciens, problèmes *plans* (du premier ou du second degré), *solides* (du troisième ou quatrième degré), *grammiques* (d'ordre supérieur). Il s'exprime ainsi sur ces derniers ([2]) :

« Il reste encore un troisième genre de problèmes qu'on appelle *grammiques;* parce que pour leur solution on emploie d'autres lignes (γραμμαί) que celles dont nous venons de parler ([3]) : ce sont des lignes dont la génération est plus variée et plus forcée, qui dérivent de surfaces moins régulièrement classées et de mouvements plus compliqués. Telles sont les lignes qu'on rencontre dans ce qu'on appelle les *lieux en surface*, ainsi que les autres encore plus diversifiées qu'ont trouvées en grand nombre Démétrios d'Alexandrie dans ses « *Epistases grammiques* » et Philon de Tyane par l'entrelacement de surfaces *plectoïdes* et autres de toute sorte. Ces lignes présentent nombre de caractères singuliers; quelques-unes ont été jugées par les auteurs plus modernes dignes de traités spéciaux, entre autres celle que Menelaos a appelée « *paradoxos* ». Au même genre de problèmes s'appliquent encore d'autres courbes, les hélices, les quadratrices, les cochloïdes, les cissoïdes ».

([1]) Archimède appelle *conoïde orthogone* notre paraboloïde de révolution, *conoïde amblygone* une des deux nappes de l'hyperboloïde de révolution autour de l'axe transverse. *Plectoïde* dérive de πλέκειν (tresser) et paraît signifier particulièrement « qui ressemble à un ouvrage de vannerie ».

([2]) Il est à remarquer que la même distinction se retrouve dans les mêmes termes, mais avec moins de développement, III, p. 54.

([3]) La droite, le cercle et les coniques; les anciens n'ont pas à proprement parler de terme spécial pour désigner les courbes.

Il semble permis de conjecturer, d'après ce passage, que les deux propositions mentionnées tout à l'heure ont été empruntées (par l'intermédiaire de Sporos?) aux *Considérations sur les lignes* de Demetrios d'Alexandrie. Quant à l'âge de cet auteur et de Philon de Tyane qui lui est associé, on doit le placer avant l'ère chrétienne (au IIe siècle avant J.-C.?), puisque Pappus leur oppose, comme νεώτερος, Menelaos qui vivait à la fin du Ier siècle de notre ère. Il convient d'ailleurs de remarquer qu'ici, par « ce qu'on appelle les *lieux en surface* », Pappus désigne spécialement l'ouvrage d'Euclide qui portait ce nom, et où ne devaient probablement figurer, ainsi que le pense M. Heiberg, que le cône, le cylindre, la sphère et leurs intersections.

Il reste à justifier plus pleinement notre hypothèse sur l'époque de l'invention des *plectoïdes*.

Les anciens y furent naturellement conduits par la considération des surfaces de vis sur lesquelles les inventions d'Archimède durent sans aucun doute appeler de bonne heure l'attention des géomètres. Nous allons entrer dans quelques détails à ce sujet.

IV.

Archimède lui-même ne paraît avoir rien écrit sur ses surfaces de vis, ni sur l'hélice cylindrique. On peut le conclure de deux circonstances.

D'une part, Carpos d'Antioche (Pappus, VIII, p. 1026) dit que le Syracusain ne composa sur ses inventions mécaniques que son livre de la *sphéropée* et jugea les autres indignes de Traités semblables. Il semble bien d'un autre côté (Proclus, p. 105) que la théorie de l'hélice fut pour la première fois traitée par Apollonius dans un livre qui portait précisément le titre d'une des plus célèbres inventions d'Archimède « *Sur la vis* » (περί τοῦ κοχλίου).

Le κοχλίας (limaçon d'après Diodore de Sicile et Moschion dans Athénée (*Archimède de Torelli,* p. 365-366) est une machine destinée à l'élévation de l'eau, c'est-à-dire la vis d'Archimède, ainsi que permet de le constater la description de la *cochlia* par Vitruve. Moschion appelle au contraire ἕλιξ la vis comme organe de transformation de mouvement, en rapportant d'ailleurs, comme la précédente, cette invention à Archimède.

Pappus (livre VIII) parle, sous le nom de κοχλίας :

1° D'une vis sans fin engrenant avec une roue dentée (p. 1108-1114); il indique le tracé pratique de l'hélice *monostrophe* et *distrophe* (d'une ou deux spires de l'hélice) et remarque que ce tracé concorde avec la démonstration d'Apollonius; il donne d'autres détails sur la construction de l'appareil, et, d'après Héron dans ses *Mécaniques,* démontre qu'à chaque tour de vis correspond l'avance d'une dent sur la roue;

2° (p. 1122-1130) Et d'une même vis et d'une autre, également sans fin, faisant mouvoir parallèlement à son axe une dent que porte un curseur guidé dans une rainure; l'écrou ne paraît pas inventé.

Les autres passages du livre VIII indiquent que le κοχλίας est une des cinq puissances des anciens (avec le coin, le levier, la moufle et le treuil), qu'il s'appelait proprement ἄπειρος κοχλίας (vis sans fin), pour le distinguer sans doute du κοχλίας pour l'élévation de l'eau. La vis sans fin pouvait d'ailleurs être τετράγωνος (à filet carré) ou bien φακωτός (à filet triangulaire).

D'après Proclus (*loc. cit.*), Apollonius avait démontré dans son écrit *sur la vis* que tous les arcs d'une même hélice cylindrique peuvent coïncider entre eux. Il avait donc poussé assez loin la théorie de cette hélice dont il semble le créateur, mais il n'avait pas dû s'y borner et il avait considéré sans aucun doute les surfaces singulières qu'offrait l'instrument dont il traitait, que ce fût seulement la vis d'Archimède, que ce fût aussi la vis sans fin, ce qui semble plus probable.

Les travaux dont Pappus nous a conservé une faible trace relativement à la surface de vis durent suivre probablement à bref délai l'élan donné par Apollonius. A cette date, ils s'expliquent d'eux-mêmes; plus tard, à une époque de décadence incontestable, il y aurait invraisemblance.

Avant de terminer, j'ajouterai quelques mots au sujet de la ligne *paradoxos* de Menelaos.

Il peut paraître bien aventureux d'essayer de conjecturer, sur la vague et unique indication de Pappus, ce que pouvait être cette courbe. Cependant le champ des recherches peut facilement être limité.

Il résulte incontestablement du texte de Pappus que cette courbe

était engendrée par l'intersection des deux surfaces; d'autre part, d'après le genre des recherches que faisaient les anciens sur les courbes, la propriété singulière qui a fait donner son nom à cette courbe doit être relative, soit à une quadrature, soit au tracé de la tangente, et la seconde hypothèse est de beaucoup la plus improbable ([1]). Enfin rien ne prouve que Menelaos ait été le véritable inventeur de la courbe et de sa propriété singulière; ce fut, à la vérité, un mathématicien de valeur, mais son originalité réelle est bien loin d'être démontrée, et il appartient à un âge où l'on s'occupe plutôt désormais de perfectionner les découvertes antérieures que de les étendre.

Que les quadratures de surfaces courbes aient été abordées par les anciens, comme on est conduit à le conjecturer pour la courbe de Menelaos, Pappus en donne un exemple remarquable, précisément avant le dernier passage que je viens de citer. Il parle (p. 281-268) d'une hélice tracée sur la surface de la sphère et dont l'équation en coordonnées polaires serait, δ étant la distance au pôle, λ la longitude,

$$\delta = \frac{1}{4}\lambda.$$

Il donne la mesure de l'aire de cette hélice et prouve notamment qu'avec le quart de grand cercle passant par le pôle et l'extrémité de l'hélice sur l'équateur, celle-ci divise l'hémisphère en deux parties dont l'une est carrable ([2]).

Si l'on veut aller plus loin pour la divination de la courbe de Ménélaos, on tombe immédiatement sur des conjectures sans appui et il peut même paraître difficile d'en faire de plausibles. J'essayerai toutefois d'en proposer une.

En fait, je ne connais qu'une courbe qui pourrait satisfaire aux

---

([1]) On doit écarter, par exemple, les propriétés relatives à la rectification de la courbe, question dont les anciens ne paraissent point s'être occupés.

([2]) Geminus parle d'hélices sphériques et coniques; la quadrature donnée par Pappus doit donc être antérieure à l'aire chrétienne. On ne peut guère douter que, par analogie avec les hélices cylindrique et sphérique, l'hélice conique n'ait été définie par le mouvement uniforme d'un point sur une génératrice se mouvant elle-même uniformément autour de l'axe du cône. Dans le développement de la surface conique (circulaire droite) sur un plan, ces courbes ont pour transformées des spirales d'Archimède.

conditions énoncées pour représenter la « paradoxos ». C'est celle de la voûte carrable de Viviani, intersection d'une sphère par un cylindre circulaire droit tangent intérieurement, et dont le diamètre est égal au rayon de la sphère. Cette courbe laisse en dehors d'elle dans l'hémisphère qui la comprend une surface équivalente au carré construit sur le diamètre de la sphère.

L'attention des anciens a certainement été appelée de bonne heure sur les courbes de ce genre; car, si le diamètre du cylindre n'est pas déterminé, l'intersection n'est autre que l'*hippopède* inventée par Eudoxe, suivant la restitution de M. Schiapparelli, courbe qui, dans le système astronomique du Cnidien, représentait la trajectoire du mouvement d'anomalie des planètes. D'autre part, le problème de quadrature de surfaces sphériques limitées par des courbes gauches a pu se poser dès l'emploi des voûtes dans les constructions.

Or, si l'on prend pour pôle un des sommets de la courbe, et si l'on compte les longitudes à partir du grand cercle passant par ce pôle et tangent au cylindre, l'équation de la courbe est, en coordonnées polaires,

$$\delta = \lambda.$$

D'après l'exemple donné par Pappus, il est clair que la quadrature n'offrait aucune difficulté pour les anciens. Cette courbe présentait pour eux une autre particularité : un *caractère* qui la classait dans les hélices sphériques, tandis qu'elle s'obtient d'ailleurs par l'intersection de deux surfaces simples.

(*A suivre.*)

SUR QUELQUES INTÉGRALES DONNÉES DANS LE COURS D'ANALYSE DE M. HERMITE;

PAR M. DUARTE LEITE PEREIRA DA SILVA.

Soient

$$u = x\sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x\cos x,$$

et proposons-nous de trouver l'intégrale $y = \int \frac{x\,dx}{(au+bv)^2}$.

On a

$$\begin{aligned} au+bv &= (ax+b)\sin x+(a-bx)\cos x \\ &= (ax+b)\frac{e^{2ix}-1}{2ie^{ix}}+(a-bx)\frac{e^{2ix}+1}{2ie^{ix}}\,i \\ &= \frac{1}{2ie^{ix}}[e^{2ix}(x+i)(a-ib)-(x-i)(a+ib)] \\ &= \frac{(x-i)(a+ib)}{2ie^{ix}}\left(e^{2ix}\frac{x+i}{x-i}\,\frac{a-ib}{a+ib}-1\right). \end{aligned}$$

Posant

$$z=e^{2ix}\cdot\frac{x+i}{x-i}\,\frac{a-ib}{a+ib},$$

on aura

$$au+bv=\frac{(x-i)(a+ib)}{2ie^{ix}}(z-1);$$

donc

$$y=\int\frac{-4e^{2ix}x^2\,dx}{(a+ib)^2(x-i)^2(z-1)^2}.$$

Mais

$$dz=2i\,\frac{a-ib}{a+ib}\,\frac{e^{2ix}x^2}{(x-i)^2}\,dx;$$

par suite,

$$y=\frac{2i}{a^2+b^2}\int\frac{dz}{(z-1)^2}=\frac{2i}{a^2+b^2}\,\frac{1}{1-z}$$

et

$$y=\frac{i-x}{a-ib}\,\frac{e^{-ix}}{au+bv}+\text{const.}=\frac{1}{a-ib}\,\frac{iu+v}{au+bv}+\text{const.},$$

et non $-\dfrac{u}{au+bv}$, comme je l'avais affirmé, par mégarde.

Pour obtenir $\int\frac{x^2\,dx}{u^2}$ et $\int\frac{x^2\,dx}{v^2}$, il suffit de donner à a et b d valeurs convenables.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WALRAS (LÉON), Professeur d'Économie politique à l'Académie de Lausanne. — THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA RICHESSE SOCIALE. Lausanne, 1883.

COURNOT (AUGUSTIN). — RECHERCHES SUR LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE DES RICHESSES. Paris; 1838.

Le titre de ces Livres semble promettre pour la science d'Adam Smith une voie sûre et nouvelle. Les auteurs n'ont rencontré cependant qu'une approbation très indifférente. Savant distingué, écrivain habile, esprit original et élevé, dans l'art des déductions, Cournot était un maître. M. Walras se fait honneur d'être son disciple. « Cournot », dit-il, « est le premier qui ait tenté franchement l'application des Mathématiques à l'Économie politique; il l'a fait dans un Ouvrage publié en 1838, qu'aucun auteur français n'a jamais critiqué. J'ai tenu », ajoute le savant professeur de Lausanne, « à mentionner l'auteur d'une tentative remarquable, sur laquelle, je le répète, aucun jugement n'a été porté, et à laquelle j'ose dire que justice n'a pas été rendue. »

Ce reproche, publiquement adressé aux compatriotes de Cournot, a été pour moi l'occasion de relire un Ouvrage fort oublié, dont, malgré la juste réputation de l'auteur, ceux qui l'ont parcouru n'ont pas tous conservé une impression favorable. « Le titre de mon Ouvrage », dit Cournot dans sa préface, « n'annonce pas seulement des recherches théoriques, il indique que j'ai l'intention d'y appliquer les formes et les symboles de l'Analyse mathématique. » Les formes et les symboles de l'Analyse mathématique imposent la précision et promettent la rigueur; ils n'inspirent et ne donnent droit à aucune indulgence. Les formules sont vraies ou fausses, les définitions vagues ou précises, les raisonnements rigoureux ou absurdes; tel est le langage des géomètres. C'est celui de Cournot. Plusieurs essais ont précédé le sien; il n'en cite qu'un seul : les principes d'Economie politique de Canard, petit Ouvrage publié en l'an X et couronné par l'Institut. « Ces prétendus principes », dit Cournot, « sont si radicalement faux et l'application en est telle-

ment erronée, que le suffrage d'un corps éminent n'a pu préserver l'Ouvrage de l'oubli. On conçoit aisément que des essais de cette nature n'aient pas réconcilié avec l'Algèbre des économistes tels que Say et Ricardo. »

Le citoyen Canard, quoique professeur de Mathématiques, ignore ou oublie les éléments du calcul des fonctions. Sachant que le prix d'une denrée s'accroît avec le nombre des acheteurs, avec leurs besoins et avec les revenus dont ils disposent, et qu'il diminue avec le nombre et l'empressement des vendeurs, la traduction dans la langue algébrique est pour lui immédiate; $B + Ax$ est en effet, suivant Canard, le type de toute fonction croissante de la variable x, et $B' - A'x$ celui des fonctions décroissantes; tel est le point de départ et la base de sa théorie.

Comment devint-il lauréat de l'Institut? Sur le rapport de quelle Commission? Je n'ai pas eu l'indiscrétion de le chercher (1).

Les problèmes abordés par Cournot sont insolubles par le raisonnement seul; il n'entre pas cependant dans le plan du savant auteur de recourir à l'observation des faits; non qu'il en méconnaisse l'importance; mais il faut diviser le travail, et le sien est autre. Il étudie les lois, laissant à d'autres les chiffres. Ses formules, où n'entrent que des lettres, sont hérissées de fonctions inconnues; en s'appliquant à les chercher, il croirait sortir de son rôle. Vraies ou fausses, leur étude, pour les hommes de pratique, doit sembler une fatigue inutile; ils s'y soustrayent en fermant le livre. Si la théorie des richesses de Cournot, malgré la science de l'auteur, la juste considération attachée à sa personne, l'influence de sa situation et le mérite de ses autres écrits, n'a pu, depuis un demi-siècle, attirer sérieusement l'attention, c'est que les idées s'y dérobent sous l'abondance des signes algébriques; la suppression des symboles réduirait le livre à quelques pages, et presque toutes

---

(1) La deuxième Classe de l'Institut (Sciences morales et politiques) avait proposé la question suivante :

« Est-il vrai que, dans un pays agricole, toute espèce de contribution retombe sur les propriétaires fonciers? et, si l'on se décide pour l'affirmative, les contributions indirectes retombent-elles sur les mêmes propriétaires avec surcharges? »

Canard fut couronné. Comme l'Homme aux quarante écus, il se prononçait pour la négative, mais en faisant de la solution demandée « un chaînon d'une suite de conséquences », dont Cournot a signalé avec raison la fausseté.

offriraient alors de judicieuses réflexions et des assertions dignes d'intérêt. Cournot veut-il étudier les lois de la lutte dont résulte, sur un marché, le prix courant de chaque denrée, problème difficile, si mal résolu par Canard, il fait remarquer que, pour une marchandise donnée, le prix de vente étant nécessairement en rapport avec le débit, en le nommant p on pourra représenter le débit par $\varphi(p)$; $\varphi(p)$ désignant une fonction dont la dérivée est négative, la recette totale du vendeur sera le produit $p\varphi(p)$; c'est ce produit, si la marchandise ne coûte rien, qu'il faut rendre le plus grand possible. Sans en savoir ni en chercher davantage, on peut, en conséquence, d'après les règles du Calcul différentiel, égaler à zéro la dérivée. Ainsi

$$p\,\varphi'(p) + \varphi(p) = 0$$

est l'équation que le vendeur doit résoudre; il doit s'assurer toutefois que la seconde dérivée est négative et vérifier l'inégalité,

$$p\varphi''(p) + 2\varphi'(p) < 0.$$

Telle est, dans le cas d'une marchandise qui ne coûte rien et n'est grevée d'aucun impôt, la théorie mathématique du monopole. Ceux qui voudront l'appliquer n'auront plus qu'à chercher la fonction $\varphi(p)$. Le savant auteur fait judicieusement remarquer que, s'il ne peut satisfaire tous les acheteurs, le vendeur devra, par l'élévation du prix, réduire la demande à égaler, sans la surpasser, le chiffre possible de la production. Les choses étant ainsi établies, si la denrée est frappée d'un impôt, que doit-il arriver ? Le prix le plus souvent s'élèvera; il peut, dans certains cas, rester invariable, mais l'effet de l'impôt ne l'abaissera jamais. Toutes ces assertions de Cournot sont exactes; mais, pour les rendre évidentes, fallait-il employer l'Algèbre ? Insistons sur ce cas d'une source trop peu abondante pour suffire à la consommation, qui donnerait le produit maximum. Au moment où l'on établit un impôt sur chaque litre vendu, il pourra arriver qu'après avoir acquitté cet impôt, le propriétaire ait intérêt à accroître le prix qui jusque-là lui donnait le plus de profit, en diminuant, par une conséquence nécessaire, le chiffre de la production. L'accroissement du prix de vente lui procure en effet, sur chaque litre vendu, le même avantage qu'avant l'établissement de la taxe; mais la perte n'est plus la même, car,

sur les bouteilles non vendues, il gagne ce qu'il donnait au fisc. Il peut arriver cependant que la diminution de la vente compense le double avantage de vendre à un prix plus élevé et de payer un impôt moindre; le propriétaire de la source doit supporter alors l'impôt tout entier, sans changer ni son prix ni le chiffre de sa production?

« Dès lors », ajoute Cournot, « il semblerait que, dans ce cas, le fisc ne serait limité, dans la fixation de la taxe, que par la condition de ne pas absorber entièrement le revenu net du producteur. Mais cette conséquence serait inexacte et l'on peut en démontrer la fausseté, au moins dans un cas. »

Cournot définit ce cas en langage algébrique; c'est celui où la fonction $\varphi'(D)$ est croissante avec D, et où l'on a $p' - p_0 > i$, p_0 et p' étant respectivement les racines des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} F(p) + [p - \varphi'(D)] \; . \; F'(p) = 0, \\ F(p) + [p - \varphi'(D) - i]\, F'(p) = 0. \end{cases}$$

Ces lettres et ces fonctions ont figuré dans les pages précédentes, elles sont connues du lecteur; cependant un géomètre même peut désirer une explication moins savante. Sans en donner aucune, Cournot continue : Soient Δ la limite nécessaire de la production et π la valeur de p tirée de la relation $F(p) = \Delta$; il faudrait, dans l'hypothèse, que π fût $> p'$ et *a fortiori* $> p_0 + i$, i étant égal à $\pi - \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$. On aurait donc $\pi > p_0 + \pi - \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$ ou $p_0 < \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$.

Mais cette dernière inégalité ne peut certainement avoir lieu et $\varphi'(p)$ est, conformément à l'hypothèse, une fonction croissante avec D; car alors, p_0 étant $< \pi$, la demande D_0 correspondant à p_0 est $> \Delta$. $\frac{\varphi(D_0)}{D_0}$ est plus grand que $\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}$; p_0 serait donc $< \frac{\varphi(D_0)}{D_0}$.

Cette valeur de p_0 constituerait donc le producteur en perte et par conséquent ne pourrait pas être racine de l'équation (1).

Une traduction devient nécessaire.

La question est celle-ci : dans les conditions où l'énoncé place le propriétaire de la source, l'État peut-il, par voie d'impôt, sur chaque litre de la marchandise, s'approprier la totalité du produit net, sans diminuer celui-ci et, par conséquent, sans procurer l'élévation du prix de vente? D'après l'une des hypothèses exprimées algébriquement, les frais croissent pour chaque litre avec le

chiffre de la production. Si l'impôt sur l'ensemble absorbe tous les bénéfices sur les derniers litres obtenus, qui coûtaient plus cher que les autres, il mettra le producteur en perte; on s'abstiendra dès lors de les produire, et, la marchandise étant moins abondante, les prix s'élèveront, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il y a donc contradiction à admettre qu'on puisse, sans diminuer la production, absorber par un droit fixe la totalité du produit net. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs que les frais soient croissants pour que, avant d'abandonner au fisc la totalité de ses bénéfices, le propriétaire cherche à se défendre, dût-il diminuer le produit net en élevant les prix. On ne s'explique pas que Cournot, en annonçant qu'on peut faire la preuve *au moins dans un cas,* semble douter de ce qui arriverait dans les autres. C'est à propos du Chapitre où sont puisés ces exemples et ces formules que M. Walras a écrit : « La théorie du monopole a été donnée sous la forme mathématique, qui est la forme la plus claire et la plus précise, par M. Cournot, au Chapitre V de ses recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses; malheureusement les économistes n'ont pas jugé à propos de prendre connaissance de cette théorie, et ils en sont réduits, au sujet du monopole, à une confusion d'idées qui, chez eux, se traduit à merveille par la confusion des mots. »

La condamnation est sévère. Les calculs dont nous avons cité un passage ne sont pas clairs cependant pour tout le monde; les résultats semblent de petite importance; quelquefois même, je dois l'avouer, ils paraissent inacceptables.

Telle est l'étude, faite au Chapitre VII, de la lutte entre deux propriétaires qui, sans avoir à craindre aucune concurrence, exploitent deux sources de qualité identique. Leur intérêt serait de s'associer ou tout au moins de fixer le prix commun, de manière à prélever sur l'ensemble des acheteurs la plus grande recette possible; mais cette solution est écartée. Cournot suppose que l'un des concurrents baissera ses prix pour attirer à lui les acheteurs, et que, l'autre, pour les ramener, les baissant à son tour davantage, ils ne s'arrêteront dans cette voie que lorsque chacun d'eux, lors même que son concurrent renoncerait à la lutte, ne gagnerait plus rien à abaisser ses prix. Une objection péremptoire se présente : dans cette hypothèse aucune solution n'est possible, la baisse n'au-

rait pas de limite ; quel que soit en effet le prix commun adopté, si l'un des concurrents abaisse seul le sien, il attire à lui, en négligeant des exceptions sans importance, la totalité de la vente, et il doublera sa recette si son concurrent le laisse faire. Si les formules de Cournot masquent ce résultat évident, c'est que, par une singulière inadvertance, il y introduit, sous le nom de D et D', les quantités vendues par les deux concurrents, et que, les traitant comme des variables indépendantes, il suppose que, l'une venant à changer par la volonté de l'un des propriétaires, l'autre pourra rester constante. Le contraire est de toute évidence.

Cournot, dans d'autres occasions, introduit dans l'énoncé de ses problèmes des abstractions dont la déclaration formelle met à l'abri sa responsabilité de géomètre. N'est-on pas toujours libre de poser un problème à sa guise ? C'est ainsi qu'en traduisant en formules la question si complexe de la liberté commerciale, après avoir démontré mathématiquement que la nation qui exporte accroît son revenu et que celle qui reçoit des marchandises diminue le sien, il ajoute : « Nous ne tenons pas compte, en déduction de cette diminution réelle de revenu, de l'avantage résultant, pour les consommateurs qui achètent par suite de la baisse, de ce qu'ils font ainsi de leurs revenus un usage plus à leur convenance. »

Supposons, par exemple, que le prix du drap baisse de moitié chez la nation qu'on déclare appauvrie ; ceux qui portaient des vêtements de coton en hiver pourront les remplacer par des costumes de drap, et, en faisant ainsi de leur revenu *un usage plus à leur convenance*, diminuer la mortalité. C'est un avantage. Cournot le reconnaît ; mais, ne pouvant l'évaluer dans ses formules, il prévient simplement qu'il n'en tiendra pas compte. A-t-on le droit de lui rien reprocher ?

Les représentations géométriques, dans le Livre de M. Walras, remplacent souvent les formules ; les raisonnements sont plus accessibles, les résultats plus voisins de l'application : le succès a été plus rapide et plus grand. « Si l'on ne considérait l'état de la question qu'en France et en Angleterre », écrit-il au savant professeur Stanley Jevons, qui s'est rencontré avec lui sur plus d'un point, « nous n'aurions guère à partager qu'une réputation de [illegible] chimériques ; mais il en est autrement ailleurs, notamment, [illegible]

Italie, où la méthode nouvelle a été saisie, dans son esprit et dans sa portée, avec une intelligence et une promptitude merveilleuses. »

Sans aborder ici les nombreuses, importantes et difficiles questions traitées par M. Walras, et me prononcer sur les conclusions qui partagent les meilleurs juges, je veux me borner à discuter un principe proposé comme fondamental.

Imaginons un marché sur lequel se présentent des porteurs d'une marchandise (A) disposés à en donner une partie pour se procurer de la marchandise (B), et où, d'un autre côté, se présentent des porteurs de la marchandise (B) qui veulent la convertir en marchandise (A). Un certain cours s'établira ; m(A) seront échangés contre n(B). Quels sont les éléments constitutifs de ce prix ? M. Walras, que j'abrège, suppose, pour résoudre ce problème, que chaque porteur de l'une des marchandises, sans rien laisser à l'impression de la dernière heure, ait pris, avant d'arriver au marché, une résolution définitive pour chacun des cas qui peuvent se présenter. Remplaçons, pour plus de concision, la marchandise (B) par de l'argent et supposons que la marchandise (A) soit du blé, le marché mettant en présence des cultivateurs qui désirent les plus hauts prix et des acheteurs qui désirent les moindres. Chaque acheteur, suivant l'hypothèse, donnera ses ordres à un courtier, et lui dira, par exemple : si le cours est 20^{fr}, achetez pour moi 100^{hlit} ; à 25^{fr} n'en prenez que 60 ; à 30^{fr} je n'en veux que 10, et à 35^{fr} je m'abstiens. Le tableau complet fera connaître, en regard de chaque cours, le chiffre correspondant des achats. Les vendeurs, de leur côté, ont donné leurs ordres, et l'on sait, pour chaque cours, la quantité que chacun propose.

La solution est fort simple : le savant professeur suppose que, si l'on réunit les carnets de tous les acheteurs, et que, pour chaque cours successivement, on fasse la somme de leurs demandes, les carnets des vendeurs, par leur réunion, fourniront un tableau semblable. Ces tableaux résultants pourront être remplacés par des courbes dont les abscisses sont les prix de vente. Le point d'intersection des deux courbes a pour abscisse le cours que M. Walras nomme cours d'équilibre : c'est celui-là qui tend à s'établir.

Tel est le théorème de M. Walras ; en voici la démonstration. Supposons que les courbes se coupent en un point dont l'abscisse

soit par exemple 25. Si, dès le début du marché, on propose le cours de 25^{fr} par hectolitre, le chiffre des demandes à ce cours égalant par hypothèse celui des offres, les transactions s'accompliront aisément, chaque vendeur trouvant un acheteur et chaque acheteur un vendeur; mais aucune vente ultérieure ne sera possible; au-dessus de 25^{fr}, on ne trouvera plus d'acheteurs, ni, au-dessous, de vendeurs. Si l'on avait fixé tout d'abord un cours supérieur à 25^{fr}, on se serait aperçu, après quelques transactions, que les offres surpassaient les demandes, et il y aurait eu baisse; un prix inférieur à 25^{fr} provoquerait, au contraire, la hausse, et, dans les deux cas, on s'approche du cours d'équilibre.

Je crois avoir résumé, sans nuire à sa clarté, le raisonnement du savant professeur de Lausanne.

J'y ferai maintenant une objection. En remplaçant le groupe des acheteurs par un acheteur unique demandant à chaque cours autant d'hectolitres que tous les acheteurs réels pris ensemble, on change les conditions du problème. Il n'est pas permis davantage de remplacer tous les vendeurs par un seul. Supposons, pour le démontrer par un exemple, que deux acheteurs aient demandé 100^{hlit} chacun, le premier au cours de 20^{fr} et rien à un prix plus élevé, le second quel que soit le cours. Supposons, de plus, qu'au premier cours de 20^{fr} le courtier chargé de tous les ordres de vente ait vendu 100^{hlit}. Il n'est pas indifférent que ce soit au compte du premier ou du second acheteur et que l'un ou l'autre se retire du marché, car la présence de l'un tend à abaisser les cours, celle de l'autre à les élever.

On doit remarquer que les courbes qui représentent les ordres des acheteurs aux divers cours doivent nécessairement, sans que pour cela leurs intentions aient changé, varier pour chacun d'eux pendant la durée du marché. Les courbes résultantes, dont l'intersection résout le problème, se déforment sans cesse, et l'on peut aisément démontrer la variation nécessaire de l'abscisse du point elles se coupent. Supposons, par exemple, que l'un des acheteurs où ait inscrit les ordres suivants : à 20^{fr} acheter 100^{hlit}, à 25^{fr} 60^{hlit}, et à 30^{fr} 50^{hlit} seulement. Le premier cours est 20^{fr}; sur les 100^{hlit} qu'il demande on ne peut en acheter que 50; puis les prix s'élèvent, et l'on atteint le cours de 30^{fr}, qui se maintient. Que doit faire le courtier? Acheter 50^{hlit} à 30^{fr}? Nullement, car 50^{hlit} à 20^{fr} et 50^{hlit}

à 30^{fr} en représentent 100 à 25^{fr}, et, à ce prix, on n'en demande que 60. Le courtier devra se décider par la condition que le prix moyen entre son achat nouveau et les 50^{hlit} déjà achetés corresponde, sur le carnet du client, à la totalité des achats faits pour son compte. Pour chaque cours se présente un problème semblable, et la courbe qui représente les ordres doit, après chaque transaction, être calculée et refaite. Doit-on, pour obtenir le prix d'équilibre, se servir de la courbe nouvelle? Si l'on répond oui, le théorème de M. Walras perd son caractère géométrique, le résultat final dépend des circonstances accidentelles qu'on avait eu la prétention d'éliminer. Comment cependant répondre non? Comment admettre qu'un nouveau venu sur le marché, à qui l'on ferait connaître l'état actuel des choses, n'ait pas le droit d'appliquer les principes? Autant vaudrait, pour prévoir les prix, s'informer des ordres donnés au marché du mois précédent.

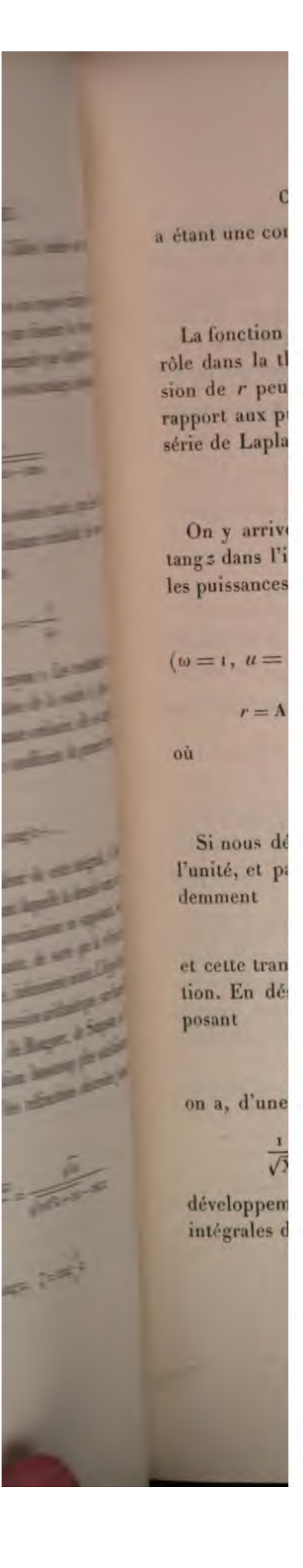
Un dernier argument, s'il subsistait des doutes, les fera complètement disparaître. Supposons que, d'après les intentions connues des acheteurs et des vendeurs, le cours d'équilibre calculé une heure avant l'ouverture du marché à l'aide du théorème discuté soit 25^{fr} l'hectolitre. Un nouvel acheteur se présente : au-dessous de 25^{fr} il veut acheter sans limite, et ne rien prendre ni à ce cours ni *a fortiori* au-dessus. Sa présence, si l'on en croit la règle de M. Walras, n'exercerait aucune influence; elle relève en effet jusqu'à l'infini la courbe des demandes pour les points dont l'abscisse est inférieure à 25, sans la changer en rien pour les autres; l'intersection, dont on a fait dépendre le résultat, restera la même et correspondra toujours à l'abscisse 25. Peut-on admettre une telle conclusion? Le cours de 25^{fr}, en supposant qu'il tende à s'établir, ne sera ni le seul ni le premier; les prix oscilleront autour de lui; chaque fois qu'ils lui seront inférieurs, l'acheteur nouveau se présentera, et ceux qui lui vendront, ayant écoulé tout ou partie de leur marchandise, n'offriront plus, au cours de 25^{fr}, ce qu'ils avaient offert au début. L'un d'eux, je suppose, avait apporté 100^{hlit} au marché; au cours de 25^{fr} il voulait tout vendre, et, à 24^{fr}, n'en livrer que 80; le cours de 24^{fr} s'est présenté : l'acheteur dont nous parlons a pris ses 80^{hlit}; il n'en reste que 20 à offrir; l'ordonnée de la courbe des vendeurs a donc subi, pour l'abscisse 25, une diminution égale ou supérieure à 80;

celle des achats n'a pas changé. Le point d'intersection des deux courbes s'est donc déplacé, et, comme l'une d'elles a des ordonnées infinies quand l'abscisse est moindre que 25, c'est de l'autre côté que se fera l'intersection nouvelle, et, d'après la règle même que nous contestons, l'intervention du nouvel acheteur doit élever le cours final.

Mon intention n'est pas d'analyser le Livre de M. Walras ; j'y trouverais beaucoup à louer, beaucoup aussi à contredire. Je veux me borner, en terminant, à indiquer une définition par laquelle le savant auteur détourne de sa signification habituelle un mot dont le sens usuel est bien connu. Cela est permis assurément, mais à la condition que le sens nouveau soit rigoureusement défini, Je ne crois pas cette condition remplie, et cependant le mot *rareté,* tel que l'entend M. Walras, joue un grand rôle dans ses raisonnements.

L'ingénieux auteur, dont je prendrai la liberté d'abréger les explications, suppose que le possesseur d'une quantité a d'une certaine denrée tire de cette possession une certaine utilité, une certaine satisfaction de ses besoins ou de ses désirs, que chaque parcelle acquise accroît successivement, de telle sorte que, la quantité possédée passant de x à $x+dx$, l'avantage soit pour lui représenté par $\varphi(x)\,dx$. La possession de a équivaut alors à l'intégrale $\int_0^a \varphi(x)dx$. Le prix réglé par les conditions du marché n'a aucune relation nécessaire avec la fonction φ, qui varie d'un individu à l'autre. Si l'on nomme p le prix de chaque unité achetée ou vendue, il est clair qu'en payant pdx l'acroissement dx, qui, pour lui, représente une satisfaction mesurée par $\varphi(x)dx$, celui dont nous parlons fera une bonne affaire, si $\varphi(x)$ est plus grand que p, et une mauvaise si $\varphi(x)$ est moindre que p ; il devra acheter ou vendre une certaine quantité de la marchandise qu'il possède selon que l'une ou l'autre de ces conditions sera remplie, et cesser ses achats ou ses ventes quand on aura $\varphi(x)=p$. Si $x=\alpha$ est la racine de cette équation, α est ce que M. Walras nomme la rareté de la marchandise pour la personne considérée.

Cette définition, sans parler de l'inconvénient de disposer du sens d'un mot bien connu et usuel, paraît avoir le défaut grave de perdre toute signification quand on l'applique aux commerçants.



C

a étant une co

La fonction
rôle dans la t
sion de r peu
rapport aux p
série de Lapla

On y arriv
tang z dans l'i
les puissances

($\omega = 1$, $u =$

$r = A$

où

Si nous d
l'unité, et p
demment

et cette tran
tion. En d
posant

on a, d'une

développem
intégrales d

sumons ici; on y trouve, en outre, des Tables fondées sur une nouvelle théorie.

Les premiers Chapitres sont consacrés à un exposé critique des théories connues. L'auteur commence par discuter les diverses formes qui peuvent être données à l'intégrale par laquelle s'exprime la réfraction, et il établit qu'il y a tout avantage à adopter la suivante :

$$r = A_0 \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\cot^2 z + 2s - 2\alpha\omega}},$$

qui est plus simple, sans être pour cela moins exacte, que les formules usitées. On a désigné par z la distance zénithale; les variables s, ω sont définies par les relations

$$s = 1 - \frac{r_0}{r}, \quad \omega = 1 - \eta = 1 - \frac{\rho}{\rho_0},$$

où ρ est la densité de la couche de rayon r. Les constantes α et A_0 dépendent de l'indice de réfraction de la couche r_0, qui a la densité ρ_0; mais A_0 n'est pas la constante ordinaire, elle est un peu plus faible (d'environ $\frac{1}{900}$) : c'est le coefficient du premier terme de la série de Laplace

$$r = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + \ldots.$$

Pour qu'on puisse obtenir la valeur de cette intégrale, il faut faire une hypothèse sur la loi suivant laquelle la densité varie avec l'altitude. On a une première approximation en supposant, avec Cassini, la densité de l'air constante, de sorte que la réfraction s'opère dans une couche terminale, infiniment mince. L'hypothèse d'une densité décroissant en progression arithmétique, sur laquelle reposent les formules de Mayer, de Bouguer, de Simpson et de Bradley, fournit une approximation beaucoup plus satisfaisante, car elle permet de représenter les réfractions observées jusqu'à 80°. Si l'on pose

$$\zeta = \frac{\sqrt{\cot^2 z + 2\alpha} - \cot z}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\cot^2 z + 2\alpha} - \cot z}$$

ou bien

$$\sqrt{2\alpha} \operatorname{tang} z = \operatorname{tang} \varphi, \quad \zeta = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi,$$

a étant une constante, la formule de Mayer devient

$$r = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}\zeta.$$

La fonction de z qui vient d'être désignée par ζ joue un grand rôle dans la théorie des réfractions astronomiques, car l'expression de r peut toujours être développée en série ordonnée par rapport aux puissances impaires de ζ. Cette série se déduit de la série de Laplace en faisant

$$\sqrt{2a}\,\text{tang}\, z = \frac{2\zeta}{1-\zeta^2}.$$

On y arrive aussi directement en substituant l'expression de tang z dans l'intégrale même, et en développant le radical suivant les puissances de ζ, par le procédé d'Ivory. En posant

$$s - a\omega = u = av$$

($\omega = 1$, $u = a$, $v = 1$ à la limite de l'atmosphère), on trouve

$$r = A_0 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\cot^2 z + 2u}} = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}(\zeta + B_1\zeta^3 + B_2\zeta^5 + \ldots),$$

où

$$B_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^1 D_v^n (v - v^2)^n\, d\eta.$$

Si nous désignons par i une variable fictive qui a pour valeur l'unité, et par le symbole Δ_i^n l'opération $D_i^n (i = 1)$, on aura évidemment

$$D_v^n (v - v^2)^n = \Delta_i^n (i - i^2 v)^n = \Delta_i^n\, i^n (1 - iv)^n,$$

et cette transformation peut, dans certains cas, faciliter l'intégration. En désignant par a, b deux valeurs particulières de X, et posant

$$C = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

on a, d'une manière générale,

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \frac{2}{1.2\ldots n}\sum C^{2n+1}\Delta_i^n [i(b-a) - i^2(X-a)]^n,$$

développement qui offre un moyen commode d'évaluer certaines intégrales définies.

Nous ne nous arrêterons pas aux expressions de la réfraction sous forme finie qu'on obtient, soit en posant $\eta = (1 - v)^m$, soit en posant $v = (1 - \eta)(a - b\eta)$ ou $v = (1 - \sqrt{\eta})(a - b\sqrt{\eta})$. Les relations de la forme $\eta = f(u)$ permettent sans doute d'établir l'expression de r d'une manière très directe, mais elles ont l'inconvénient de supposer, pour la constitution de l'atmosphère, des lois compliquées. Il en est ainsi de l'hypothèse $\eta = e^{-\frac{u}{a}}$, qui donne

$$r = \frac{2A_0}{\sqrt{2a}}\,\psi\left(\frac{\cot z}{\sqrt{2a}}\right),$$

en désignant par $\psi(Z)$ la transcendante

$$\psi(Z) = \int_Z^\infty e^{Z^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2 + x}},$$

pour laquelle on possède des Tables. La constante a peut se déterminer de différentes manières : en prenant $a = \frac{1}{838}$, on obtient la formule de M. Oppolzer. La théorie de Laplace est fondée sur l'hypothèse

$$\eta = \left(1 + f\frac{u}{a}\right)e^{-\frac{u}{a}},$$

qui permet aussi d'exprimer r par la transcendante ψ, mais d'une manière moins simple; elle a seulement l'avantage de renfermer deux constantes (a, f) au lieu d'une seule, ce qui la rend plus propre à représenter des observations données.

Renonçant aux avantages que présentent les relations un peu artificielles de la forme $\eta = f(u)$, la plupart des géomètres ont préféré définir la constitution hypothétique de l'atmosphère par une relation simple entre la densité et l'altitude (Kramp, Bessel), ou la température et l'altitude (Schmidt, Bauernfeind, Gyldén), ou la densité et la température (Ivory, Kowalski).

Soient p la pression en atmosphères, T la température absolue,

$$\tau = \frac{T}{273} = 1 + 0{,}00366\,t;$$

la loi de Mariotte et de Gay-Lussac donne

$$p = \rho\tau,$$

et l'équation d'équilibre de l'atmosphère devient

$$8\,dp = -\rho R\,ds,$$

ou bien

$$\frac{dp}{p_0} = -\eta \frac{R}{l_0}\,ds = -\eta\,dy,$$

où $R(= r_0)$ est le rayon terrestre, et $l_0 = 8\tau_0$; le nombre 8 (plus exactement 7,993) représente la hauteur, en kilomètres, d'une colonne d'air de densité 1 dont le poids balancerait 760^{mm} de mercure. La variable $y = \frac{Rs}{l_0}$ représente l'altitude, et, en étendant l'intégration jusqu'à la limite de l'atmosphère, on a

$$\int_0^Y \eta\,dy = 1.$$

En admettant que, comme la pression, la densité s'annule à la limite, on aurait aussi

$$\int_0^1 y\,d\eta = 1, \qquad \int_0^1 u\,d\eta = \frac{l_0}{R} - \frac{\alpha}{2} = \theta.$$

Le nombre θ sert à déterminer les deux premiers coefficients (A_0, A_1) de la série de Laplace, qui sont ainsi indépendants de la loi des densités, pourvu que η s'annule à la limite, ce qui n'est pas certain *a priori*.

Les relations ci-dessus (où il faut encore introduire un terme de correction lorsque η^n ne s'annule pas) expriment la condition à laquelle doit satisfaire la loi hypothétique des densités pour qu'elle puisse s'étendre jusqu'à la limite de l'atmosphère (¹).

Dans le cas de l'hypothèse de Laplace, cette condition est représentée par la relation

$$(1+f)a = \theta = \frac{\tau_0}{796} - \frac{\rho_0}{6800},$$

qui montre que les constantes a, f ne peuvent conserver la même

---

(¹) Lorsqu'on prend $\eta_n > 0$, l'intégration doit néanmoins être étendue jusqu'à $\eta = 0$; autrement le résultat ne comprendrait pas la réfraction à la surface de l'atmosphère.

valeur pour toutes les températures. C'est ce que M. Caillet a oublié en calculant les Tables du Bureau des Longitudes; ses réfractions ne reposent sur la théorie de Laplace que pour $t_0 = 0°$ (¹).

Les Tables de Newton sont fondées sur l'hypothèse d'une densité décroissant en progression géométrique pendant que la température reste constante ($\eta = e^{-y}$). Kramp et Bessel ont modifié cette hypothèse en faisant

$$\eta = e^{-\frac{y}{1+f}} = e^{-\beta s}, \quad \left(\beta = \frac{R}{l_0} - \frac{R}{g}\right).$$

Mais alors η_n ne s'annule pas. Chez Bessel, $\eta_n = 0,036$ pour $p = 0$, à la hauteur de 28^{km}, et la température ne décroît que de $1°,2$ pour les premiers 1000^m.

Une autre hypothèse consiste à admettre que la température décroît uniformément à partir du sol. C'est sur elle que reposent une première théorie d'Ivory, ainsi que celles de Schmidt, de Bauernfeind, de Fabritius, et au fond aussi celle de Baeyer. La manière la plus simple de la mettre en équation est de poser

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{s}{S} = x,$$

d'où

$$\eta = x^k, \quad \frac{p}{p_0} = x^{k+1}, \quad RS = (k+1)l_0.$$

La hauteur de l'atmosphère H et le décroissement Δt pour 1000^m sont donnés par les formules

$$H = (k+1)l_0, \quad \Delta t = \frac{34°,15}{k+1},$$

et, en prenant $h = 4, 5, 6$, on obtient des nombres qui s'accordent bien avec l'expérience.

La première théorie de M. Gyldén est fondée sur la relation moins simple

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(1 - \frac{1}{2}\beta s\right)^2 = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2,$$

(¹) *Voir* p. 25 et 55 du Mémoire.

qui donne

$$\frac{\tau}{\tau_0} = x^2, \quad \eta = \frac{1}{x^2} e^{g - \frac{g}{x}}.$$

Cette hypothèse recule la limite de l'atmosphère au delà de 100^{km}; mais il est facile de voir que les couches situées au-dessus de 50^{km} ne produisent qu'un effet négligeable, et que le résultat diffère à peine de celui que fournit l'hypothèse d'un décroissement uniforme. Plus tard, M. Gyldén a préféré représenter la température par une suite de termes de la forme $s^n e^{-as}$. Mais alors les intégrations ne peuvent être faites qu'au moyen de séries plus ou moins convergentes.

On échappe à beaucoup de difficultés en partant d'une relation entre la température et la densité, à l'exemple d'Ivory, qui fait simplement

$$\mathfrak{J} = 1 - \frac{\tau}{\tau_0} = f\omega,$$

d'où

$$y = -(1-f)\log\eta + 2f\omega,$$
$$\mathfrak{J} = \frac{f}{1+f} y - \frac{f-f^2}{2(1+f)^3} y^2 + \ldots.$$

En ajoutant un terme et posant

$$\mathfrak{J} = f\omega + g\omega^2,$$

on a

$$\mathfrak{J} = \frac{f}{1+f} y + \frac{2g - f + f^2}{2(1+f)^3} y^2 + \ldots,$$

et l'on peut ainsi représenter des lois très variées, en choisissant convenablement les coefficients f, g. Le décroissement devient presque uniforme et égal à $5°,7$ par 1000^m, pour $f = 0,2$, $g = 0,08$. Dans l'hypothèse d'Ivory, le décroissement se ralentit peu à peu, dans celle de Bessel il s'accélère, à mesure que l'altitude augmente. Pour exprimer un abaissement d'abord très rapide, mais qui se ralentit très vite, comme celui qui a été constaté par M. Glaisher dans ses ascensions aérostatiques, on peut introduire une puissance fractionnaire de ω, en posant, par exemple,

$$\mathfrak{J} = k\omega^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{J} = f\omega + a\sqrt{\omega}:$$

ces hypothèses sont un peu plus simples que celles de M. Kowalski (¹), qui fait

$$\frac{\tau_0}{\tau} - 1 = k\,\omega^{\frac{5}{7}}.$$

Mais il n'est nullement nécessaire, pour représenter les observations en question, de recourir à des puissances fractionnaires qui rendent les intégrations difficiles; on arrive au même résultat avec des expressions où ne figurent que des puissances entières de ω et de η. Tous les modes de distribution des températures sont d'ailleurs aisément représentés par des formules telles que la suivante :

$$\vartheta = f\omega + a(1 - \eta^m) + b\,\omega\eta^n,$$

qui permettent d'intégrer immédiatement l'équation

$$dy = d\vartheta - (1 - \vartheta)\,\frac{d\eta}{\eta},$$

et d'où il est facile de déduire ensuite l'expression de ϑ en fonction de l'altitude y. C'est cette raison qui doit faire préférer les relations de la forme $\vartheta = f(\omega)$ aux relations de la forme $\vartheta = f(y)$, bien que ces dernières expriment la loi des températures d'une manière plus directe.

Il s'agit maintenant de voir comment s'obtient, dans ces diverses hypothèses, l'expression générale de r en fonction de z.

On peut, d'une part, recourir au développement

$$\zeta + B_1\,\zeta^2 + \ldots,$$

dont les coefficients dépendent d'intégrales de la forme $\int u^m d\eta$. Cette série se recommande surtout dans le cas du décroissement uniforme où les coefficients B peuvent être obtenus sous une forme assez remarquable. En faisant $\eta = x^k$, on trouve que B_n s'exprime par l'intégrale

$$\Delta_i^n \int_0 [1 - x - \gamma(1 - x^k i^{k-1})]^n\,dx,$$

et, en développant la parenthèse, on voit que le coefficient de γ^{p+1}

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, septembre 1878.

a pour expression

$$\Delta_i^n \Delta_j^{-(n-p)}(i^{k-1}j^k - 1)^{p+1}.$$

Le facteur γ dépend du thermomètre et du baromètre, tandis que l'exposant k dépend du décroissement de la température. En posant $k + 1 = \frac{6}{1 + \lambda}$, on a

$$\Delta\Gamma = 5°,69(1 + \lambda),$$

et les différences des réfractions calculées avec diverses valeurs de l'exposant k sont sensiblement proportionnelles à λ, comme le montre le Tableau de la page 55 du Mémoire.

M. Gyldén a également le facteur $(1 + \lambda)$ par lequel on tient compte du décroissement Δt; mais les corrections des réfractions qui dépendent de λ paraissent avoir été calculées par des séries insuffisamment convergentes. Les observations de M. Fuss, à Poulkova, ont donné pour λ des valeurs comprises entre $-0,45$ (décembre) et $+0,74$ (août). Ces observations, comme celles de M. Kowalski, à Kazan, laissent cependant apparaître assez souvent des écarts trop considérables pour être attribués aux variations du coefficient λ et qui doivent être expliqués par une inversion des températures, phénomène dont la réalité a été souvent constatée. Un maximum de température qui se manifeste à une faible hauteur produit un décroissement très rapide de la densité et, par suite, une réfraction exceptionnellement forte. Cette question a été examinée avec soin (p. 58-60).

Au lieu de recourir à la série $\zeta + B_1\zeta^3 + \ldots$, on peut encore obtenir l'expression de la réfraction au moyen de la transcendante $\psi(Z)$, en faisant usage d'un développement fondé sur le théorème de Lagrange. Nous avons déjà vu que cette transcendante se présentait tout naturellement dans le cas particulier de $\eta = e^{-x}$, car, en faisant $\log\eta = -x$ et $\cot^2 z = 2aZ^2$, la réfraction s'exprimait par l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2 + x}}$.

L'hypothèse de Bessel et celle d'Ivory conduisent à des intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}}$, et, en posant $x - \varphi(x) = w$, le théorème de Lagrange fournit le moyen d'exprimer aussi

$e^{-x}dx$ en fonction de la nouvelle variable w, de sorte que l'intégration devient possible à l'aide de la transcendante ψ. Cette transformation peut d'ailleurs s'opérer de plusieurs manières différentes (p. 40-44). On trouve (p. 45) les réfractions déduites de la théorie de Bessel pour quatre valeurs différentes du paramètre β, et (p. 64-65) la comparaison des réfractions calculées d'après quelques-unes des théories les plus importantes. Enfin le tableau de la page 72 donne, pour trois distances zénithales, les réfractions qui répondent à une série d'hypothèses sur la forme du décroissement Δt, auxquelles on arrive en attribuant diverses valeurs aux coefficients f, g de la formule $\mathfrak{Z} = f\omega + g\omega^2$.

Il se trouve que l'influence du coefficient g est beaucoup moins sensible que celle du coefficient f, de sorte que, pour la construction d'une Table de réfractions normales, il y a lieu de prendre simplement $\mathfrak{Z} = f\omega$. Le calcul des réfractions peut alors se faire au moyen de la formule

$$r = C(E_0 - kE_1 + k^2E_2 - k^3E_3),$$

dont le dernier terme est généralement négligeable. Le coefficient C ne dépend que du baromètre et du thermomètre; k dépend aussi du paramètre f, par lequel on tient compte du décroissement Δt. Les fonctions E, qui dépendent de l'argument $Z = \gamma \cot z$ ont été réduites en Tables (75-78).

Après avoir calculé par cette méthode, pour les distances zénithales comprises entre 80° et 90°, un assez grand nombre de valeurs de r, l'auteur les a complétées par interpolation, de manière à former une Table à double entrée (Table I) qui donne directement les réfractions pour chaque degré de t, depuis — 30° jusqu'à + 30° C., et pour des valeurs assez rapprochées de l'argument z, en supposant $f = 0,2$ et $B = 760$ à t^0. Cette Table deviendrait tout à fait commode, si elle était étendue par interpolation de façon à donner, par exemple, r pour toutes les minutes de z. Elle occuperait alors un plus grand volume; mais la double interpolation serait alors très facile. La disposition adoptée par Bessel, qui a pour but d'éviter les Tables à double entrée, devient incommode et cesse même d'être exacte quand z approche de 90°. Les petites Tables II et III fournissent les corrections qui dépendent des variations du paramètre f et de l'état du baromètre; le calcul peut

se faire, soit en corrigeant les réfractions moyennes, soit en corrigeant l'argument t.

Pour tenir compte des variations diurnes ou des perturbations accidentelles du décroissement Δt, il faudrait introduire dans l'expression théorique de ce décroissement des termes nouveaux dont l'influence pourrait se déterminer directement comme celle des paramètres f, g; mais les réfractions qui répondent à ces hypothèses s'obtiendront plus simplement par des quadratures approchées (p. 92-99).

Un dernier Chapitre est consacré à l'étude des modifications que les réfractions éprouvent lorsque les surfaces réfringentes cessent d'être sphériques, ce qui doit arriver assez fréquemment par suite des dénivellements dus à des inégalités de température et de pression. La trajectoire du rayon lumineux se détermine alors par un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{d}{ds}\left(\mu \frac{dx}{ds}\right) = \frac{d\mu}{dx}, \quad \ldots,$$

où figure l'indice de réfraction $\mu = f(x, y, z)$. Ce système peut s'intégrer d'abord dans le cas ordinaire des couches sphériques $[\mu = f(x^2 + y^2 + z^2)]$, puis dans celui des couches planes $[\mu = f(z)]$, dont l'étude montre qu'un dénivellement produit, en général, une réfraction latérale en même temps qu'une erreur dans la réfraction verticale. On arrive à des conclusions semblables par la considération d'un système de sphères excentriques. Enfin les équations différentielles de la trajectoire peuvent encore s'intégrer pour certaines surfaces sphéroïdales dont l'étude confirme les résultats précédemment obtenus.

Pour donner à la théorie une base plus solide, il faudrait combiner des observations astronomiques avec des observations de la réfraction terrestre et des observations météorologiques échelonnées dans la direction de la trajectoire. Il faudrait tâcher de déterminer directement, sur une assez grande étendue, la pente des surfaces de niveau ou surfaces d'égale densité, ainsi que la loi de leur distribution dans le sens vertical, aux heures de la journée où s'observent les distances zénithales; on y trouverait sans doute l'explication satisfaisante des variations anormales de la réfraction. Le *Rapport annuel* du Directeur de l'Observatoire de Paris

pour 1882 nous apprend qu'un ballon captif de 60^{mc}, muni d'appareils enregistreurs et destiné à l'étude de l'atmosphère à quelques centaines de mètres au-dessus de l'Observatoire, a été construit sous la direction de M. le capitaine Renard, et que les premiers essais ont donné de bons résultats quand la vitesse du vent ne dépassait pas 5^m par seconde. C'est une innovation qui nous paraît pleine d'avenir et qui mérite d'être signalée.

MÉLANGES.

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION PAR DROITES SYMÉTRIQUES A UN PROBLÈME DE STEINER;

PAR M. P.-H. SCHOUTE,

Professeur à l'Université de Groningue (Hollande).

Dans un travail précédent ([1]), j'ai donné la théorie de la transformation par droites symétriques; dans ce qui suit, je l'applique à un théorème de Steiner ([2]).

1. LEMME. — *Dans la transformation par droites symétriques, dont les points* A, B, C *sont les points fondamentaux simples, la série des coniques semblables entre elles et circonscrites au triangle* ABC *correspond au système des tangentes à un cercle déterminé concentrique au cercle* D *circonscrit au triangle* ABC.

CAS *a*. — Les coniques semblables sont des *hyperboles*.

Cherchons la droite qui correspond à une des hyperboles H

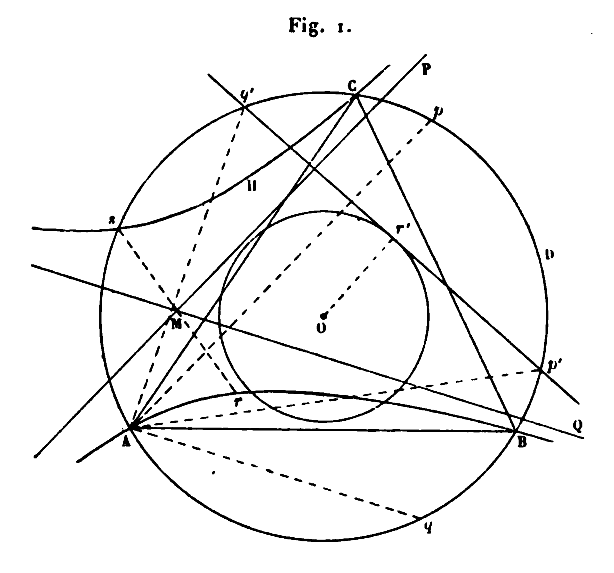
([1]) Voir *Bulletin*, 2e série, VI_2.

La réduction de la transformation par cercles symétriques à la transformation par droites symétriques, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, que j'ai indiquée dans cette étude, n'est qu'une application particulière d'un théorème général, le théorème qui dit que chaque transformation birationnelle peut être décomposée en une combinaison de transformations quadratiques.

([2]) *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, 1832 (problème 39 du Supplément) et encore dans le *Journal de Borchardt*, t. LV, *Vermischte Sätze und Aufgaben*, III, 3.

(*fig.* 1) de la série, en déterminant les points qui correspondent aux points infiniment éloignés de la courbe. Ces points se trouvent sur le cercle D circonscrit au triangle, ce cercle étant la courbe qui correspond à la droite située à l'infini, l_∞. Donc on détermine ces deux points en menant par A des droites Ap et Aq parallèles aux asymptotes MP et MQ de l'hyperbole H, et les droites symétriques Ap' et Aq' par rapport aux bissectrices de l'angle A; car les points d'intersection p' et q' de ces dernières droites et du cercle D sont évidemment les points en question, et

Fig. 1.



la droite $p'q'$ correspond à l'hyperbole H. Eh bien, un coup d'œil sur la figure montre immédiatement l'égalité des arcs $p'q'$ et pq du cercle D. Mais le dernier étant le double de l'angle PMQ, qui est le même pour toutes les hyperboles de la série, à cause de la similitude des coniques, l'arc $p'q'$ est constant en même temps, c'est-à-dire que les droites qui correspondent aux hyperboles semblables enveloppent un cercle concentrique et intérieur au cercle D.

Cas a'. — Les *hyperboles* sont *équilatères*.

Dans ce cas, l'angle des asymptotes étant droit, l'arc $p'q'$ est la moitié de la circonférence du cercle D; les droites qui correspon-

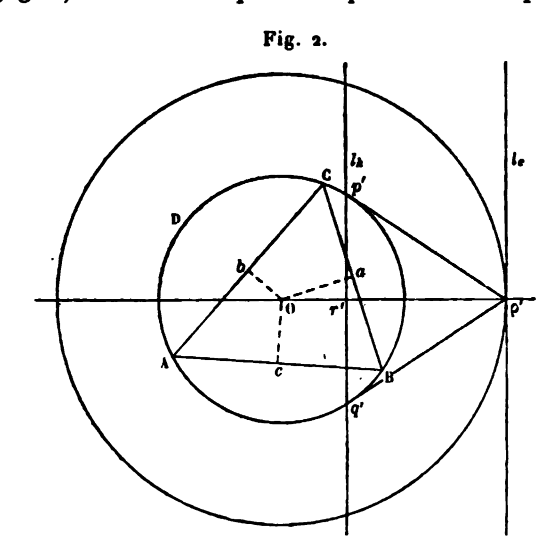
dent aux hyperboles équilatères enveloppent donc un point, le centre du cercle D.

Cas *b*. — Les coniques semblables sont des *ellipses*.

Dans ce cas, les droites correspondantes enveloppent un cercle déterminé concentrique et extérieur au cercle D. D'abord on trouve ce résultat au moyen du principe de continuité en étendant le raisonnement donné pour le cas des coniques à asymptotes réelles à celui des coniques à asymptotes imaginaires. Mais, en définissant les asymptotes de l'ellipse comme les rayons doubles imaginaires de l'involution des diamètres conjugués, on évite l'emploi du principe de continuité par la démonstration suivante.

Si l_e (*fig.* 2) est la droite qui correspond à une ellipse donnée E

Fig. 2.



circonscrite au triangle ABC, et l_h celle qui correspond à l'hyperbole H également circonscrite au triangle ABC et dont les asymptotes sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse E, les droites l_e et l_h sont parallèles; car l'ellipse E, l'hyperbole H et le cercle D appartiennent à un même faisceau, de manière que le quatrième point d'intersection des courbes E et H se trouve sur le cercle D, et le point correspondant, le point d'intersection des droites l_e et l_h, est situé sur l_∞. Et les trois courbes E, H et D appartiennent à un même faisceau, parce qu'elles passent par trois

points A, B, C et qu'elles coupent la droite l_∞ suivant trois couples de points en involution, une involution dont les points situés sur les axes des courbes E et H sont les points doubles; car, suivant le théorème de Desargues, la conique qui passe par les points d'intersection des courbes D et E et qui passe par un des points infiniment éloignés de l'hyperbole H, doit aussi contenir l'autre, etc.

De plus, les tangentes au cercle D dans les points d'intersection p' et q' de cette courbe et de l_h se rencontrent en un point ρ' de l_e. En effet, aux tangentes en p' et q' correspondent des coniques qui touchent la droite l_∞, des paraboles circonscrites au triangle ABC et plus spécialement les paraboles circonscrites au triangle ABC dont l'axe est parallèle à l'une ou à l'autre des asymptotes de l'hyperbole H, c'est-à-dire à l'un ou à l'autre des diamètres conjugués égaux de l'ellipse E. D'où l'on déduit que ces deux paraboles et l'ellipse E appartiennent à un même faisceau, encore parce qu'elles passent par les trois points A, B, C et qu'elles déterminent sur l_∞ trois couples de points en involution, une involution dont les points situés sur les diamètres conjugués égaux de l'ellipse E sont les points doubles. Donc le quatrième point d'intersection des deux paraboles se trouve sur E, c'est-à-dire que le point d'intersection ρ' des droites correspondantes $p'\rho'$ et $q'\rho'$ se trouve sur l_e.

Enfin on trouve que la droite l_e enveloppe un cercle concentrique et passant par ρ' quand l'ellipse E se meut en restant circonscrite et semblable à elle-même, parce que, dans ce cas, l'hyperbole H se meut complètement de la même manière et que sa droite correspondante enveloppe le cercle concentrique qui passe par r', etc.

Cas b'. — Les *ellipses* sont des *cercles*.

Il n'y a qu'un seul cercle circonscrit au triangle ABC et une seule droite correspondante, la droite l_∞ (¹).

(¹) Dans la considération des coniques semblables circonscrites au triangle ABC le cercle D fait partie de la série, qui se compose des deux faisceaux de coniques, dont l'un a pour points de base A, B, C, ω et l'autre A, B, C, ω', où, comme d'ordinaire, ω et ω' représentent les points circulaires à l'infini.

Dans cet ordre d'idées, les droites qui correspondent aux coniques de la série forment deux faisceaux, les faisceaux dont ω' et ω sont les sommets.

CAS c'. — Les courbes semblables sont des *paraboles*.

Évidemment, les droites correspondantes enveloppent le cercle circonscrit D lui-même.

2. THÉORÈME DE STEINER. — *La série des coniques semblables entre elles et circonscrites à un triangle donné* ABC *est enveloppée d'une courbe* C^4 ; *cette quartique a trois points doubles, les sommets du triangle* ABC, *et n'admet donc que quatre tangentes doubles, dont l'une est la droite* l_∞. *Chacune des coniques de la série touche l'enveloppe à l'autre extrémité du diamètre de la conique, qui passe par son quatrième point d'intersection avec le cercle circonscrit* D. *Un point quelconque du cercle* D *se trouve sur deux des coniques de la série et les points de contact de ces deux coniques avec l'enveloppe* C^4 *sont deux points d'une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle* ABC. *La série des coniques semblables ne contient pas deux coniques homothétiques.*

CAS *a*.

Des hyperboles.

Parce que les droites qui correspondent aux coniques enveloppent un cercle concentrique au cercle D, les coniques elles-mêmes enveloppent la courbe qui correspond à ce cercle, une quartique dont les points fondamentaux A, B, C sont des points doubles. Le cercle concentrique ayant un contact double imaginaire avec le cercle D sur la droite l_∞, la courbe C^4 a un contact double imaginaire avec la droite l_∞ sur le cercle D, c'est-à-dire dans les ombilics ω et ω' du plan.

Si r (*fig.* 1) est le point de contact de l'hyperbole H et de l'enveloppe C^4, et s le quatrième point d'intersection du cercle D et de l'hyperbole H, la droite rs doit être diamètre de l'hyperbole H. Mais on prouve qu'en effet les tangentes en r et s à cette courbe se coupent sur l_∞, en démontrant que les deux coniques qui correspondent à ces tangentes déterminent un faisceau de coniques dont le cercle D fait partie. Eh bien, les coniques qui correspondent à ces tangentes, ce sont les coniques circonscrites au triangle ABC, dont l'une touche la droite $p'q'$ au point milieu r' de $p'q'$, et l'autre au point infiniment éloigné s'. Et ces deux coniques déterminent

un faisceau qui contient le cercle D, parce que la courbe du faisceau qui passe par p' passe en même temps par q' eu égard à l'involution que les courbes du faisceau déterminent sur la droite $p'q'$; de manière que cette courbe coïncide avec le cercle D, etc. ([1]).

Un point quelconque du cercle D se trouve sur deux coniques de la série; car le point correspondant de l_∞ détermine la direction de deux tangentes au cercle concentrique. Les deux points de contact de ces deux tangentes étant situés sur un même diamètre du cercle D, les deux points de contact des deux coniques avec la courbe C^4 se trouvent sur une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC.

On prouve de la même manière qu'un point quelconque P du plan se trouve sur deux hyperboles de la série.

La série des hyperboles semblables ne contient pas deux coniques homothétiques; car les points infiniment éloignés de l'hyperbole H correspondent aux points d'intersection p' et q' de la droite correspondante et du cercle D, et le cercle concentrique n'a pas un couple de tangentes qui coupent le cercle D aux mêmes points. Ce dernier résultat est bien évident, du reste; car, par cinq points, on ne peut faire passer qu'une conique unique.

Cas a'.

Des hyperboles équilatères.

Les hyperboles enveloppent un point, le point qui correspond au centre du cercle D, le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Nous retrouvons donc un théorème connu.

Pour chacune des hyperboles du faisceau le diamètre du quatrième point d'intersection s avec le cercle D passe par ce point de concours r des hauteurs du triangle ABC; le lieu des centres de ces hyperboles est donc le cercle qu'on obtient par la division des rayons vecteurs du cercle D, qui partent du point r, par deux, le cercle des neuf points par rapport au triangle ABC. Par chaque point s du cercle D ne passe qu'une hyperbole équilatère, et le système ne contient pas un seul couple de courbes homothétiques.

([1]) On trouve le même résultat au moyen de la condition que la droite rs passe par le point d'intersection des asymptotes de l'hyperbole H; mais ce raisonnement ne peut s'étendre aussi facilement au cas des ellipses semblables.

Cas b.

Des ellipses.

Dans ce cas, les raisonnements sont tout à fait égaux à ceux du cas des hyperboles. Seulement, les deux points p' et q' sont imaginaires. Mais la seconde partie du théorème subsiste, parce que r' reste le point milieu du segment imaginaire $p'q'$.

Cas b'.

Des cercles.

L'enveloppe est le cercle circonscrit D, etc. (1).

Cas c'.

Des paraboles.

L'enveloppe est la droite l_∞. Pour chaque parabole, la droite rs est un diamètre, le point r étant le point infiniment éloigné de la courbe. La troisième partie du théorème est en partie un cas particulier du théorème connu, que chaque faisceau de coniques contient deux paraboles, etc.

3. Addition au théorème de Steiner. — *Les enveloppes* C^1 *des séries différentes des coniques semblables, circonscrites au triangle* ABC, *forment un faisceau, dont les points* A, B, C *sont des points de base doubles, et les ombilics* ω *et* ω' *des points de base simples à tangente commune* l_∞. *Une droite quelconque est touchée par quatre des courbes* C^1 *du faisceau, etc.*

Les enveloppes des systèmes des droites correspondantes formant un faisceau de cercles concentriques, les enveloppes des séries de coniques semblables forment un faisceau dont on détermine sans peine les points de base. Parce que du centre commun des cercles on peut mener quatre normales à une co-

(1) C'est le résultat métaphorique de Steiner. Mais la courbe C^1 de la série des coniques semblables circonscrites aux triangles ABC, qui contient le cercle D, se réduit aux deux ombilics ω et ω'.

nique quelconque qui est circonscrite au triangle ABC, il y a quatre courbes C^4 qui touchent la droite qui correspond à cette conique, etc.

4. D'abord Steiner a ajouté deux problèmes à son théorème, dont le premier s'occupe du lieu des centres, et le second du lieu des foyers de la série des coniques semblables circonscrites à un triangle donné (¹). Ensuite il a indiqué (²) le premier lieu et engagé à l'étude de l'enveloppe des axes de ces courbes. Je terminerai donc par l'énumération des lieux et des enveloppes principales, qui ont un rapport intime avec les séries des coniques semblables, quoique les découvertes générales de Chasles aient fait connaître l'ordre de ces lieux et la classe de ces enveloppes pour une série de coniques (μ, ν) (³). Mais, pour ne pas abuser de la bienveillance de la rédaction du *Bulletin,* je ne donnerai que les résultats.

Théorème fondamental. — *Pour une série de coniques semblables circonscrites à un triangle* ABC, *les caractéristiques* μ *et* ν *ont les valeurs de* 2 *et* 4; *seulement, dans le cas* a' *des hyperboles équilatères, ces valeurs s'abaissent à* 1 *et* 2 *et dans le cas* b' *du cercle circonscrit on considère la série composée des deux faisceaux auquel appartient ce cercle.*

Je remarque que les deux coniques par A, B, C, *qui touchent* l_∞ *en un des deux points* ω *et* ω', *appartiennent deux fois à chacune des séries de coniques semblables; seulement la série qui est composée de deux faisceaux ne les contient qu'une fois.*

Le *lieu des centres* des coniques semblables est une courbe C^4 qui a trois points doubles, les points milieux a, b, c des côtés du triangle ABC (*fig.* 2) et quatre tangentes doubles, dont une est la droite l_∞ qui touche la courbe en ω et ω'. Dans le cas a' des hyperboles équilatères, le lieu est un cercle, le cercle des neuf points par rapport au triangle ABC. Et dans le cas c' des paraboles,

---

(¹) *Systematische Entwickelung*, etc., *loc. cit.*

(²) *Journal de Borchardt,* loc. cit.

(³) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1864.

la courbe C^4 dégénère en quatre droites, la droite l_∞ et les trois droites qui passent par deux des trois points a, b, c ([1]).

Toutes les courbes C^4 qui correspondent aux séries différentes des coniques semblables circonscrites à un même triangle ABC forment un faisceau; chacun des points a, b, c compte pour quatre et chacun des points ω et ω' pour deux des seize points de base. Toutefois cette considération exige que l'on compte double le cercle des neuf points.

L'*enveloppe des asymptotes* est une courbe Γ^6 (de la sixième classe) qui a trois tangentes doubles, les côtés du triangle ABC, et une tangente quadruple l_∞ dont les points de contact coïncident deux à deux avec les points ω et ω'. Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe Γ^3 qui touche une fois les côtés du triangle ABC, et deux fois, en ω et ω', la droite l_∞ ([2]). Et dans le cas des paraboles, toutes les asymptotes coïncident avec l_∞, si l'on ne considère comme asymptotes les six droites des trois paraboles dégénérées.

Quand on compte double l'enveloppe Γ^3, toutes les enveloppes Γ^6 forment un faisceau tangentiel; chacun des trois côtés du triangle représente quatre et la droite l_∞ vingt-quatre ([3]) des trente-six tangentes de base.

L'*enveloppe des axes* est encore une courbe Γ^6 qui a trois tangentes doubles, les normales aO, bO, cO aux côtés du triangle ABC par leurs points milieux, et une tangente quadruple l_∞, dont les points de contact coïncident deux à deux avec ω et ω'. Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe Γ^3 qui touche une fois les droites aO, bO, cO, et deux fois, en ω et ω',

---

([1]) Je laisse de côté les résultats simples qui se rapportent au cas de la série qui contient le cercle D, série qui se compose de deux faisceaux, parce que les lieux géométriques et les enveloppes sont tous imaginaires.

([2]) Cette courbe est l'hypocycloïde de module $\frac{1}{3}$ étudiée par M. Steiner (*Journal de Borchardt*, t. LIII, p. 231) et par beaucoup d'autres géomètres, comme Cremona, Ferrers, P. Serret, Brocard, etc.

([3]) La droite l_∞ compterait pour seize des tangentes communes, si ses points de contact avec les courbes étaient différents pour les différentes courbes; la coïncidence de deux de ces points avec ω augmente la multiplicité de la droite l_∞ comme tangente commune avec quatre, etc.

la droite l_∞. Et dans le cas des paraboles, l'enveloppe se compose d'une courbe Γ^3 qui de même touche une fois les droites aO, bO cO et deux fois, en ω et ω', la droite l_∞ et trois points, les points infiniment éloignés de aO, bO, cO.

En comptant double la première des deux enveloppes Γ^3, on peut dire que les courbes Γ^6, qui correspondent aux séries différentes de coniques semblables, forment un faisceau tangentiel, dont les droites aO, bO, cO représentent quatre, et l_∞ vingt-quatre tangentes de base.

Le *lieu des foyers* est une courbe C^{12} qui a deux points doubles sur chacun des côtés du triangle ABC, les points doubles de la série des coniques et deux points quadruples sur l_∞, les points ω et ω'; dans chacun des six points doubles, les tangentes sont les bissectrices de l'angle formé par les deux droites de la conique dégénérée, et dans chacun des deux points quadruples deux des tangentes coïncident avec l_∞, les deux autres avec une autre droite. Dans le cas des hyperboles équilatères, le lieu est une courbe C^6 qui a un point double sur chaque côté du triangle, le pied de la hauteur et deux points doubles ω et ω', dont une des tangentes coïncide avec l_∞. Et dans le cas des paraboles, le lieu est la droite l_∞ et une courbe C^5, dont les points d'intersection avec l_∞ sont les points ω et ω', et les points infiniment éloignés des trois côtés du triangle ABC.

Les différents lieux C^{12} ne forment pas un faisceau, mais une série dont $\mu = 4$.

L'*enveloppe des directrices* est une courbe Γ^8 qui touche une fois les douze bissectrices des six angles formés par les coniques de la série qui dégénèrent en deux droites, et quatre fois la droite l_∞; des quatre points de contact de cette droite, deux coïncident avec ω et deux avec ω'. Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe Γ^4 qui touche une fois les six bissectrices des trois angles formés par les coniques dégénérées de la série, et deux fois la droite l_∞, en ω et ω'. Et dans le cas des paraboles, l'enveloppe est une courbe Γ^4 dont l_∞ est une tangente triple, les points de contact étant les points infiniment éloignés des côtés du triangle ABC.

Les différentes enveloppes Γ^8 ne forment pas un faisceau tangentiel, mais une série dont $\nu = 2$.

Le *lieu des sommets* est une courbe C^{16} qui a trois points sextuples, les points A, B, C, et six points doubles qui se trouvent deux à deux sur les trois côtés du triangle, les six points doubles de la série; les tangentes de ces points doubles sont les bissectrices, etc. Dans le cas des hyperboles équilatères, le lieu est une courbe C^8 qui a trois points triples, les points A, B, C, et trois points doubles, les pieds des hauteurs. Et le lieu des sommets des paraboles est une courbe C^7 dont A, B, C sont des points triples, et les points infiniment éloignés des côtés du triangle ABC des points simples.

Les différents lieux C^{16} ne forment pas un faisceau, mais une série dont $\mu = 3$.

ENDUS ET ANALYSES.

ISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSI-*halès à Diophante*; tome II : *De Diophante à* Villars; 1883. 2 vol. in-12 de VIII-286 et VIII-316

j'ai désiré écrire est celle de la filiation des es scientifiques. Il ne faut donc chercher dans tives de restitutions de faits inconnus ou d'Ou-écouvertes bibliographiques, ni discussions sur ou les dates douteuses, ni hypothèses sur la es qui ne nous ont transmis aucun monument avoir. » C'est en ces termes que l'auteur précise proposé, le plan qu'il a suivi.

nous ne possédons point encore d'Ouvrage qui re-e forme rapide l'histoire des Sciences : pour les es, les deux volumes de Bossut sont rares et d'ailleurs its : l'Histoire de M. Hoefer pèche sous le rapport de ce mathématique; des histoires raisonnées de la Phy-la Chimie sont encore à faire. Il faut donc savoir gré à professeur d'avoir cherché à combler ces lacunes. En géomètre, il devait insister surtout sur les Mathéma-es lecteurs qui connaissent la tournure de son esprit et ances concrètes de ses travaux devinent quelle partie des atiques a été traitée le plus favorablement.

dinaire les géomètres méprisent l'érudition : à quoi bon ter les index, lire les manuscrits, collationner les textes pour r à quoi? Souvent en dernier lieu à une traduction qui est mple identité algébrique. M. Maximilien Marie n'est pas de ibre : on pourrait lui reprocher cependant d'avoir été parfois mètre. Quelques inexactitudes de détail et quelques inad-plus ou moins regrettables pourraient être signalées; défauts disparaîtront facilement d'une seconde édition. ur fait commencer son Histoire à la Grèce. Certains lec-ont peut-être de n'y rien trouver sur l'Égypte, sur

Babylone, sur la Chine : ceux qui savent combien ce champ, riche en investigations laborieuses, est pauvre encore de faits bien établis, le regretteront moins. Au reste, ce n'est pas dans un simple compte rendu que l'on peut discuter toutes les questions que soulève le présent Ouvrage : nous nous contenterons de résumer les idées personnelles et d'esquisser à grands traits, en laissant dans l'ombre les sciences physiques, le tableau que M. Maximilien Marie lui-même a peint sommairement.

L'auteur a divisé son histoire en périodes; il résume d'abord les principales conquêtes de chaque période, puis il passe aux auteurs qu'il étudie individuellement dans leur vie et dans leur œuvre.

Caractérisant l'esprit mathématique des Grecs, M. Maximilien Marie insiste surtout sur la tournure géométrique de leurs recherches. Les Grecs raisonnaient toujours sur les grandeurs elles-mêmes, jamais sur leurs mesures : la pensée de séparer leur Algèbre de leur Géométrie, c'est-à-dire l'art de raisonner de l'objet du raisonnement ne leur est jamais venue. Et cependant beaucoup de leurs recherches constituent une véritable Algèbre; à cette science il ne manque que le nom et elle sera d'une grande utilité le jour où les mathématiciens, ayant perfectionné le calcul numérique, inventeront les notations.

Les connaissances qui nous sont parvenues sur les premiers mathématiciens grecs sont très incomplètes. Thalès, Anaximandre, Anaximène, voilà les trois noms auxquels se rattachent les progrès de la Mathématique avant Pythagore. Quelques aperçus sur la similitude des figures, l'invention du gnomon et quelques notions sur l'Astronomie : voilà en somme tout ce que les Grecs leur attribuent le plus communément. Encore n'est-il pas très sûr que ces découvertes soient de leur invention; peut-être les ont-ils seulement rapportées d'Égypte : Thalès au moins a certainement voyagé dans ce pays.

Le mystère s'éclaircit un peu avec Pythagore; mais ici encore règne une grande obscurité. Il paraît certain qu'il admettait le mouvement de la terre, au moins le mouvement diurne. Quant à son célèbre théorème de l'équivalence entre le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, il est bien moins authentique; toutefois Pythagore contribua beaucoup à l'avancement des Sciences, non seulement par

ses découvertes, mais encore par l'immense autorité dont il jouissait dans toute la Grèce : désormais ces sciences seront regardées comme indispensables à la Philosophie, et c'est en effet des écoles pythagoriciennes que nous voyons sortir les mathématiciens des âges suivants.

L'auteur leur accorde de courtes mentions; mais il s'arrête un peu plus sur Philolaüs, dont nous pouvons nous faire une idée par les réfutations d'Aristote. Nous savons que Philolaüs admettait le système héliocentrique à peu près comme nous le connaissons aujourd'hui, c'est-à-dire avec le double mouvement de la Terre et la révolution des planètes autour du Soleil. M. Marie pense que ce sont là ses propres inventions et non celles de son maître Pythagore.

Nous arrivons à l'ère des grands philosophes grecs. C'est à Platon qu'il faut attribuer l'introduction de cette méthode de recherches qui suppose le problème résolu. Nous n'avons pas de découvertes mathématiques à noter de la part de son grand disciple Aristote. Mais les sciences physiques doivent beaucoup, sinon à ses découvertes personnelles, au moins à sa vaste synthèse de toutes les connaissances. Revenant aux mathématiciens, notons Eudoxe de Cnide, Ménechme, enfin Dinostrate, l'inventeur de la célèbre quadratrice, qui devait servir à la quadrature du cercle, l'un des deux grands problèmes de l'antiquité grecque; l'autre était la duplication du cube.

Les recherches progressent et se multiplient; mais nous ne sommes que très imparfaitement renseignés sur la part de chacun dans les progrès accomplis; ici, un nom; là le titre d'un Ouvrage, et c'est tout. Mais, si nous ne connaissons pas les hommes, nous connaissons d'autant mieux les résultats de leurs travaux. Un esprit supérieur a résumé tous ces efforts en une œuvre à laquelle il a attaché pour toujours son nom. Toute cette partie des Mathématiques portera désormais le nom de *Géométrie euclidienne*. M. Marie nous donne une analyse très complète des *Éléments;* il insiste sur le caractère algébrique de plusieurs théorèmes qui sont pourtant prouvés par Euclide d'une manière toute géométrique. Au point de vue d'une histoire générale, il semble qu'il aurait pu insister plus longuement sur les autres Ouvrages du célèbre géomètre.

Avec Euclide finit la première période de la Mathématique grecque. Avant de passer aux suivantes, M. Marie nous donne un aperçu des résultats obtenus dans la théorie des coniques. Il est impossible de préciser l'œuvre de chacun. Mais Apollonius de Perge ayant eu la probité de séparer ses propres découvertes de celles de ses prédécesseurs, nous sommes en état de déterminer avec quelque précision les progrès de toute l'époque.

C'est durant la seconde période que, d'après M. Marie, le calcul numérique commence à s'introduire dans les recherches théoriques à propos de certains rapports présentant un intérêt spécial dans les recherches astronomiques; cependant la distance qui sépare les notions de raison et de rapport n'est pas encore franchie : il y a une raison entre les longueurs de la circonférence et du rayon d'un cercle, et l'on va chercher la grandeur de la circonférence dont on donne le rayon; mais on ne pensera pas encore à chercher le rapport de la circonférence au diamètre.

Aristarque, de Samos, qui ouvre la seconde période, est surtout connu comme astronome. Dans le *Traité des distances du Soleil et de la Lune*, le seul qui nous soit parvenu, il admet que l'angle sous lequel on voit la distance de la Lune et du Soleil, au moment de la lune dichotome, diffère d'un quadrant de 3°; la différence n'est en réalité que de 9'. Mais, si Aristarque, faute d'instruments précis, se trompe nécessairement sur les données numériques, la méthode est d'une justesse parfaite. En dehors de ce Traité, nous savons encore, par un passage de l'*Arénaire* d'Archimède, qu'Aristarque adhérait aux opinions des pythagoriciens sur le mouvement de la Terre.

Ératosthène est connu surtout par son évaluation de la grandeur du méridien, la première, nous dit l'auteur, qui ait été recherchée par des moyens rationnels. Il l'a trouvée de 252000 stades, nombre qui, d'après une opinion émise par Vincent et accueillie avec quelque scepticisme par l'auteur, se rapprocherait de beaucoup des évaluations modernes.

Après Ératosthène vient un des savants les plus célèbres de toute l'antiquité : Archimède. L'étude de ses travaux est un des Chapitres les plus intéressants du Livre. Rien en effet ne saurait exciter autant notre admiration pour les mathématiciens de l'antiquité que de voir Archimède sans Calcul infinitésimal parvenir à des résultats si

considérables. Suivant l'ordre adopté par Peyrard, M. Marie étudie d'abord le *Traité de la sphère et du cylindre*, puis les *Traités des conoïdes et sphéroïdes, des hélices, de l'équilibre des plans, de la quadrature de la parabole, des corps portés par un fluide, de la mesure du cercle*, enfin *l'Arénaire*. Partout M. Marie s'est appliqué à faire ressortir non seulement l'ingénieuse simplicité des solutions, mais encore leur caractère algébrique. C'est ainsi que la Ve proposition du second Livre du *Traité de la sphère et du cylindre* contient une équation du troisième degré ayant trois racines réelles. L'exposé de la VIIIe proposition du second Livre des *Corps qui sont portés sur un fluide* nous semble particulièrement remarquable. M. Marie s'en sert pour démontrer sa thèse : que « les grands mathématiciens grecs étaient en possession d'une véritable méthode de calcul algébrique, dont ils n'ont laissé aucune trace dans leurs écrits, parce qu'ils n'ont pas voulu faire à part la théorie de ces procédés logistiques, soit qu'ils en regardassent la possession comme inhérente au génie et intransmissible par cela même, soit que, n'ayant pas imaginé les signes auxquels nous recourons pour rendre nos formules saisissables, ils aient reculé devant la longueur des explications qu'ils auraient dû fournir en langage ordinaire, soit enfin qu'ils craignissent de n'être pas compris » (p. 118).

Ce qui nous est parvenu des Livres d'Archimède nous donne une idée exacte de son œuvre mathématique. Mais la plupart de ses inventions physiques ne nous sont parvenues qu'à travers les récits parfois exagérés et presque toujours confus de ses contemporains. Des quarante machines qui lui sont attribuées par les Anciens, nous ne pouvons citer comme parfaitement authentique que son application de la vis à élever l'eau dans un cylindre tournant simplement autour de son axe.

Il est presque contemporain d'Archimède, cet autre grand géomètre qui, comme lui, a poussé la Géométrie au delà des frontières que semblait lui assigner l'application des méthodes élémentaires. La gloire d'Apollonius de Perge, aux yeux de ses contemporains, a au moins égalé celle d'Archimède. M. Marie étudie un à un les Livres du fameux *Traité des coniques*. Il nous donne l'énoncé des propositions les plus remarquables ; souvent il donne *in extenso* en langage moderne les démonstrations. Outre le *Livre des coni-*

ques, Apollonius avait laissé sur les méthodes arithmétiques un Ouvrage dont nous ne pouvons nous faire une idée.

Ctésibius, d'Alexandrie, n'est connu que comme père ou précepteur de Héron l'Ancien. Héron est l'auteur de la fontaine qui porte son nom et de plusieurs ouvrages physiques. Mais ce ne serait là qu'une très petite partie de sa gloire, si l'on parvenait à établir (assertion avancée par plusieurs historiens modernes) qu'il est l'auteur du *Traité de la Dioptre*, un des livres les plus célèbres dans les sciences mathématiques. On disait au moyen âge : apprendre Euclide, Ptolémée, Héron, comme nous disons : apprendre la Géométrie, l'Astronomie, la Géodésie.

Mais ce *Traité de la Dioptre* est-il bien de Héron l'Ancien? Voilà un problème qui ne nous semble pas encore entièrement résolu. L'affirmative a été soutenue par Venturi et, dans ces derniers temps, par M. Cantor. M. Marie se range décidément du côté de la négative. D'après lui le Traité en question serait ou de Héron le Jeune, mathématicien du VIII[e] siècle, ou peut-être d'un troisième géomètre du même nom, mais qui serait en tous cas postérieur à Ptolémée. On trouve en effet dans *la Dioptre* la formule de la mesure de l'aire d'un triangle en fonction des mesures de ses côtés :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Si cette formule était de Héron l'Ancien, Ptolémée l'aurait appliquée et avec quels avantages! lui qui, pour résoudre un triangle, le décompose toujours en deux triangles rectangles. En outre, comment admettre que cette formule soit d'un mathématicien du II[e] siècle avant l'ère chrétienne, quand on ne voit nulle part, dans les auteurs grecs, même la formule $S = \frac{1}{2} bh$, si simple pourtant et qui aurait dû nécessairement précéder l'autre de beaucoup? Comment admettre tout un système compliqué, dont l'essentiel consiste à mesurer des surfaces par des longueurs linéaires, quand on voit que les Grecs n'ont pas les formules des mesures des surfaces et des volumes, dont les équivalences nous fournissent le plus souvent des relations entre les éléments linéaires? Comment admettre qu'un Grec si peu accoutumé à faire abstraction de l'objet du raisonnement ait pu imaginer un produit de quatre lignes? Ce sont là des objections très sérieuses, et elles sont présentées avec beaucoup de force par M. Maximilien Marie.

Les méthodes pour l'évaluation numérique, dans certains cas particuliers des grandeurs géométriques définies par des figures qui ne pourraient pas les fournir d'une façon utile, ne prennent corps qu'après Héron, et c'est même là ce qui constitue la caractéristique de la troisième période, d'Hipparque à Diophante. L'auteur nous montre comment les Grecs comptaient avec leurs fractions sexagésimales, qu'ils ne poussaient cependant pas au delà des secondes. Il nous développe les points principaux de la trigonométrie d'Hipparque et de Ptolémée; il nous montre comment, à l'aide du théorème sur le quadrilatère inscrit, on arrive à calculer la corde d'un arc assez petit pour pouvoir former la raison de la progression arithmétique des arcs d'une table suffisamment complète. A l'aide de ces cordes qui remplaçaient toutes nos fonctions trigonométriques, on calculait les triangles rectangles, puis des triangles quelconques, en les décomposant en triangles rectangles. Dans le cas où l'on connaissait un côté et les angles, on se servait aussi de notre formule sur la proportion des sinus qui, bien entendu, était exprimée comme s'appliquant aux cordes des arcs doubles. Des procédés analogues, plus compliqués, s'appliquaient à la Trigonométrie sphérique.

La plupart de ces progrès sont l'œuvre d'Hipparque; mais ce n'est pas là le plus grand mérite de cet homme étonnant, un des plus grands sans doute de toute l'antiquité. Hipparque fut surtout astronome, et comme tel il a, par l'intermédiaire de son successeur Ptolémée, fait la loi à tous les siècles suivants, jusqu'à la grande réformation de Copernic. C'est aussi par l'intermédiaire de Ptolémée que nous pouvons juger aujourd'hui ses travaux, car de tout ce qu'il a écrit nous ne possédons guère que le *Commentaire d'Aratus*, ouvrage de début et de peu d'importance d'ailleurs. Ses grandes découvertes sont toutes postérieures à ce Livre. La première fut celle de la précession des équinoxes. Hipparque assigna ensuite à la longueur de l'année une nouvelle valeur, qui est trop forte de $6^{m}\frac{1}{3}$; il remarqua l'inégalité dans les mouvements en longitude de la Lune et du Soleil et leur attribua d'après cela des orbes circulaires excentriques; il détermina l'excentricité et la ligne des apsides de l'orbite du Soleil avec une grande exactitude; il ne fit pas, il est vrai, une théorie complète de la Lune, mais il détermina la durée de la révolution synodique, de la révolution anomalistique et de celle de la

ligne des nœuds, ainsi que l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique; il essaya de déterminer les distances des astres, et sa valeur pour la parallaxe horizontale de la Lune est d'une exactitude surprenante; il détermina les durées des révolutions des cinq planètes connues alors. Voilà certes assez de résultats pour justifier le jugement de Delambre : « C'est le plus grand de tous dans les sciences qui ne sont pas purement spéculatives. »

D'Hipparque à Ptolémée nous avons, comme le dit justement M. Marie, plus d'écrivains que de savants : Possidonius, connu par ses relations avec Cicéron ; Nicomède, l'inventeur de la conchoïde, qui porte son nom ; Sosigène, qui opéra la grande réforme du calendrier romain; Manilius, auteur du poème latin intitulé *Astronomicon;* Sérénus, auteur de Livres sur les sections du cylindre et du cône; Ménélaüs, dont les *Sphériques* contiennent quelques problèmes importants sur la Trigonométrie sphérique ; enfin Théon de Smyrne, auteur de deux Ouvrages sur l'Arithmétique et l'Astronomie. M. Marie donne une analyse complète des travaux de Théon, non point qu'ils soient bien importants, mais ce sont les seuls à peu près qui puissent nous donner une idée de l'enseignement pythagoricien à cette époque. Outre quelques formules sur les propriétés des nombres, énoncées d'ailleurs sans aucune démonstration, on y trouve nombre de considérations absurdes ou chimériques.

Cependant la vraie science marchait encore. Ptolémée est un contemporain de Théon. M. Marie s'efforce de rendre justice à cet astronome célèbre, longtemps porté aux cieux, puis précipité tout à coup de son piédestal. Il cherche à séparer les découvertes de Ptolémée de celles qu'avaient faites Hipparque et ses successeurs : c'est à eux qu'appartiennent pour la plupart les observations dont se sert Ptolémée; il a emprunté aussi à Hipparque ses méthodes et même jusqu'à une partie de ses calculs; toutefois ce qu'il dit des planètes lui appartiendrait en propre; il est aussi entièrement original dans sa théorie de la Lune, où il appliqua son fameux *épicycle*, qui lui permit de dresser des Tables très exactes. Dans son système du monde il faisait décrire aux planètes des épicycles dont les centres parcouraient des cercles concentriques à la Terre; enfin le plan de l'épicycle éprouvait un balancement convenable. On pourra lire dans le Livre de M. Marie comment, à

l'aide de ces suppositions, Ptolémée arrivait à accorder son hypothèse avec le mouvement apparent des planètes. Outre le grand Ouvrage astronomique, nommé généralement *Almageste*, nous avons de Ptolémée plusieurs autres, dont les plus importants sont la *Géographie* et l'*Optique*. Il a découvert aussi quelques théorèmes géométriques de grande importance.

Ce premier Volume se termine par un Chapitre intitulé : *L'Algèbre des géomètres grecs;* c'est cette science perdue que M. Marie s'est efforcé de restituer autant que possible avec des éléments fournis principalement par les écrits d'Euclide.

Le deuxième Volume s'ouvre avec la quatrième période, qui va de Diophante à Copernic. Nous voyons s'opérer la convergence entre les travaux des géomètres et les travaux des arithméticiens jusque-là étrangers les uns aux autres.

Chez les Hindous, les Mathématiques s'étaient développées dans un tout autre sens qu'en Grèce. A côté de notions géométriques très faibles et parfois même ridiculement fausses, ils avaient ce qui manqua aux Grecs, un système arithmétique d'une haute perfection. C'est par leur influence et celle des Arabes que s'opéra le rapprochement de la Géométrie et de l'Arithmétique grecques. Cependant M. Marie nous fait remarquer que la plupart des savants de cette époque, « quoique ayant directement ou indirectement bénéficié des recherches des Hindous, n'en sont pas moins restés les disciples immédiats des Grecs ». Il cherche donc à rattacher leur Algèbre à la Géométrie. Il remarque que leurs valeurs connues sont toujours et leurs valeurs inconnues très souvent commensurables.

Le Chapitre sur Diophante renferme la traduction d'un grand nombre de questions arithmétiques ; elles nous donnent la plus haute idée du génie mathématique de Diophante; mais en même temps elles nous prouvent qu'il n'était pas en possession d'une méthode générale pour la résolution des équations. L'isolement de l'inconnue est la suite d'un artifice quelconque, qui en somme n'est applicable qu'au cas spécial. Mais Diophante a-t-il vraiment ignoré toute formule générale? M. Marie ne le pense pas; il suppose au contraire « que Diophante en sait plus long qu'il ne veut en avoir l'air », et c'est surtout l'examen des conditions de possibilité, ajou-

tées dans quelques problèmes, qui lui suggèrent à juste titre cette idée.

Avec Pappus nous revenons aux géomètres. De tous ses Ouvrages nous ne possédons que les *Collections mathématiques,* Ouvrage très incomplet, très maltraité des copistes et qui était destiné à servir de commentaire à d'autres, que pour la plupart nous ne possédons plus. M. Marie donne une analyse très complète des fragments du second Livre d'après Delambre, et des autres d'après Commandin. On y trouve un grand nombre de théorèmes géométriques très remarquables, entre autres le premier exemple d'une surface courbe quarrable, plusieurs théorèmes sur la théorie des transversales, le théorème connu sous le nom de Guldin, une théorie de la sphère différente de celle de ses prédécesseurs, etc. En somme, M. Marie, tout en admirant beaucoup les travaux de Pappus, trouve que toutes les voies ouvertes par lui ne menaient et ne pouvaient mener qu'à un groupe de théorèmes, très intéressants sans doute, mais forcément restreint.

Après Pappus, si nous poursuivons l'histoire des mathématiciens gréco-romains, nous entrons en pleine décadence. Le nom d'Hypatia a eu un grand retentissement à cause de sa mort. Mais de ses travaux mathématiques, nous ne connaissons que les titres.

Il faut franchir plusieurs siècles pour retrouver un mathématicien d'un mérite réel : Boèce, un Romain, ministre du roi des Ostrogoths, longtemps comblé de la faveur royale, enfin emprisonné et mis à mort. Il nous a laissé plusieurs Traités ; mais c'est surtout l'Arithmétique qui nous intéresse ici. Nous y trouvons notre système de numération écrite. Gerbert, Adelhart de Bath et tous ceux qu'on a nommés justement *Abacistes* ont écrit sur l'abacus des Traités qui, en somme, ne sont qu'une paraphrase de Boèce. C'est donc bien de ce dernier que provient en grande partie la science arithmétique du moyen âge; mais lui-même, où l'avait-il puisée? Doit-on admettre que ces méthodes ont existé de tout temps en Grèce, et alors pourquoi les grands géomètres ne nous en ont-ils laissé aucune mention? Ces méthodes se sont-elles développées au contraire dans la période de décadence? Ont-elles été importées de l'Inde, où nous voyons à cette époque briller les recherches numériques? On a émis ces différentes hypothèses et on les a défendues avec beaucoup d'érudition. Pour nous, nous

croyons avec Chasles, Th.-H. Martin, Cantor, à l'origine grecque et latine de ce système. Boèce en fait honneur aux Pythagoriciens : les chiffres ont, avec les sigles latins des noms de nombre correspondants, des ressemblances frappantes; il a suffi de supprimer les colonnes du vieil abacus et de remplacer les anciens jetons par des chiffres pour arriver à notre système de numération écrite. M. Marie se range du côté de ceux qui soutiennent l'importation hindoue. Le premier arithméticien hindou que nous connaissons (Aryabhâta) est à peu près contemporain de Boèce. Mais son système est déjà très développé et il est très probable qu'il a eu des prédécesseurs. Ce serait donc à ces géomètres que Boèce aurait emprunté ses connaissances.

Jamais Aryabhâta n'avait été aussi parfaitement traité dans une histoire. C'est d'après la traduction de M. Rodet que l'auteur analyse l'*Aryabhatiyam*. Nous y voyons une valeur remarquablement approchée de $\pi (= 3,1416)$, la résolution complète de l'équation du second degré, les formules pour la somme des carrés et des cubes, et enfin une table trigonométrique. Cette dernière est remarquable, non seulement parce qu'elle donne les sinus sans passer, comme l'ont fait les Grecs, par les cordes, mais aussi par l'emploi d'une formule d'interpolation, qui est d'une exactitude absolue. Mais si l'Aryabhatiyam nous fait admirer toute la hauteur de l'esprit hindou, il nous en montre aussi les bornes. Nous y trouvons une formule singulièrement fausse pour le volume de la pyramide.

Plus d'un siècle après Aryabhâta vient Brahma-Gupta. Nous avons de lui des Traités d'Arithmétique (*Ganita*) et d'Algèbre (*Kuttakâ*) qui sont tous deux des Chapitres d'un Ouvrage astronomique, le *Brahma-Sphûta-Siddhânta*. Ces Traités cèdent en importance à l'Aryabhatiyam; ils contiennent entre autres choses l'énoncé du théorème pour l'aire du quadrilatère inscrit en fonction de ses côtés, formule entièrement inconnue des Grecs; l'auteur pense que la formule d'Héron pourrait bien dériver de celle de Brahma-Gupta.

Pendant ce temps s'éteignaient en Occident les dernières lumières de la civilisation gréco-romaine. Anthemius, Eutocius, Dioclès, Dionysidore ne sont que des commentateurs sans valeur. Héron le Jeune aurait beaucoup plus d'importance si en effet le

Traité de la Dioptre était de lui. Mais, en somme, on peut dire que pendant cette période la science sommeille en Europe : ce sont les écrivains des peuples mahométans ou, comme on est convenu de les appeler d'après la langue dans laquelle ils écrivaient, les Arabes qui, en profitant de l'enseignement des Hindous et des Grecs, lui donneront un nouvel essor.

Le travail de M. Maximilien Marie, généralement complet sur les travaux scientifiques de l'Inde, l'est moins sur les travaux des Arabes. Les Mémoires de Wœpcke semblent pour la plupart lui avoir échappé; il est néanmoins en progrès sur ses prédécesseurs français.

Le nom de Mohammed ben-Muza al-Kharizmi est un des plus célèbres de cette époque. C'est d'une expression employée dans ses Ouvrages que vient le mot *Algèbre* et c'est le mot *Alkhârizmi* qui a donné naissance au mot *algorithme,* désignation ultérieure de toute une partie de l'Arithmétique. Son *Traité d'Algèbre* existe dans plusieurs traductions latines. M. Marie nous en donne une analyse d'après la traduction publiée par Libri. L'Ouvrage est composé de cinq Parties, dont la dernière ne contient que des problèmes; les quatre premières sont consacrées à la méthode. M. Marie pense que ces Parties ne sont pas toutes d'Al-Khârizmi. En effet, la première et la troisième Partie contiennent à elles seules les formules nécessaires pour la résolution de l'équation du second degré, tandis que cette résolution même, dans le second Livre, est faite à l'aide de figures géométriques assez compliquées. L'auteur suppose que ce second Livre pourrait appartenir aux Hindous, antérieurs à Aryabhâta.

Musa ben-Schaker a composé un grand Ouvrage sur *Les sources de l'Histoire.* Mais il est connu surtout comme le père des trois frères Ahmed, Haçen et Mohammed, tous trois mathématiciens distingués, à ce point qu'on leur a attribué longtemps l'Ouvrage d'Al-Khârizmi. Tous trois ils ont laissé des écrits sur différentes parties des Mathématiques.

Thébit ben-Corrah était surtout astronome. Il a imaginé le système de la trépidation, qui a été suivi par la plupart des astronomes du moyen âge. Au contraire, Mohammed ben-Geber-Albatani, connu sous le nom d'Albategnius, a rendu des services signalés en substituant le sinus à la corde, et en déterminant avec

une exactitude remarquable, l'obliquité de l'écliptique, l'excentricité de l'orbite solaire, la longueur de l'année tropique.

Le mouvement scientifique en Orient est à son apogée et pendant ce temps nous ne trouvons guère à enregistrer en Occident qu'un nom célèbre : celui de Gerbert, dont la *Regula de abaco computi* et surtout la haute influence contribuent vigoureusement au développement de l'Arithmétique.

Les peuples les plus éloignés, naguère les plus barbares, prennent part au mouvement; un petit-fils de Tamerlan devient un astronome célèbre. Aboul-Wéfa introduit l'usage des tangentes et cotangentes, sécantes et cosécantes. Ebn-Jounis résout un grand nombre de problèmes trigonométriques. Alpétrage complète la théorie des mouvements des astres, en ajoutant une neuvième sphère. Alhazen (Hassan ben-Haïthem) fait des recherches importantes sur l'Optique, Avicenne sur la Médecine. On s'applique à traduire, à commenter les Ouvrages des Hindous et des Grecs, et pour certains écrits nous sommes réduits aujourd'hui encore à recourir aux textes arabes : c'est ainsi qu'on a cru retrouver dans le *Traité des connues* de Alhazen des traces du *Traité des Porismes* d'Euclide.

Ici, comme ailleurs, les Juifs ont joué le rôle d'intermédiaires. Les Européens ignoraient généralement l'arabe : ce sont les Juifs qui les ont mis au courant des progrès. Le plus célèbre est Aben-Ezra, qui a laissé un grand nombre d'Ouvrages scientifiques et parmi eux un *Traité d'Arithmétique*, dont M. Marie nous résume les particularités. Son coréligionaire, Jean de Séville, a également laissé un *Traité de l'Algorisme;* mais il est connu surtout par un grand nombre de traductions latines et espagnoles qu'il publia après sa conversion au christianisme.

Bientôt, l'esprit scientifique s'éveille en Occident. Les Arabes avaient presque toujours traité séparément la Géométrie grecque et l'Arithmétique hindoue. Léonard de Pise, au contraire, s'efforce de les rapprocher. Ses Livres ont une influence considérable en Europe; cependant ils sont bien moins populaires que les compilations de Sacrobosco (Jean de Holywood). Plus célèbre encore est le nom de l'alchimiste Albert de Bolldstaedt, surnommé le Grand par ses contemporains, mais dont le mérite aux yeux de la postérité est bien effacé par Roger Bacon.

En Orient, à la même époque, paraissent deux Ouvrages importants : *Traité des instruments astronomiques* de Haboul-Hhassan-Ali et les *Tables Ilkhaniennes* de Nassir-Eddin, petit-fils de Gengiskhan. Pour l'Occident, ces tables sont remplacées par les Tables alphonsines, dressées en 1252 par l'ordre d'Alphonse VII, roi de Castille.

Désormais, la science occidentale marche d'un pas assuré. Avec Purbach et son élève Regiomontanus, nous sommes au xve siècle. Le premier s'applique surtout à amender le système de Ptolémée ; le second donne le premier un Traité complet de Trigonométrie. L'Algèbre de cette époque est représentée par Lucas de Burgo (Paccioli), Nicolas Chuquet. Leur contemporain, Jean Werner, a passé longtemps pour l'inventeur de la méthode trigonométrique de la *prostaphérèse,* dont on se servait généralement avant l'invention des logarithmes; il paraît cependant qu'elle était déjà employée par les Arabes.

Le grand nom de Copernic (1473-1543) inaugure la ve période. Malgré un grand nombre de travaux, la vie du grand Polonais ne nous est pas encore parfaitement connue. Il n'est pas possible de déterminer exactement l'époque à laquelle il imagina son système. Il paraît qu'il l'avait déjà entièrement développé en 1512. Mais, heureux dans son coin, il craignait d'entamer une lutte qu'il savait inégale. Longtemps en vain, ses amis le prièrent de le publier; il ne se rendit que très tard à leurs vœux; cette œuvre incomparable, intitulée : *De Revolutionibus Orbium cœlestium libri VI,* parut seulement après sa mort, dédiée inutilement au pape Paul III.

M. Marie nous donne une courte analyse du Livre *De Revolutionibus.* Il s'est appliqué surtout à exposer les méthodes par lesquelles Copernic détermine les rayons des orbites, les excentricités des planètes ; il fait remarquer que, de toutes les preuves qui nous font admettre aujourd'hui la théorie du mouvement de la Terre, Copernic ne pouvait faire valoir que celle de la plus grande simplicité; c'est sans doute ce qui explique le mauvais accueil que lui firent beaucoup de ses contemporains.

De Copernic à Cardan, nous relevons plusieurs savants distingués : Estienne de la Roche, auteur d'un *Traité d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie,* Michel Stifel, Sébastien Munster, qui

le premier a disposé le style du cadran solaire parallèlement à l'axe du monde, Nonius, qui imagina un instrument analogue au vernier, Jean Fernel, qui, outre plusieurs Ouvrages sur la médecine, s'est fait connaître par sa mesure du degré du méridien, et enfin Tartaglia, véritable inventeur de la formule pour la résolution des équations cubiques. Ayant eu l'imprudence de la montrer à Cardan, celui-ci s'en empara et la publia. Cependant il restera toujours à ce dernier le mérite d'en avoir trouvé la démonstration et de l'avoir discutée dans tous les cas. Cette discussion se trouve dans l'Ouvrage intitulé : *Ars magna,* dont M. Marie donne une analyse complète. Nous y voyons que Cardan résolvait l'équation du second degré à l'aide de figures géométriques, un peu différentes de celles de Mohammed ben-Musa, mais tout aussi bizarres. Pour l'équation du troisième degré, il se sert aussi de figures géométriques; il reconnaît 57 cas différents de cette équation, dont 13 principaux et 44 dérivés; il termine par des équations de degrés supérieurs, réductibles au troisième. Outre l'*Ars magna,* M. Marie analyse encore le *Sermo de plus et minus* de Cardan, qui est de moindre importance. Cardan s'efforce d'y prouver, entre autres choses, que moins par moins peut donner parfois moins.

De Cardan à Viète, nous ne trouvons que peu de noms célèbres. Parmi les plus connus, sont Ludovico Lilio, le réformateur du calendrier; Erasme Reinhold, l'auteur des Tables dites Pruténiques; Gérard Mercator, inventeur du système de projection qui porte son nom; Rheticus, l'adhérent zélé de Copernic et l'auteur de Tables trigonométriques, publiées par Othon Ferrari, qui résolut l'équation du quatrième degré; Bombelli, qui reconnut la réalité des racines dans le cas irréductible; Danti, qui mentionne la diminution de l'obliquité de l'écliptique; enfin Ludolph Van Ceulen, qui donna la valeur de π jusqu'à 35 décimales.

Ch. Henry et Em. Meyerson.

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

Par M. KŒNIGS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

I. — Préliminaires.

1. Je m'occupe dans ces recherches des points limites vers lesquels on peut tendre par l'application indéfinie d'une substitution uniforme. Je n'étudierai que les points-limites pour lesquels la fonction uniforme $\varphi(z)$ que l'on substitue à z n'offre pas de singularité essentielle : tel serait le cas de la fonction $e^{-\frac{1}{z}}$, dont le point singulier essentiel *zéro* est un point limite, lorsque l'on attribue à la valeur initiale z une détermination réelle.

2. La division des premiers résultats que je veux présenter est fondée sur une distinction que je vais expliquer tout de suite.

Étant donnée une suite de quantités en nombre illimité

$$(\alpha) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

je dis que cette suite *converge régulièrement* vers zéro, lorsque, à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre N_ε, tel que, sous la seule condition $p > N_\varepsilon$, on ait

$$\operatorname{mod} \alpha_p < \varepsilon.$$

Si, au contraire, la suite α ne présente pas ce caractère, mais que, pour si grand que soit N, pour si petit que soit ε, on puisse *toujours* vérifier les inégalités simultanées $p > N$, $\operatorname{mod} \alpha_p < \varepsilon$, je dirai que la suite (α) *converge irrégulièrement* vers zéro.

Une suite étant donnée, si, en retranchant de chacun de ses termes une même quantité λ, on peut former une nouvelle suite convergent régulièrement ou irrégulièrement vers zéro, je dirai que la suite primitive converge régulièrement ou irrégulièrement vers λ.

3. Si une suite ne présente aucun des caractères de convergence régulière ou irrégulière vers zéro, à partir d'un certain rang les modules de ses termes restent supérieurs à un nombre fixe.

Dans le cas de la convergence régulière, la condition $p > N$, suffit pour assurer l'inégalité $\bmod \alpha_p < \varepsilon$. Dans le cas de la convergence irrégulière, il faut à la première condition en adjoindre une seconde, pour être sûr d'avoir $\bmod \alpha_p < \varepsilon$, et c'est cette seconde condition qui caractérise les diverses espèces de convergence irrégulière, et pourrait permettre de les classer.

II. — Points racines et groupes circulaires.

4. Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme : je pose, pour abréger,

$$z_1 = \varphi_1(z) = \varphi(z), \quad z_2 = \varphi_2(z) = \varphi(z_1), \quad \ldots, \quad z_p = \varphi_p(z) = \varphi(z_{p-1}).$$

Il est clair que l'on a, n et n' étant positifs,

$$\varphi_n(z_{n'}) = \varphi_{n+n'}(z).$$

Le problème que je traite ici est étroitement lié avec la considération des racines des équations du type

$$(E_p) \qquad z - \varphi_p(z) = 0.$$

A l'égard de ces racines j'établirai les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'entier p divise l'entier n, l'équation E_n admet toutes les racines de l'équation E_p.*

Théorème II. — *Si c est le reste de la division de a par b, toute racine commune aux équations E_a, E_b vérifie aussi l'équation E_c.*

Théorème III. — *Si l'on désigne par d le plus grand commun diviseur des deux nombres a et b, les racines communes aux équations E_a, E_b vérifient l'équation E_d.*

Pour démontrer le premier théorème, je prends p fois la fonction φ des deux membres de la relation

$$\varphi_p(x) = x,$$

qui exprime que x est racine de l'équation E_p; il vient

$$\varphi_{2p}(x) = \varphi_p(x) = x;$$

en prenant encore p fois la fonction φ de la relation $\varphi_{2p}(x) = x$, on trouve $\varphi_{3p}(x) = x$, et ainsi de suite; plus généralement on a $\varphi_{kp}(x) = x$, où k est un entier quelconque.

Le second théorème se démontre ainsi : soit $a = bq + c$; x étant une racine de E_b est aussi racine de E_{bq}, en vertu du premier théorème, et l'on a

$$\varphi_{bq}(x) = x;$$

en prenant alors c fois la fonction φ des deux membres, on trouve

$$\varphi_{bq+c}(x) = \varphi_c(x) \quad \text{ou} \quad \varphi_a(x) = \varphi_c(x);$$

donc, si x est aussi racine de E_a, on a $\varphi_a(x) = x$ et par suite aussi $\varphi_c(x) = x$, c'est-à-dire que x vérifie l'équation E_c.

Le troisième théorème est une conséquence directe du premier si b divise a, et du second dans le cas contraire.

En rapprochant les théorèmes I et III, on voit que le système des racines communes à E_a et à E_b est formé de l'ensemble des racines de l'équation E_d.

5. D'après cela, les racines d'une équation E_p se divisent en deux catégories : les unes vérifient des équations dont l'indice, *inférieur* à p, divise p; les autres ne vérifient aucune équation dont l'indice soit inférieur à p, et alors elles ne peuvent vérifier que les équations dont l'indice est divisible par p. De ces dernières racines je dirai qu'elles *appartiennent à l'indice* p.

Posons, x étant racine de E_p,

$$x_1 = \varphi_1(x), \quad x_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad x_{p-1} = \varphi_{p-1}(x);$$

la substitution $[z, \varphi(z)]$ permute circulairement les quantités

$$x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}.$$

Je vais en outre démontrer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Les quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ sont toutes des racines de l'équation* E_p.

Théorème II. — *Si x appartient à l'indice p, il en est de même des autres racines $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.*

De la relation

$$x_1 = \varphi_1(x),$$

je déduis, en prenant p fois la fonction φ des deux membres,

$$\varphi_p(x_1) = \varphi_{p+1}(x) = \varphi_1[\varphi_p(x)];$$

or $\varphi_p(x) = x$: donc $\varphi_p(x_1) = \varphi_1(x) = x_1$. On démontrerait de même que x_2 vérifie l'équation E_p, puis x_3, etc. Le premier théorème est ainsi établi.

Si l'on suppose maintenant que x_1 appartienne à l'indice q, comme x_1 vérifie E_p, il faudra que q divise p; soit $p = nq$. La substitution $\varphi(z)$ permute alors circulairement les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q$ et l'on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{q+1} = x_{2q+1} = \ldots = x_{(n-1)q+1}, \\ x_2 &= x_{q+2} = x_{2q+2} = \ldots = x_{(n-1)q+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_q &= x_{2q} \;\; = x_{3q} \;\;\; = \ldots = x_{nq} = x. \end{aligned}$$

Donc, puisque $x = x_q$, x fait partie d'un groupe circulaire de q racines; il vérifie donc l'équation E_q, et appartient nécessairement à un indice inférieur à p si q n'est pas égal à p. Il suit de là que, si x appartient à l'indice p, x_1 appartient au même indice et par suite, de proche en proche, $x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ appartiennent tous à l'indice p.

En résumé : *Les racines appartenant à l'indice p se distribuent en groupes de p racines permutables circulairement par la substitution* $\varphi(z)$.

III. — Des points limites a convergence régulière.

6. En désignant par z un point du plan, formons la suite des quantités

(1) $$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z),\ \ldots,\ \varphi_p(z);$$

dans l'hypothèse où cette suite offre des caractères de convergence vers une limite x, il y a lieu de distinguer suivant que cette convergence est régulière ou irrégulière. Je commence par le premier cas. Je pose

$$\varphi_p(z) = x + \alpha_p;$$

on a

$$x + \alpha_{p+1} = \varphi(x + \alpha_p).$$

Je suppose le module de x fini, et de plus j'écarte le cas où x se-

rait un pôle de $\varphi(z)$. A partir d'un rang suffisamment élevé de l'indice p, α_p est assez petit pour que le second membre soit développable suivant la série de Taylor et l'on a

$$x + \alpha_{p+1} = \varphi(x) + \alpha_p \varphi'(x) + \frac{\alpha^2_p}{1.2} \varphi''(x) + \ldots.$$

En vertu de la convergence régulière de la suite (1), α_p et α_{p+1} tendent simultanément vers zéro lorsque p croît indéfiniment, et il reste à la limite

$$x = \varphi(x).$$

En outre, en tenant compte de ce résultat dans la relation qui lie α_{p+1} et α_p, on trouve

$$\lim \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \varphi'(x).$$

Si le module de $\varphi'(x)$ était supérieur à l'unité, à partir d'un certain rang, le module de α_p irait en croissant avec p, et α_p n'aurait pas zéro pour limite. Nous avons donc le théorème suivant :

Les points limites, à convergence régulière, qui sont pour $\varphi(z)$ des points non singuliers, sont nécessairement des points racines appartenant à l'indice 1 ; *et de plus ils doivent rendre le module $\varphi'(z)$ au plus égal à l'unité.*

7. La réciproque de cette proposition peut être établie ; mais il existe dans cette question un cas douteux, absolument comme dans le cas des séries : c'est lorsque le point racine rend le module de $\varphi'(z)$ précisément égal à l'unité. Je ne traiterai pas dans ces premières recherches ce cas particulier, qui prête à des développements très étendus. J'énonce ainsi la réciproque de la proposition précédente :

Si l'on appelle x un point racine appartenant à l'indice 1, *et rendant le module de $\varphi'(z)$ inférieur à l'unité, il existe un cercle C_x de centre x, de rayon fini, tel que tout point z intérieur conduit au point x par des points qui vont sans cesse en s'en rapprochant.*

En effet, en posant

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\varphi'(x) + (z - x)^2 \psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de

centre x. Je désigne par A le maximum du module de $\psi(z)$ dans ce cercle, et j'appelle C' un cercle concentrique au cercle C et ayant pour rayon

$$\frac{1 - \operatorname{mod} \varphi'(x)}{A}.$$

Soit C_x celui des deux cercles C ou C' qui est intérieur à l'autre; à l'intérieur de C_x $\psi(z)$ est holomorphe, et en même temps on a

$$\operatorname{mod}(z - x) < \frac{1 - \operatorname{mod} \varphi'(x)}{A},$$

d'où

$$\operatorname{mod}[(z - x)\psi(z)] < \operatorname{mod}(z - x) A < 1 - \operatorname{mod} \varphi'(x),$$

et *a fortiori*

$$\operatorname{mod}[\varphi'(x) + (z - x)\psi(z)] < 1,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} < 1$$

ou, en mettant x au lieu de $\varphi(x)$ et z_1 au lieu de $\varphi(z)$

$$\operatorname{mod} \frac{z_1 - x}{z - x} < 1,$$

c'est-à-dire que z_1 est plus rapproché de x que z; de même, z_2 sera plus rapproché de x que z_1, et ainsi de suite. Donc les points $z_1, z_2, z_3, \ldots$, vont en s'approchant *sans cesse* de x et ont x pour limite.

8. Je compléterai ces propositions par le théorème suivant :

En supposant que x soit un point limite à convergence régulière rendant le module de $\varphi'(z)$ inférieur à l'unité et ne l'annulant pas, tandis que la différence $\varphi_p(z) - x$ tend vers zéro, le rapport

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

tend vers une limite finie et différente de zéro.

En effet, de l'expression $\alpha_p = \varphi_p(x) - x$ on tire, par la loi de récurrence,

$$\alpha_{p+1} = \varphi'(x)\alpha_p + \frac{\varphi''(x)}{1.2}\alpha_p^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \varphi'(x)(1 + \alpha_p^k A_p).$$

Dans cette expression, k est un entier autre que zéro, et A_p une fonction entière de α_p; nous pouvons, en effet, supposer que nous partions d'un point z intérieur au cercle C dans lequel $\varphi(z)$ est développable suivant la série de Taylor. En faisant varier p depuis 1 jusqu'à $(m-1)$, nous aurons, si nous effectuons le produit

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = [\varphi'(x)]^{m-1} \prod_1^{m-1} (1 + \alpha_p^k A_p).$$

Je pose

$$P_m = \prod_1^{m-1} (1 + \alpha_p^k A_p);$$

en prenant les logarithmes, je trouve

$$\log P_m = \sum_1^{m-1} \log(1 + \alpha_p^k A_p).$$

Dans la série $\sum_1^{\infty} \log(1 + \alpha_p^k A_p)$, le rapport d'un terme au précédent a pour expression

$$\frac{\log(1 + \alpha_p^k A_p)}{\log(1 + \alpha_{p-1}^k A_{p-1})}.$$

Ce rapport peut s'écrire, lorsque p est suffisamment grand,

$$\frac{\alpha_p^k}{\alpha_{k-1}^p} \frac{A_p}{A_{p-1}} \frac{1+\varepsilon_p}{1+\varepsilon_{p-1}},$$

où ε_p et ε_{p-1} tendent simultanément vers zéro.

La limite de ce rapport est égale au produit des limites des trois fractions : la première tend vers $[\varphi'(x)]^k$ dont le module est inférieur à l'unité, les deux autres tendent vers l'unité. Donc, dans la série

$$\sum_1^{\infty} \log(1 + \alpha_p^k A_p),$$

le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite dont le

module est inférieur à l'unité; cette série est absolument convergente, et en appelant ω sa somme, on a, par conséquent,

$$\lim P_m = e^{\omega}.$$

Mais, en posant $\frac{\alpha_1}{\varphi'(x)} e^{\omega} = B$, la quantité B est finie et différente de zéro, et l'on a

$$\lim \frac{\alpha_m}{[\varphi'(x)]^m} = B:$$

c'est la proposition que je voulais démontrer.

IV. — Des points limites a convergence irrégulière.

9. J'ai dit dans les préliminaires que chaque espèce de convergence irrégulière était caractérisée par la deuxième condition qu'il faut adjoindre à la condition $p > N$ pour être assuré de l'inégalité $\operatorname{mod} \alpha_p < \varepsilon$. Je considérerai le cas où la suite

$$(1) \qquad \varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \quad \varphi_3(z), \quad \ldots,$$

converge irrégulièrement vers une limite x, de telle sorte que, si l'on prend seulement les termes dont les indices sont divisibles par un entier p, la condition que l'indice m soit supérieur à un nombre convenable suffise pour que le module de $\varphi_m(z) - x$ soit inférieur à un nombre positif ε pris aussi petit qu'on voudra. Autrement dit, je suppose qu'en ne prenant dans la suite (1) que les termes dont l'indice est divisible par p, la suite ainsi obtenue,

$$(p) \qquad \varphi_p(z), \quad \varphi_{2p}(z), \quad \varphi_{3p}(z), \quad \ldots,$$

offre les caractères d'une convergence régulière vers x.

Il est clair que rien ne justifie *a priori* l'arbitraire qui préside à notre choix. Mais la suite montrera jusqu'à quel point il est fondé.

10. Si nous posons $\varphi_p(z) = f(z)$, nous remarquons d'abord que la suite (p) et la suite (1) du n° 6 ne diffère qu'en ce que f remplace φ : on est donc en droit d'appliquer les théorèmes des nos 6, 7 et 8.

Ainsi :

Dans le cas actuel, le point limite x est une racine de l'équation E_p rendant le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ au plus égal à l'unité.

Et réciproquement :

En appelant x une racine de l'équation E_p, qui rende le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ inférieur à l'unité, il existe un cercle de C_x de centre x, tel que tous ses points conduisent au point x, de façon que la suite (p) converge régulièrement vers x.

Enfin :

Lorsque k croît indéfiniment, le rapport

$$\frac{\varphi_{kp}(z)-x}{\left[\frac{d\varphi_p(x)}{dx}\right]^k}$$

converge vers une limite finie et différente de zéro.

11. Mais il importe d'approfondir davantage la question, de façon à mettre bien en lumière la raison pour laquelle la suite (p) converge régulièrement vers x, tandis que la suite (1) converge irrégulièrement.

Soit μ l'indice auquel la racine x appartient : μ divise p, on a

$$p=\mu.q;$$

soit

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\mu-1}$$

le groupe circulaire de racines dont x fait partie. On a *pour* $z=x$

$$\frac{d\varphi_p(z)}{dz}=[\varphi'(x)\,\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})]^q.$$

Si l'on suppose que x rende le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ inférieur à l'unité, on aura donc

$$\operatorname{mod}[\varphi'(x)\,\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})]<1,$$

c'est-à-dire que, *pour* $z=x$, le module de $\frac{d\varphi_\mu(z)}{dz}$ est inférieur à l'unité et, par conséquent, en vertu de la réciproque énoncée dans le numéro précédent, la suite

$$(\mu)\qquad \varphi_\mu(z),\ \varphi_{2\mu}(z),\ \varphi_{3\mu}(z),\ \ldots$$

présente les caractères d'une convergence régulière vers x. D'ailleurs, la suite (μ) renferme tous les termes de la suite (p); de

plus, il n'est pas possible de trouver une suite (μ')

$$\varphi_{\mu'}(z),\ \varphi_{2\mu'}(z),\ \varphi_{3\mu'}(z),\ \ldots,$$

offrant les caractères d'une convergence régulière vers x et dans laquelle on aurait $\mu' < \mu$: autrement x appartiendrait à un indice inférieur à μ, et non à μ lui-même.

Ainsi, en excluant le cas limite douteux où le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ est égal à l'unité pour $z = x$, on peut énoncer la proposition suivante :

Si, en prenant dans la suite (1) *les termes dont les indices sont divisibles par l'entier* p, *on peut former une suite* (p) *convergent régulièrement vers* x, *en appelant* μ *l'indice auquel* x *appartient, on peut toujours supposer* $p = \mu$ *et, de plus,* μ *est la valeur la plus petite que puisse prendre le nombre* p.

12. Prenons donc une racine x appartenant à l'indice μ et, vérifiant la condition

$$\operatorname{mod}[\varphi'(x)\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})] < 1,$$

je forme les suites

$$\begin{array}{llllll}
z, & \varphi_\mu(z), & \varphi_{\mu 2}(z), & \ldots, & \varphi_{k_\mu}(z), & \ldots,\\
\varphi_1(z), & \varphi_{\mu+1}(z), & \varphi_{2\mu+1}(z), & \ldots, & \varphi_{k_\mu+1}(z), & \ldots,\\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots,\\
\varphi_{\mu-1}(z), & \varphi_{\mu+\mu-1}(z), & \varphi_{2\mu+\mu-1}(z), & \ldots, & \varphi_{k_\mu+\mu-1}(z), & \ldots.
\end{array}$$

La première suite converge régulièrement vers x. D'ailleurs, la substitution $\varphi(z)$ permet de passer de la première suite à la deuxième, de la deuxième à la troisième, etc. Il en résulte donc que la deuxième suite converge régulièrement vers x_1, la troisième vers x_2, etc., la dernière vers $x_{\mu-1}$, pourvu qu'on suppose qu'aucune des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ n'est un pôle de $\varphi(z)$, cas que j'examinerai tout à l'heure. Si l'on remarque d'ailleurs que x est une racine quelconque du groupe circulaire $x, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$, on peut énoncer la proposition suivante :

Un groupe circulaire de μ *racines, vérifiant la condition*

$$\operatorname{mod}[\varphi'(x)\ \varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})] < 1,$$

étant donné, chaque racine du groupe, par exemple x_i, est le centre d'un cercle C_{x_i} : z étant un point intérieur à ce cercle, $\varphi_p(z)$, pour p indéfiniment croissant, tendra vers l'une ou l'autre des racines du groupe suivant le reste de la division de p par μ.

Les termes dont les indices sont tous congrus à $(h-i)$ suivant le module μ forment une suite qui converge régulièrement vers la racine x_h.

13. Je ne m'arrêterai pas à la démonstration du fait suivant :

On peut toujours entourer chaque point du groupe, par exemple x_i, d'un cercle Γ_i ayant son centre en ce point, de sorte qu'il suffise de partir d'un point intérieur à l'un de ces cercles pour sauter successivement des uns aux autres, et de telle façon que, dans un passage dans un cercle, on soit plus rapproché de son centre que dans le passage qui précédait.

On se rend ainsi très bien compte de cette convergence irrégulière de la suite (1) que nous avions, dès l'abord, arbitrairement définie.

V. — L'infini envisagé comme point limite.

14. Un pôle de $\varphi(z)$ ne peut être un point limite à convergence régulière : cela est évident. Mais, si le point O' de la sphère qui représente l'infini est un pôle de $\varphi(z)$, ce point peut être, sous une condition très simple, envisagé comme un point limite à convergence régulière.

Je pose

$$z' = \frac{1}{z}, \quad z'_1 = \frac{1}{z_1}, \quad z'_2 = \frac{1}{z_2}, \quad \dots;$$

on a

$$z'_1 = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z'}\right)}.$$

En supposant que m soit le degré de multiplicité du pôle, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{\psi(z')}{z'^m}$$

et $\psi(z')$ est holomorphe, ainsi que son inverse, dans l'intérieur

d'un cercle C entourant le point $z' = 0$: j'ai d'ailleurs

$$z'_1 = \frac{z'^m}{\psi(z')}.$$

Le point $z' = 0$ est un point limite pour la substitution $\left[z', \frac{z'^m}{\psi(z')}\right]$, pourvu que pour $z' = 0$ le module de la dérivée

$$m\frac{z'^{m-1}}{\psi(z')} - \frac{z'^m \psi'(z')}{[\psi(z')]^2}$$

soit inférieur à l'unité. Si $m > 1$, il est nul; si $m = 1$, ce module est égal à mod $\frac{1}{\psi(0)}$, c'est-à-dire au module de $\frac{1}{\varphi'(\infty)}$; il faut donc que le module de $\varphi'(\infty)$ soit supérieur à l'unité.

Dans le cas où $\varphi'(\infty)$ a un module supérieur à l'unité, il existe dans le plan où se meut la variable z un cercle C_∞, tel que tout point z extérieur à ce cercle conduit à l'infini, par voie de convergence régulière.

Cette expression de convergence régulière vers l'infini s'explique assez par ce qui précède, et n'a rien de choquant si l'on fait usage de la représentation à l'aide de la sphère.

Ajoutons que, tandis que $\varphi_p(z)$ croît indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi_p(z)}{\varphi'(\infty)^p}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, pourvu que $\varphi'(\infty)$ ne soit pas infini.

15. Enfin, l'infini peut faire partie d'un groupe circulaire. En effet, soit le groupe

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{h-1};\ x_h,\ x_{h+1},\ \ldots,\ x_{\mu-1}.$$

Il peut arriver que x_{h-1} soit un pôle de $\varphi(z)$, il suffit que l'infini soit un point ordinaire de $\varphi(z)$, tel que $\varphi(\infty) = x_{h+1}$. La représentation à l'aide de la sphère permet, dans ce cas comme dans le précédent, de ramener l'étude de l'infini à celle d'un point quelconque de la sphère. Au lieu de l'intérieur d'un cercle C_{x_h}, nous aurons à en considérer l'extérieur.

VI. — Exemples.

16. Je donnerai quelques exemples des propositions générales qui précèdent.

Une substitution linéaire (z_1, z) peut toujours se définir par la relation

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = K \frac{z - a}{z - b},$$

pourvu que les deux points doubles a et b soient distincts : on peut alors supposer que le module de K est inférieur à l'unité. Si l'on appelle c la valeur de z qui rend z_1 infini, on a alors

$$\frac{c - a}{c - b} = \frac{1}{K};$$

donc $\text{mod}(c - a) > \text{mod}(c - b)$, et *la racine a est la plus éloignée du pôle de z_1*. Les deux racines a et b appartiennent à l'indice 1, et il n'y a pas de racine appartenant à un indice supérieur. En différentiant, on trouve

$$\frac{dz_1}{dz} = K\left(\frac{z_1 - b}{z - b}\right)^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{z_1 - a}{z - a}\right)^2.$$

Pour $z = a$ il vient

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_a = K;$$

pour $z = b$

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_b = \frac{1}{K}.$$

Le *point a* est donc *seul* un point limite.

Si le module de K est égal à l'unité, on a

$$K = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \frac{z_p - a}{z_p - b} = e^{ip\theta} \frac{z - a}{z - b};$$

et, à moins que θ ne soit commensurable avec π, il n'y a pas de limite. Si θ est commensurable avec π, on retombe sur z après un nombre fini d'opérations. J'ai écarté ce cas dans mes recherches.

Enfin, reste le cas où les deux racines a et b coïncident ; on peut écrire alors

$$\frac{1}{z_1 - a} = \frac{1}{h - a} + h:$$

on a

$$\frac{dz_1}{dz} = \left(\frac{z_1 - a}{z - a}\right)^2,$$

qui, pour $z = a$, donne l'unité. Il y a doute dans ce cas. Mais on voit tout de suite que

$$\frac{1}{z_p - h} = \frac{1}{z - a} + ph,$$

qui pour p infini donne limite $(z_p - a) = 0$. Le point double est donc un point limite pour tous les points du plan.

17. Je prendrai encore l'exemple de la substitution (z_1, z) définie par l'équation

$$z_1 = -\frac{1}{z}\,\frac{mz^2+1}{z^2+m}.$$

Cette substitution trouve une application dans le mode de correspondance par lequel on associe à un point d'une conique à centre le point où la normale à la conique rencontre pour la seconde fois la courbe.

Les racines appartenant à l'indice 1 sont données par l'équation

$$(z^2+m)^2 = m^2 - 1.$$

Aucune d'elles n'est limite.

Pour avoir celles qui appartiennent à l'indice 2, il suffit d'envisager les deux équations

$$z_1 = -\frac{1}{z}\,\frac{mz^2+1}{z^2+m}, \quad z = -\frac{1}{z_1}\,\frac{mz_1^2+1}{z^2+m}.$$

De ces équations, on tire $z_1^2 - z^2 = (z_1 - z)(z_1 + z) = 0$; la relation $z_1 - z = 0$ donnerait les racines appartenant à l'indice 1, ce qui est conforme au théorème I du n° 4. La relation $z_1 + z = 0$ conduit à l'équation $z^4 - 1 = 0$ et, par suite, aux deux groupes circulaires

$$\begin{cases} z = 1, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} z = i, \\ z = -i. \end{cases}$$

En posant

$$m = a + ib,$$

on trouve que le premier couple est limite si $a > 1$: c'est au contraire le second si $a < -1$. Aucun n'est limite si a est compris entre $+1$ et -1; il y a doute pour $a = \pm 1$.

18. Je ne puis passer sous silence l'application de cette théorie à la règle de Newton pour le calcul approché des racines.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe; prenons

$$\varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)};$$

on a

$$\varphi'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}.$$

Toutes les racines simples de $f(z) = 0$ sont des points limites à convergence régulière.

Il en est d'ailleurs de même pour les racines multiples, car dans l'expression de $\varphi'(z)$ on trouve, en prenant le rapport des dérivées $(2p-2)^{\text{ièmes}}$ des deux termes de la fraction, pour une racine multiple d'ordre p de $f(z)$,

$$\varphi'(z) = \frac{1}{p}.$$

19. Si l'on prend, au lieu de $f'(z)$, une fonction holomorphe $g(z)$, la substitution $\varphi(z) = z - \frac{f(z)}{g(z)}$ admettra pour point limite tout zéro de $f(z)$ pour lequel le module de $1 - \frac{f'g - g'f}{g^2}$ sera inférieur à l'unité.

Dans cette hypothèse, si cette inégalité du module est vérifiée pour tous les zéros de $f(z)$, et que ceux-ci soient simples, enfin si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux polynômes à coefficients réels, il est assez curieux de remarquer que l'on peut remplacer $f'(z)$ par $g(z)$ dans la formation de la suite de Sturm. La raison en est que, pour toute racine réelle de $f(z)$, le rapport $\frac{f'(z)}{g(z)}$ est forcément positif.

20. Grâce à des coupures, on peut faire en sorte qu'une fonction algébrique de la variable z n'ait en chaque point du plan qu'une valeur, et se comporte comme une fonction uniforme. On peut appliquer à ce cas la théorie générale.

Je prends pour exemple la substitution (z, z_1), où z_1 est lié à z par l'équation

$$z_1^p - z - a = 0.$$

Si l'on introduit une coupure indéfinie issue du point critique $-a$, une fois fixée une valeur de z_1 pour une valeur de z, en s'assujettissant à ne rencontrer jamais la coupure, l'équation précédente définit une valeur unique pour z_1 en chaque point du plan.

Ainsi, que a soit réel et positif, de même que z, nous pourrons prendre pour z_1 la valeur réelle positive racine de l'équation et

poser alors

$$z_1 = \sqrt[p]{z+a},$$

puis

$$z_2 = \sqrt[p]{z_1+a} = \sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+z}},$$

puis

$$z_3 = \sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+\sqrt[p]{a+z}}}, \quad \ldots.$$

D'après la théorie générale, le point limite doit être la racine positive de l'équation

$$z^p - z - a = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que c'est ce qui a lieu.

Si l'on appelle x cette quantité limite, on a pour $z = x$

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{1}{px^{p-1}}.$$

La racine x est plus grande que l'unité, il en résulte que $\frac{1}{px^{p-1}} < 1$. Conformément au théorème du n° 8, le produit

$$(px^{p-1})^k(z_k - x)$$

tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque k croît indéfiniment.

Si, en particulier, on fait $p = 2$, $a = 2$, ce théorème conduit à l'expression bien connue de π, que l'on rencontre dans la méthode des périmètres.

VII. — Essai d'extension a des substitutions plus générales.

21. Il reste encore bien des points que nous n'avons pas abordés : je citerai d'abord le cas douteux que j'ai signalé dans le n° 7, et la question des points limites à convergence irrégulière autres que ceux que j'ai étudiés. Enfin, au point de vue géométrique, la division du plan en régions d'après les points limites auxquels conduisent ses divers points reste à être traitée tout entière.

22. Envisagée au point de vue géométrique, la question que j'ai traitée est susceptible d'une grande généralisation.

Si l'on pose

$$x_1 = \varphi(x, y),$$
$$y_1 = \psi(x, y),$$

φ où et ψ sont des fonctions uniformes des variables réelles x et y,

on a le mode le plus général de transformation qui fait correspondre un point $P_1(x_1, y_1)$ à un point $P(x, y)$. On peut même alors étendre la théorie à un champ à plusieurs variables, et chercher les points limites.

Je prendrai trois variables et les trois fonctions uniformes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x, y, z), \\ y_1 &= \psi(x, y, z), \\ z_1 &= \theta(x, y, z). \end{aligned}$$

Soit $M(a, b, c)$ un point limite, ρ la distance de ce point au point $P(x, y, z)$, ρ_1 sa distance au point $P_1(x_1, y_1, z_1)$, ... Je dirai que le point P_k, pour k infini, tend régulièrement vers le point M si la suite

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_k, \ldots$$

converge régulièrement vers zéro.

En écartant le cas où M serait un point de discontinuité par les fonctions φ, ψ, θ, on trouve que (a, b, c) vérifient les équations simultanées

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(x, y, z), \\ y = \psi(x, y, z), \\ z = \theta(x, y, z). \end{cases}$$

En posant

$$x_k = a + \alpha_k, \quad y_k = b + \beta_k, \quad z_k = c + \gamma_k,$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial a}\alpha_k + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\beta_k + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\gamma_k + \Phi(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k), \\ \beta_{k+1} &= \frac{\partial\psi}{\partial a}\alpha_k + \frac{\partial\psi}{\partial b}\beta_k + \frac{\partial\psi}{\partial c}\gamma_k + \Psi(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k), \\ \gamma_{k+1} &= \frac{\partial\theta}{\partial a}\alpha_k + \frac{\partial\theta}{\partial b}\beta_k + \frac{\partial\theta}{\partial c}\gamma_k + \Theta(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = {} & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\alpha_k + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\beta_k + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\gamma_k\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\alpha_k + \ldots\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\alpha_k + \ldots\right)^2, \end{aligned}$$

on a

$$\rho_{k+1}^2 = F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) + \Lambda(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k).$$

F est une forme quadratique ternaire de α_k, β_k, γ_k et Λ une forme cubique dont les coefficients sont des fonctions entières de ces

mêmes quantités. On a

$$\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)^2 = \frac{F}{\rho_k^2} + \frac{A}{\rho_k^2}.$$

Lorsque α_k, β_k, γ_k tendent vers zéro, on a

$$\lim\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)^2 = \lim\frac{F}{\rho_k^2} = \lim\frac{F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{F(\alpha_k^2, \beta_k^2, \gamma_k^2)}.$$

Soient ξ, η, ζ des variables finies proportionnelles à α_k, β_k, γ_k. Je forme le rapport

$$\frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Il faut que la limite de ce rapport soit au plus égale à l'unité : donc, si dans tous les cas ce rapport est inférieur à l'unité, on sera sûr que $\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$ tend vers une limite inférieure à 1.

Or ce rapport est au plus égal à la plus grande des racines de l'équation en S. Si donc les racines de l'équation en S sont toutes inférieures à l'unité en valeur absolue, on est sûr que le rapport $\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$ tend vers une limite inférieure à l'unité.

On est dès lors conduit à ce théorème, que j'énonce sans démonstration :

Si le point (a, b, c) *vérifie les équations* (1) *et si de plus la forme quadratique* $F(\xi, \eta, \zeta) - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$ *est définie et négative, il existe une sphère* S *de centre* $M(a, b, c)$, *telle que tout point intérieur conduit au point* M *par convergence régulière.*

On applique aisément ce théorème à la transformation homographique de l'espace qui conserve le plan de l'infini.

Enfin, on reconnaîtra la possibilité de définir aussi dans ce cas des groupes circulaires limites, comme je l'ai fait dans ces recherches.

ALBERT GIRARD, DE SAINT-MIHIEL;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Un des géomètres les plus remarquables du commencement du XVIIe siècle a été Albert Girard, que les historiens des Mathématiques et les biographes considèrent comme Hollandais. Ses Ouvrages, écrits en français, ont été de fait publiés à Leyde et à la Haye de 1625 à 1634, et il vivait à cette époque dans les Pays-Bas, où il était au service des États généraux, probablement comme ingénieur, ainsi que l'avait été avant lui Simon Stevin, de Bruges.

C'est dans l'édition de 1634 (Elzevir, Leyde) des *Œuvres Mathématiques* de ce dernier, édition revue, corrigée et augmentée par Albert Girard, mais parue seulement un an après sa mort, que se trouvent les seules données historiques que l'on possède sur son compte. La lettre dédicatoire, adressée aux États généraux et au prince d'Orange (Frédéric de Nassau) débute ainsi :

> Messeigneurs, voici une pauvre veuve avec onze enfants orphelins, auxquels le mari et père, décédé il y a un an, n'a laissé qu'une bonne réputation d'*avoir fidèlement servi* et employé tout son temps à la recherche des plus beaux secrets de Mathématiques; ayant été ravi lorsqu'il projetait d'en laisser quelques monuments utiles à la postérité et de sa propre invention.

Mais une Note d'Albert Girard (vol. IV, p. 482) sur les engrenages :

> Étant ici en pays étrange, sans Mœcenas, et non sans pertes, avec une grande famille, je n'ai pas le loisir, ni le pouvoir d'escrire ici tout ce qui y pourrait estre convenable,

nous apprend formellement qu'il était étranger dans les Pays-Bas ([1]). Il est clair que son pays d'origine ne peut être cherché en dehors de la Belgique ou de la France.

2. Notre géomètre s'intitule d'ailleurs constamment : Albert Girard, samielois, mathématicien. Terquem a déjà ([2]) traduit

---

([1]) Cette remarque paraît avoir été faite pour la première fois par M. Vorsterman van Oijen (*Bullettino Boncompagni*, t. III, 1870, p. 360).

([2]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XII (1853), p. 195. Je dois ce renseignement à l'obligeance de M. Hoüel.

Samielois par « de Saint-Mihiel », mais sans justifier en rien cette traduction. Quelque autorité que pût lui donner l'origine lorraine de Terquem, la démonstration restait à faire lorsque la même identification me vint à l'esprit.

Contre mon attente cependant, il me fut impossible de trouver, en quelque endroit que je pusse imaginer de le chercher, l'emploi du vocable *Samielois* pour désigner les habitants de Saint-Mihiel. Toutes mes tentatives furent vaines jusqu'à ce que M. Victor Egger me signalât l'existence de livres imprimés en latin à Saint-Mihiel par les Du Bois, de 1613 à 1630, et portant comme indication de lieu *Samieli in Lotharingia* ou *Samieli* (¹).

Je dois les renseignements qui suivent à la complaisance de M. Lallement, vice-président du tribunal civil de Saint-Mihiel.

Les orthographes Saint-Miel, Sainmiel, Saimmiel sont fréquentes au XVIIᵉ siècle et représentent la prononciation locale actuelle. Dans le patois, la diphthongue *ai* se prononce comme dans *ait*.

Les actes de mariage et de décès n'existent pas à Saint-Mihiel pour la période qui nous occupe; ceux de baptême commencent au 6 mai 1576. De cette époque au 1ᵉʳ janvier 1610 on ne trouve (11 octobre 1595) qu'un Girard (Humbert), fils de Jean, dont le père a exercé comme notaire de 1597 à 1632. Le nom de Girard est au reste relativement rare dans le pays, tandis que celui de Gérard est très commun.

On doit signaler un Jean Girard de Vigneulles (à 15ᵏᵐ de Saint-Mihiel) qui signa en 1560, avec les huguenots de Saint-Mihiel, une pétition pour le libre exercice de la religion réformée.

3. Il ne peut plus être mis en doute qu'en revendiquant avec persistance au sein des Pays-Bas la qualité de Samielois, Albert Girard ne jetât comme de lointains appels à la patrie dont les événements l'avaient séparé, et que cette patrie ne fût pour lui Saint-Mihiel, qu'il soit né d'ailleurs dans la ville même ou dans les environs, ce qu'on ne peut guère décider aujourd'hui. Aucune autre ville ne peut se prêter à l'identification du vocable, et s'il ne semble représenter qu'une orthographe prétentieuse de certains lettrés, il

(¹) Les Du Bois étaient des imprimeurs de Verdun qui fondèrent une succursale à Saint-Mihiel. Dans un des Ouvrages en question, la cour des grands jours du Barrois est appelée *Suprema Somiellana*.

devait être à cette époque compris sans hésitation par tous les compatriotes d'Albert Girard.

L'absence de son nom dans les actes de baptême de la ville ne doit pas étonner. On peut l'expliquer de trois façons :

Ou Albert Girard était né dans une paroisse des environs de Saint-Mihiel, hypothèse qu'il est aussi difficile de réfuter que d'établir, à moins qu'un heureux hasard n'apporte quelque lumière sur ce point.

Ou bien il était né avant 1576; il serait mort ainsi à plus de cinquante-sept ans. Cette supposition ne présente rien de matériellement impossible; je ne suis toutefois guère porté à l'admettre. Les textes que nous avons indiqués semblent montrer qu'il est mort dans la force de l'âge, et que ses onze enfants étaient encore relativement jeunes. J'admettrais volontiers qu'il est mort dans les environs de la cinquantaine, qu'il était né, par suite, de 1580 à 1590.

Ou bien enfin les parents d'Albert Girard étaient huguenots et il n'a pas été baptisé suivant les rites catholiques. Il est à peu près certain de fait qu'il appartenait à la religion réformée, et que ce fut là un des principaux motifs qui le firent s'expatrier pour chercher dans les Pays-Bas un asile qui ne semble pas avoir répondu à ses espérances. Il y avait à cette époque à Saint-Mihiel et dans les environs un grand nombre de protestants dont beaucoup quittèrent le pays à la suite des édits des ducs de Lorraine. Le premier de ces édits est du 19 septembre 1572; il semble que l'expatriation d'Albert Girard ait été très postérieure et qu'il n'ait quitté son pays que déjà parvenu à l'âge d'homme, peut-être déjà marié.

Qu'il me suffise d'avoir contribué pour ma faible part à restituer à une ville de notre Lorraine un mathématicien dont la haute valeur n'est pas contestable. On sait que, dans son *Invention nouvelle en Algèbre* (1629), il a été le précurseur de Descartes pour l'interprétation des quantités négatives; que, d'autre part, il a achevé (Leyde, 1625) pour les deux derniers Livres une traduction française de Diophante commencée par Simon Stevin sur le texte latin de Xylander, travail qui, à cette époque, présentait de hautes difficultés. Je me propose du reste de revenir sur ses écrits à une autre occasion.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME VII.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.



AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 66

[illegible] Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME VII. — ANNÉE 1883.
(TOME XVIII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT ([1]).

Tome XC; 1880.

Frobenius (*G.*). — Relations entre les fractions réduites de séries procédant suivant les puissances de la variable. (1-17).

Le problème de déterminer une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur aient un degré prescrit et qui coïncide avec une fonction donnée pour le plus grand nombre possible de valeurs données a été résolu pour la première fois par Cauchy (*Analyse algébrique*, p. 528) et plus tard, mais plus amplement (*Journ. für Math.*, t. XXX), par Jacobi, qui a enseigné à représenter le numérateur et le dénominateur de diverses manières sous la forme de déterminants. Cependant il n'a pas abordé les relations qui ont lieu entre plusieurs fractions de ce genre dont les numérateurs et les dénominateurs sont de degrés différents. Ce sont les relations les plus importantes de cette sorte que M. Frobenius a réunies succinctement dans ce Mémoire; mais, pour plus de simplicité, il s'est borné au cas où les valeurs données de la variable coïncident toutes en une seule (JACOBI, *loc. cit.*, p. 149; voir aussi KRONECKER, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1878, p. 97).

§ I. Sur les fractions réduites de séries procédant suivant des puissances. —

([1]) Voir *Bulletin*, V_2, 193.

§ 2. Relations algébriques entre les numérateurs, les dénominateurs et les restes des réduites. — § 3. Sur les réduites de la série de Taylor. — § 4. Intégration de l'équation différentielle $C_{\alpha\beta} = 0$. — § 5. Développement en fractions continues de séries procédant suivant des puissances.

Weingarten (J.). — Contribution à la théorie des surfaces isostatiques. (18-33).

Dans ses Leçons sur les coordonnées curvilignes, Lamé a énoncé la proposition qui dit qu'un solide élastique en équilibre peut être décomposé par trois familles de surfaces orthogonales, en parallélépipèdes infiniment petits dont les faces sont sollicitées normalement par les forces élastiques. Lamé a donné le nom de *surfaces isostatiques* à ces familles de surfaces. L'erreur inhérente à cette proposition n'est pas difficile à découvrir. Cependant un intérêt particulier s'attache à l'erreur de l'éminent mathématicien; car, selon ses propres paroles, c'est de cette propriété, si nettement caractérisée, que lui est venue l'idée des coordonnées curvilignes. Il semble qu'il n'existe pas de recherches, publiées jusqu'à présent, sur les conditions dont dépend l'existence de surfaces isostatiques. Les développements de M. Weingarten ont établi ces conditions et signalent quelques questions qui s'y rattachent de plus près. M. Weingarten montre en particulier que les conditions nécessaires et suffisantes consistent en ce que trois certains invariants s'évanouissent. Ces trois équations qui sont du premier ordre aux différentielles partielles par rapport aux grandeurs qu'elles contiennent, et linéaires par rapport aux quotients différentiels de ces mêmes grandeurs, font l'objet de l'adroite analyse de M. Weingarten.

Kirchhoff (G.). — Remarques sur le Mémoire de M. Voigt : *Théorie du point lumineux*. (34-38).

Dans ses *Leçons sur la Physique mathématique* (*Mécanique*), M. Kirchhoff a traité (Leç. XXIII, § 4) le mouvement causé par les mouvements infiniment petits d'une sphère rigide contenue dans un fluide compressible. Ce problème est très semblable à celui qu'a résolu M. Voigt dans son Mémoire [*Journ.*, t. LXXXIX; *Bulletin*, V_2, p. 199)]. La méthode employée par M. Kirchhoff dans son livre s'applique aussi à la solution du problème proposé par M. Voigt et est beaucoup plus expéditive que le chemin que cet auteur a pris : c'est ce que M. Kirchhoff fait voir par sa Note.

Geiser. — Sur un théorème fondamental de la Géométrie cinématique de l'espace. (39-43).

Il s'agit du théorème donné par M. Mannheim, p. 261 de son *Cours de Géométrie descriptive, comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique :* « Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre de ses points restent sur quatre surfaces données, pour une position quelconque de cette figure, les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points rencontrent deux mêmes droites. » Ce théorème, publié par M. Mannheim au *Journ. de Math.* de M. Liouville (2ᵉ série, t. XI, 1866), appartient à Schönemann qui l'avait fait insérer en 1855 aux *Monatsberichte der Berliner Akademie.* — M. Geiser ajoute à cette Note historique une démonstration analytique du

théorème que Schöneman s'était borné à énoncer sans démonstration, mais dont il avait tiré d'importantes conséquences.

Schoenemann. — Sur la construction de normales et de plans normaux de certaines surfaces et lignes courbes. (44-48).

Réimpression de la publication citée par M. Geiser dans la Note précédente.

Korteweg (*Dr. J.*). — Sur la loi pondéromotrice élémentaire. (49-70).

Les lois des effets pondéromoteurs et électromoteurs entre des courants fermés trouvent leur expression la plus simple dans les formules potentielles de M. F. Neumann et peuvent être considérées comme démontrées par l'expérience; au contraire, il est toujours encore possible de concevoir sur les deux lois élémentaires de l'Électrodynamique, la pondéromotrice et l'électromotrice, des hypothèses différentes et qui s'excluent l'une l'autre, mais qui peuvent être envisagées comme également autorisées, eu égard à l'explication des faits observés jusqu'à présent. M. Korteweg s'est proposé, dans le Mémoire actuel, de rechercher jusqu'où s'étend cette indétermination pour la loi pondéromotrice, c'est-à-dire d'établir une théorie générale, renfermant des fonctions indéterminées et qui ne se permet pas d'autres hypothèses que celles qui ont été examinées par l'expérience ou qui, à cause de leur probabilité intrinsèque, ont été reçues dans toutes les théories établies jusqu'à ce jour. Une addition d'hypothèses convenables pourra donc transformer cette théorie générale en une quelconque des théories plus spéciales. MM. Stefan et Maxwell, qui ont tenté d'établir une telle théorie, n'ont pas fait attention à la possibilité de couples de forces entre des éléments de courants. Depuis l'établissement de la théorie potentielle de M. Helmholtz où entrent ces effets de couples, on a signalé cette lacune dans le travail précieux de M. Stefan, et Margules, qui a essayé de la remplir, a omis un des effets possibles des couples.

§ 1. La loi élémentaire pondéromotrice. — § 2. Effet pondéromoteur entre des courants fermés. — § 3. Effet pondéromoteur qu'un courant fermé exerce sur un élément de courant. — § 4. Déduction des théories plus spéciales.

Fuchs (*L.*). — Extrait d'une lettre adressée à M. Borchardt. (71-73).

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur une équation différentielle du second ordre. (74-79).

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur une propriété des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (80-82).

Grafle. — Déduction rapide des théorèmes d'addition pour les intégrales elliptiques en partant de l'équation $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$. (83-84).

Sturm (*J.*). — Sur les courbes planes du troisième ordre. (85-101).

Dans son Mémoire *Sur les formes des courbes du troisième ordre* (t. LXXV du Journ.; *Bulletin*, IV$_1$, p. 90), M. Durège met à profit le théorème : « S'il y a sur elles des points d'où l'on peut tirer quatre tangentes réelles, il y en a aussi où ces tangentes sont toutes imaginaires. » Pour le démontrer, il suppose connus les tr[illegible]stèmes de points conjugués et la génération de la courbe du troisi[illegible] par deux involutions projectives de rayons : ce sont des propriétés [illegible]pprend qu'après une étude profonde de la courbe. M. Sturm donne au [illegible] une démonstration qui ressort immédiatement de la génération de la courbe au moyen de faisceaux projectifs de rayons et de sections coniques, génération découverte par Chasles et qui paraît être la plus naturelle. De plus, l'auteur développe, au n° 2, un supplément de la démonstration, due à M. Salmon, pour la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la courbe; car, si excellente que soit cette démonstration, elle ne prouve la constance que pour les points qui appartiennent à la même branche. Les n°s 3 et 4 donnent enfin des considérations purement géométriques et extrêmement simples sur des propriétés, pour la plupart connues, des courbes du troisième ordre : réalité des points d'inflexion, des tangentes issues d'un point de la courbe, relation entre le point de contact et le point tangentiel.

Franke. — **Sur les équations de troisième et de quatrième degré. (102-108).**

Koenigsberger (L.). — **Remarques générales sur le théorème d'Abel (109-163).**

Soit v une fonction rationnellement logarithmique des grandeurs $a, a', a'', \ldots$, où $a, a', a'', \ldots$ sont certains paramètres; on peut mettre le théorème d'Abel sous la forme

$$(1) \qquad \int^{x_1} f(x,y)\,dx + \int^{x_2} f(x,y)\,dx + \ldots + \int^{x_\mu} f(x,y)\,dx = v,$$

$f(x,y)$ étant une fonction rationnelle de x et de la fonction y de x. Envisageons ce théorème d'abord sous le point de vue fourni par la théorie générale de la transformation des intégrales abéliennes : il fournit alors une relation spéciale d'intégrales semblables, qui correspond à l'équation de transformation linéaire dans les intégrales, ou bien le théorème d'Abel peut être considéré comme une combinaison algébrique, et unique dans sa forme, des valeurs de l'intégrale d'une fonction algébrique pour différentes limites d'intégration liées algébriquement l'une à l'autre et d'intégrales plus simples (les fonctions discontinues de celles-ci), pour des arguments composés algébriquement de ces limites d'intégration, et ainsi le théorème peut se prêter à de vastes recherches; car, si l'on envisage l'intégrale $\int f(x,y)\,dx$, où y désigne une fonction algébrique irréductible de x, comme intégrale de l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} = f(x,y),$$

le théorème d'Abel fournit une proposition sur une relation algébrique d'une même intégrale de l'équation différentielle (2) pour divers arguments liés algébriquement les uns aux autres, et d'une intégrale des équations différen-

tielles

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \psi(a, a', a'', \ldots), \frac{\partial z}{\partial a'} = \psi_1(a, a', a'', \ldots), \frac{\partial z}{\partial a''} = \psi_2(a, a', a'', \ldots), \ldots,$$

où les fonctions ψ dénotent des fonctions rationnelles satisfaisant à la condition d'intégrabilité, des grandeurs a, et où celles-ci sont liées d'autre part aux premiers arguments. Sous ce point de vue, le théorème d'Abel permettra une généralisation des relations analytiques, et c'est pour développer ses études sur ce sujet que M. Königsberger a publié ce travail, qui se rattache à un autre Mémoire du même auteur. « Sur des relations algébriques entre des intégrales d'équations différentielles distinctes » (t. LXXXIV; *Bulletin*, III_2, p. 113).

Netto (*E.*). — Contribution à la théorie des discriminants. (164-185).

Voici comment M. Kronecker s'est exprimé sur ce travail (t. XCII du Journ., p. 119 et 120) : « Si des variables $\mathfrak{R}$ se présentent dans le domaine de rationnalité, la forme discriminante contiendra toujours des formes de la plus haute multiplicité comme diviseurs multiples; elles forment « les singularités » de la forme discriminante à la recherche desquelles s'attachent le plus grand intérêt et aussi de grandes difficultés. Voilà pourquoi nous insistons d'autant plus sur un travail publié récemment par M. Netto; ce Mémoire traite les problèmes algébriques, ainsi que nous venons de le faire ici, selon les principes de l'Arithmétique, et l'on y trouve déjà une série de résultats développés. Pour en exposer la portée pour la théorie générale des grandeurs algébriques, il faut reprendre les genres issus d'un domaine de rationnalité $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ qui font le sujet des élucidations du § 12. Les grandeurs entières algébriques de ces genres sont fonctions entières des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et conséquemment fonctions algébriques des fonctions élémentaires symétriques, désignées par $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ des mêmes variables x. Dans chacun de ces genres il existe des systèmes fondamentaux qui ne dépendent que d'un nombre aussi grand d'éléments que l'ordre du genre, et cet ordre a été désigné par $\mathfrak{r}$ aussi bien ci-dessus qu'au lieu cité de M. Netto. La forme discriminante sera donc remplacée par un « discriminant du genre », et celui-ci est une puissance du discriminant de l'équation

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \ldots \pm \mathfrak{f}_n = 0,$$

dont l'exposant se trouve déterminé dans le travail de M. Netto. Le discriminant de chaque équation du genre est divisible par ce discriminant du genre, et en outre M. Netto fait voir que chacun des discriminants d'équation contient encore des systèmes de diviseurs ou des formes de plus haute multiplicité comme facteurs qui sont en même temps des diviseurs multiples de la forme discriminante. Si ces résultats de M. Netto se prêtent à être appliqués à l'équation fondamentale introduite ici, comme cela est probable, elles fourniraient des contributions à la connaissance de cette forme primitive $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ qui fait l'objet principal des « développements ci-dessus ».

Faà de Bruno. — Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants. (186-188).

Schröder (*Ernst*). — Sur une détermination singulière d'une fonction par des conditions formelles. (189-220).

Wiener (*Christian*). — Étude géométrique et analytique de la fonction weierstrassienne. (221-252).

M. Weierstrass a démontré cette proposition remarquable : « La fonction

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} b_n \cos a^n x\pi,$$

où x est une variable réelle, a un nombre entier impair supérieur à 1, b une constante positive inférieure à 1, n'a en aucun point un quotient différentiel déterminé tant que la valeur du produit ab ne surpasse pas une certaine limite, les intervalles des x étant choisis d'une manière particulière, essentielle pour la proposition. M. Paul du Bois-Reymond observe là-dessus que certaines singularités n'affectent pas des espèces particulières de nombres qui ne se présentent toujours qu'isolément, mais qu'elles sont réparties uniformément et comme continûment sur le domaine entier des grandeurs de l'argument. Il dit encore dans une Note : « Mainte énigme me semble cachée sous la métaphysique des fonctions weierstrassiennes, et je ne puis me défendre de penser qu'une étude plus approfondie finira par nous amener à une limite de l'intellect semblable à la limite établie dans la Mécanique par les notions de force et de masse. En deux mots, ces fonctions me semblent constituer des séparations de l'espace, non comme les nombres rationnels dans l'illimitément petit, mais dans l'infiniment petit. »

M. Wiener fait l'étude géométrique et analytique de la fonction intéressante et y ajoute une représentation graphique en tant qu'elle est possible pour une ligne possédant dans l'espace fini un nombre infini d'ondulations. La proposition de M. Weierstrass se trouve être vraie en général; cependant, pour quelques endroits spéciaux, il résulte un quotient différentiel déterminé. L'intuition que l'auteur atteint ainsi sert à réfuter la conjecture de M. Paul du Bois-Reymond, qui aurait ouvert à l'inconcevable la porte des Mathématiques.

Craig (*Thomas*). — Distorsion d'une sphère élastique. (253-266).

En cherchant à estimer la déformation que les masses de glaces accumulées aux régions polaires de la Terre produisent dans la surface solide de notre globe, M. Craig fut porté à faire l'étude des distorsions d'une sphère solide élastique sollicitée aux extrémités d'un diamètre par deux forces données, sous l'hypothèse que l'axe ne se raccourcit que légèrement.

Königsberger (*L.*). — Sur des intégrales algébriquement logarithmiques d'équations différentielles linéaires non homogènes. (267-280).

Si l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = y$ (où y est une fonction algébrique de x) possède une intégrale algébrique ou algébriquement logarithmique, celle-ci ou

son logarithmande est représentable comme fonction rationnelle de x et de y. Pris dans ce sens et sous cette forme, le théorème d'Abel permet une extension à des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre quelconque.

Picard (Émile). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (281-302).

Écrivant l'équation de Lamé sous cette forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

où $\operatorname{sn} x$ désigne la fonction elliptique ordinaire de module k, n un entier positif et h une constante quelconque, M. Hermite a montré qu'un système fondamental d'intégrales est formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Des circonstances analogues se présentent pour toute équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques de première espèce dont l'intégrale générale est uniforme. Les équations de ce genre jouissent d'une propriété dont la démonstration fait l'objet de la Ire Partie du travail. M. Picard établit qu'une équation d'ordre m admettra, en général, comme intégrales distinctes m fonctions doublement périodiques de seconde espèce; c'est ce qui arrive pour l'équation de Lamé, quand h est quelconque. Les changements de forme analytique que peuvent subir les intégrales dans certains cas particuliers sont l'objet d'une étude spéciale. Dans la IIe Partie l'auteur considère des systèmes d'équations linéaires simultanées à coefficients doublement périodiques; il étudie en particulier un système du troisième ordre jouissant d'une propriété remarquable, et il termine par une application géométrique de cette étude.

Rosanes. — Contribution à la théorie de la correspondance réciproque. (303-321).

La corrélation de deux plans, établie par une forme bilinéaire ternaire, a fait le sujet de recherches répétées : elles se sont étendues à la question de savoir comment l'on pourrait construire la transformation avec certaines données dont le nombre était suffisant, ou aux problèmes qui concernent la coïncidence des plans mis en correspondance. Mais on ne semble pas avoir fait attention à une autre sorte de propriétés de la transformation générale réciproque, propriétés qui sont remarquables tant par leur simplicité que par leur analogie avec des théorèmes connus de la théorie des sections coniques. Les figures relatives à ces courbes subissent une généralisation en ce sens qu'un élément simple (point, droite) est remplacé par un couple d'éléments dans la coïncidence desquels celles-là prennent leur origine. L'extension ainsi gagnée est encore très propre à faire mieux ressortir certaines propriétés des sections coniques et fournit une nouvelle proposition sur les couples conjugués de points d'une courbe de second ordre. — L'application aux formes quaternaires qui donne des généralisations de propriétés des surfaces de second ordre n'a été faite que dans un cadre plus restreint. — La connaissance de couples de points dépendants tels qu'ils ont été définis dans un Mémoire du même auteur (t. LXXXVIII, *Bulletin*, V_2, p. 107) se trouve complétée par les concepts nouvellement introduits. La construction du sixième couple dépendant de cinq couples est ramenée à un problème simple et connu. Enfin, pour la figure de l'espace de huit couples dépendants de points,

le degré des surfaces qui s'y présentent se déduit maintenant avec facilité, tandis qu'il était alors resté indéterminé.

Bruns (*H.*). — Contribution à la théorie des fonctions sphériques. (322-328).

Dans sa démonstration pour la convergence des séries procédant suivant des fonctions sphériques, M. Dini s'appuie sur ces trois propositions, empruntées à la théorie des fonctions sphériques $P_n(x)$: 1° $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$; 2° les n racines de $P_n(\cos\omega) = 0$ sont toutes réelles, simples et à peu de chose près uniformément réparties sur l'intervalle de 0 à π, d'autant plus uniformément que n est plus grand; 3° $\lim P_n(\cos\omega) = 0$ pour $n = \infty$, non seulement si $\cos\omega$ diffère de ± 1 d'une quantité finie, mais aussi si ω tend avec n croissant suivant un certain mode vers 0 ou vers π. M. Bruns donne des démonstrations très élégantes, élémentaires et rapides de ces propositions sans aucun secours puisé dans la théorie des fonctions sphériques. Ainsi la démonstration de convergence que nous venons de mentionner se simplifie de manière à devenir aussi simple et directe que celle de Dirichlet pour les séries trigonométriques.

Heine (*E.*). — Sur la fonction sphérique $P^n(\cos\gamma)$ pour n infini. (329-331).

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (Extrait d'une lettre adressée à M. Schwarz, de Gœttingue). (332-338).

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa e da Sociedade de Sciencias physicas et naturaes de Bordeaux (¹).

Tome II; 1880.

Bellavitis (*G.*). — Solution trouvée par la méthode des équipollences. (3-6, 1 pl; ital.).

A l'aide de sa méthode des équipollences, M. Bellavitis donne la solution de la question posée dans le Ier volume, page 142, par M. Schiappa-Monteiro, dans les termes suivants : « Trouver un cercle tangent à un cercle donné, qui passe par un point donné A, et dont le centre soit situé sur une droite également donnée CD », et aussi la solution de cette autre question, énoncée page 160

(¹) Voir *Bulletin*, II₂, 185.

du même Volume, ainsi qu'il suit : « Tracer un arc de cercle qui fasse des angles donnés avec deux cercles concentriques connus. »

Da Ponte Horta (*F.*). — **Étude sur le problème proposé au n° 10.** (7-32; 1 pl.).

Voir *Bulletin*, 2e série, p. 188.

Cette suite du travail de M. da Ponte Horta se rapporte : 1° aux lieux symétriques des centres des cercles qui coupent deux cercles donnés sous des angles donnés (p. 7-16); 2° aux lieux des centres des cercles qui coupent une droite donnée sous l'angle α', et un cercle aussi donné sous l'angle α.

Gomes Teixeira (*F.*). — **Sur la décomposition des fractions rationnelles; fin.** (33-41; fr.).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — **Sur un problème de Mécanique appliquée.** (42-45).

Ce problème de Mécanique appliquée consiste à construire une voûte dans une cavité déterminée, sous certaines conditions énoncées.

Craveiro Lopes (*C.-H.*). — **Solution d'un problème proposé.** (46-48).

Cette question peut s'énoncer ainsi : « Étant données trois circonférences dont les centres sont A, B, C, et dont les deux premières ont une corde commune IJ, mener par le point I une transversale qui les rencontre respectivement aux points X, Y et Z, de telle sorte que XZ soit à XY dans le rapport donné $\frac{m}{n}$. »

Schiappa Monteiro (*A.*). — **Question proposée.** (48).

Il s'agit de prouver géométriquement que les lieux H, H' des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes M, N, non situées dans le même plan, ont entre elles un rapport constant $\frac{m}{n}$, sont des hyperboloïdes scalènes ou non de révolution (*sic*).

Bellavitis (*G.*). — **Extrait d'une Lettre à F. Gomes Teixeira.** (49).

Cet extrait d'une lettre, écrite par Bellavitis de Padoue au Dr Gomes Teixeira de Coïmbre, est relatif à l'application de la méthode des équipollences au beau théorème énoncé, p. 47, par M. Craveiro Lopes.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — **Question proposée, n° 12.** (49).

Cette question est la suivante : « Deux points étant donnés, déterminer avec le compas ordinaire le point milieu de la distance qui les sépare. »

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — **Sur la question proposée n° 11.** (50-53).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Recherches synthétiques et analytiques sur le cercle variable assujetti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles également donnés. (54-64, 130-137, 174-182; fr.).

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$. (65-67).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Sur l'aire latérale d'un coin conique. (68-76, 81-96, 110-125).

Il s'agit de calculer élémentairement l'aire latérale et le volume d'un coin conique, déterminée par l'intersection d'un cône de révolution avec deux plans, l'un de ces plans étant perpendiculaire à l'axe de révolution. (C'est la question proposée à la page 176 du Ier volume du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Question proposée n° 13. (76).

Il s'agit de déterminer le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables, de bases données AD et BC.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur l'équation du second degré. (77-80).

Bellavitis (*G.*). — Résolution de la question proposée n° 12. (86).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Solution de la question proposée au n° 1 du tome I en employant la méthode des équipollences, et comparaison de cette solution avec celle que donne la Géométrie élémentaire. (97-109).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur la question proposée n° 3. (126-129).

On a vu que cette question n° 13 demande de déterminer le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables et de bases données AD et BC.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles de second ordre. (138-153).

Birger-Hansted. — Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres. (154-164; fr.).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème. (165-166).

Ce problème est relatif aux arrangements des lettres dans deux cadenas à secret.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur une formule intégrale. (167-172).

Dans ce Mémoire, M. Martins da Silva, sous-lieutenant élève d'artillerie, fait usage d'une formule abélienne et montre qu'il a puisé à bonne source sa connaissance approfondie du Calcul différentiel et intégral.

Birger-Hansted. — Questoes propostas n^{os} **14** e **15**. (173).

Des deux questions envoyées par M. Birger-Hansted, de Copenhague, à son collègue de Coïmbre, la première a trait aux congruences de nombres premiers; la seconde est ainsi formulée : « Étant donnée une figure plane composée d'un hexagone régulier, sur les côtés duquel sont d'autres hexagones réguliers congruents au premier, on veut savoir comment il est possible de couper cette figure par trois lignes droites qui la divisent en parties congruentes ou non congruentes, de telle sorte qu'avec ces parties on puisse former un hexagone régulier. »

Birger-Hansted. — Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, par substitution d'une nouvelle variable. (183-187).

Perott (*J.*) et *Birger-Hansted.* — Questions proposées n^{os} **16** et **17**. (188).

La première de ces deux questions, le n° 16, relative aux nombres, est proposée par M. J. Perott, jeune mathématicien et érudit polonais; la seconde, relative aux carrés magiques, est proposée par M. Birger-Hansted, de Copenhague.

Gomes Teixeira (*F.*). — Notice sur G. Bellavitis. (189-191).

Dans cette brève Notice, M. Gomes Teixeira a appelé l'attention de ses compatriotes sur le savant professeur de l'Université de Padoue, et sur ses immenses travaux que la mort venait d'arrêter, travaux parmi lesquels il faut citer au premier rang sa *Méthode des équipollences,* qui rendit son nom célèbre en Europe. Cette nouvelle méthode de Géométrie que Bellavitis développa plus tard avec tant de succès fut publiée pour la première fois, en 1832, dans les *Annales de l'Institut Lombard-Vénitien.* Un second Mémoire parut en 1837, un troisième en 1843, puis enfin en 1854, dans la collection des Mémoires de la Société italienne des Sciences de Modène, parut sa fameuse *Sposizione del metodo delle equipollenze,* qui donna à la nouvelle méthode une forme définitive, et que M. Laisant fit ensuite passer dans notre langue. Bellavitis était un érudit de premier ordre, un bibliographe distingué, en même temps qu'un éminent mathématicien. Il publiait à Padoue une *Revue des Journaux scientifiques,* qui est précieuse par les indications bibliographiques qu'elle renferme et qui fait autorité grâce à la haute compétence du directeur dans toutes les questions relatives aux diverses parties des Sciences mathématiques.

Tome III; 1881.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Sur une question proposée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Bourget. (3-6).

Cette question est la suivante : « Inscrire un triangle dans un cercle étant aussi donnés les points milieux des arcs sous-tendus par ses côtés. »

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème de Géométrie. (7-15).

Voici l'énoncé de ce problème : « Étant données deux droites qui se coupent en un plan, et un point, tirer par ce point des transversales satisfaisant à cette condition, que les rectangles des segments définis par les droites et le point soient équivalents à un rectangle déterminé. » Ce problème, proposé par Amyot et divers autres auteurs, est considéré comme l'un des problèmes les plus intéressants de la Géométrie élémentaire par M. Marrecas Ferreira, et cet habile géomètre en a fait l'objet d'une étude spéciale et approfondie.

Gomes Teixeira (*Pedro*). — Question proposée n° 18. (16).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur la transformation des fonctions X^n de Legendre en intégrale définie. (17-20).

Gomes Teixeira (*Francisco*). — Leçon préliminaire sur l'origine et sur les principes du Calcul infinitésimal, faite aux élèves de l'Université de Coïmbre. (21-45).

Rocha Peixoto (*A.-F.*). — Sur un théorème relatif aux sections planes du cône de révolution. (46-48).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur la réduction directe d'une classe d'intégrales définies multiples. (49-54).

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur une formule de Wronski. (55-64).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Démonstration d'un théorème de M. Besge. (65-72).

Ce théorème de M. Besge se trouve simplement énoncé, sans démonstration, au tome XIX, novembre 1874, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, l'illustre mathématicien que la France vient de perdre.

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Sur l'histoire de Nonius. (73-80).

Le savant fondateur et éditeur du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques* de Coïmbre reproduit d'abord un article de M. Brensing, de Brême, publié sous le titre de *Nonius ou Vernier?* dans le n° 2889 du journal allemand *Astronomische Nachrichten*; et, pour donner une idée plus complète de l'histoire de Nonius, il fait suivre cet article de la proposition III° du livre rarissime de Pedro Nunez intitulé *de Crepusculis*. C'est dans ce passage de son Livre que le savant portugais présente, pour la première fois, l'instrument qui sert à mesurer les petites parties des lignes droites ou des angles.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Solution de la question proposée n° 17. (81-86).

La question à résoudre était celle-ci : « Étant donné un carré magique formé par n^2 nombres distincts, de combien de manières est-il possible de permuter entre eux ces n^2 nombres sans que le carré magique cesse d'exister? »

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur la théorie des facultés. (87-96).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note de Géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces de second ordre. (97-104).

Gomes Teixeira (*P.*). — Sur quelques théorèmes d'Arithmétique. (105-115).

Birger Hansted. — Question proposée n° **19**. (116).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Question proposée n° **20**. (116).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° **16**. (117-130).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note sur la ligne de striction de l'hyperboloïde. (131-150).

Après les travaux de Michel Chasles et de M. de la Gournerie sur la ligne de striction de l'hyperboloïde, M. Schiappa Monteiro l'étudie à son tour, mais à l'aide seulement de l'Algèbre ordinaire.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° **15**. (151-153).

La question n° 15 était la suivante : « Étant donnée une figure plane composée d'un hexagone régulier, sur les côtés duquel sont six autres hexagones réguliers congruents au premier, on demande de couper cette figure par trois lignes droites qui la divisent en parties congruentes ou non congruentes, de telle sorte qu'avec ces parties on puisse former un hexagone régulier.

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Bibliographie. (154-156).

Dans cette brève revue bibliographique, M. Gomes Teixeira analyse les Mémoires suivants :

1° Note sur l'équation aux dérivées partielles, par M. Paul Mansion, de Gand;

2° Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, par M. Philippe Gilbert, professeur de Mathématiques à l'Université catholique de Louvain;

3° Étude sur le déplacement d'un solide invariable dans l'espace, par M. Luis Porfirio da Motta Pegado;

4° Observations sur le magnétisme terrestre dans l'île de Saint-Thomas, par Guillaume-Auguste de Britto Capello.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Question proposée n° **21**. (156).

Il s'agissait de trouver les solutions entières de l'équation $x^y = y^x$, sans recourir aux logarithmes.

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur une formule d'Euler. (157-176).

Il s'agit d'une formule fondamentale du Calcul intégral qui, si on la prend dans son acception philosophique, constitue, au dire de M. Rodrigues, l'expression algorithmique de l'unité logique entre les trois algorithmes théoriques primitifs et fondamentaux du Calcul intégral.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Note sur la transformation d'une intégrale définie. (177-184).

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur la multiplication des déterminants. (185-186).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° 14. (187-189).

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. (190-191).

L'auteur de cet article bibliographique s'occupe d'un Mémoire très important de M. Paul Mansion, professeur de Mathématiques à l'Université royale de Gand sur l'*Évaluation approchée des aires planes*. Dans ce Mémoire, qui parut d'abord dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, M. Mansion traite des principales formules employées pour évaluer approximativement les aires planes, c'est-à-dire celles de Simpson, de Weddle, de Poncelet, de Parmentier, de Dupain et d'Eugène Catalan.

A. M.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (1). — 3e série.

Tome I; 1882, 1er semestre.

Halphen. — Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques. (5-7).

Nature d'une conique, déterminée par trois de ses points et par son centre: cas spécial de l'hyperbole; conique déterminée par trois de ses tangentes et par son centre.

Resal (*H.*). — Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes. (7-15).

Roulement de deux circonférences (S) et (S'); enveloppe d'une hyperboloïde

(1) Voir *Bulletin*, V_2, 151.

ou d'une épicycloïde; enveloppe de la développante d'une circonférence concentrique à (S); enveloppe d'une circonférence (S_1) dont le centre se trouve sur la circonférence (S). Pour des courbes roulantes quelconques, toute enveloppe est une certaine roulette. Enveloppes d'une normale à une ellipse roulante.

Barbarin (*P.*). — Note sur les coordonnées bipolaires. (15-28).

L'auteur a résumé d'une façon intéressante des notions générales sur les équations des courbes en coordonnées bipolaires sur leurs tangentes et leurs asymptotes. L'article se termine par une étude des ovales de Descartes, des coniques à centre et des ovales de Cassini, dans ce système de coordonnées.

Un abonné. — Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde. (29-31).

Il s'agit d'un théorème de Mac-Cullagh sur la génération de la surface de l'onde au moyen de l'ellipsoïde et d'une propriété des normales.

Ocagne (*M. d'*). — Remarques sur le pendule. (32-33).

Deux propriétés du mouvement d'un pendule circulaire dans un milieu dont la résistance est constante.

Picart (*A.*). — Solution d'un problème de Géométrie. (33-39).

Voici l'énoncé du problème en question :

Dans un triangle isoscèle OAB, *l'angle à la base* A *vaut n fois l'angle au sommet* O; *déterminer le rapport de la base* AB *au côté* OA.

On arrive à l'intégration d'une équation aux différences finies que l'auteur effectue fort élégamment.

Ocagne (*M. d'*). — Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique. (40-45).

M. d'Ocagne considère une certaine transformation tangentielle d'une courbe, étudie les relations entre les rayons de courbure correspondants, et applique sa méthode à la Cinématique plane. Sur ce dernier point, les résultats sont loin de présenter de la nouveauté. Les notations des équipollences les rendraient à peu près intuitifs.

Correspondance. — *M. J. Romero :* intéressante figuration géométrique de propriétés arithmétiques, à l'occasion d'une question de M. Proth (1323).

Les Correspondances émanant d'étrangers devraient bien être mises tout d'abord en français correct par la Rédaction; il y a des formes de langage obscures pour le lecteur français. (46-48).

Questions proposées. — 1382, 1383. (48).

Picart (*A.*). — Note sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (49-62).

L'article en question a pour objet de démontrer géométriquement quelques-unes des plus importantes propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Cependant, l'auteur ne craint pas d'y appliquer également l'analyse, ce qu'il fait avec beaucoup d'habileté. Les lignes géodésiques passant par un ombilic sont l'objet d'une étude toute spéciale.

Somme toute, il y a là un résumé fort intéressant de toutes les principales propriétés dont il s'agit avec des démonstrations fort élégantes.

Weill. — De l'involution de plusieurs points sur une conique. (62-79).

Par la considération de l'involution de trois points sur une conique, l'auteur arrive à déterminer tout d'abord la condition pour que deux coniques soient *capables* d'un triangle inscrit et circonscrit. De là, il passe ensuite à l'examen de l'hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques, puis il énonce un certain nombre de propriétés nouvelles sur ces questions, dont il s'est occupé depuis longtemps avec une prédilection véritable et auxquelles les coordonnées tangentielles s'appliquent heureusement.

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1881. — Énoncé des conditions d'admissibilité : 1° sur un sujet de licence; 2° sur les Mathématiques spéciales; 3° sur les Mathématiques élémentaires. Énoncés des comparaisons finales : 1° sur un sujet de licence; 2° de Calcul; 3° sur la Géométrie descriptive. Énoncés de leçons : 1° sur les Mathématiques élémentaires; 2° sur les Mathématiques spéciales. (79-85).

Questions proposées pour l'admission à l'École Polytechnique danoise. Énoncés de l'année 1872 à l'année 1879 inclusivement. (85-87).

Compositions données aux examens de licence dans les différentes Facultés de France, en 1880. Énoncés des Facultés de Marseille, Besançon, Bordeaux, Grenoble, Lyon, Montpellier, Nancy, Poitiers, Toulouse, Rennes, Clermont et Dijon (session de juillet) et des Facultés de Marseille et Besançon (session de novembre), (87-90, 133-140).

Bibliographie. — Traité de Géométrie analytique, par M. H. Picquet, capitaine du génie, répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, secrétaire de la Société Mathématique de France. 1re Partie, Géométrie analytique à deux dimensions, 1 vol. gr. in 8°; préface de l'auteur. (95-96).

Rouché (E.). — Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite. (97-98).

Méthode nouvelle, simple en théorie et offrant de grands avantages au point de vue graphique.

Dufau (*H.*).— Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique. (99-102).

L'auteur déduit de la propriété fondamentale de la polaire le théorème de Pascal, puis celui de Brianchon, et cela par un raisonnement géométrique élémentaire.

Antomari (*X.*). — Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques. (102-109).

D'après la première de ces propriétés, une conique peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées normalement. D'après la seconde, c'est le même lieu géométrique, les distances au cercle étant comptées sous un angle constant.

Laquière. — Sur un théorème de Pappus; extrait d'une Lettre. (110).

Sur le centre de gravité d'un système de masses égales parcourant les côtés d'un polygone fermé.

Pomey (*J.-B.*). — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1881. (111-113).

Lieu géométrique relatif à un cylindre parabolique.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1881. (114-117).

Problème relatif à la courbe du troisième ordre $27y^2 = 4x^3$.

Cartier (*H.*). — Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1880. (118-122).

Lieux géométriques relatifs à une ellipse et à un cercle concentrique.

Lez (*H.*). — Concours d'admission à l'École Centrale en 1880 (première session); solution de la question proposée. (122-126).

Problème relatif à l'hyperbole.

École navale (Concours de 1881). — Énoncés des compositions de Géométrie, de Statique, d'Arithmétique, d'Algèbre, de Trigonométrie, de Géométrie descriptive. (126-127).

École forestière (Concours de 1881).— Énoncés des compositions

de Mathématiques, de Trigonométrie et Calcul logarithmique. (128).

École Polytechnique (Concours de 1881). — Énoncés des compositions de Mathématiques, de Géométrie descriptive, données à quelques élèves qui n'ont pu concourir que tardivement. (129).

Concours d'admission à l'École Centrale en 1881 (première session). — Énoncés des compositions de Géométrie analytique, de Trigonométrie, de Physique et Chimie et de l'épure. (130-132).

Questions proposées. — **1384** à **1395**. (140-143).

Avis aux candidats à l'École Polytechnique : au sujet des programmes d'admission. (143).

L'Astronomie. — Annonce du Journal publié, sous ce titre, par M. C. Flammarion. (144).

Legoux (*A.*). — Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance. (145-153).

L'éminent professeur de la Faculté de Grenoble traite seulement le cas de l'attraction, celui de la répulsion ne comportant qu'un simple changement de signes. Pour l'étude de la stabilité, on considère comme négligeable le carré du déplacement du point, et l'on trouve comme conditions trois inégalités, qui doivent être satisfaites simultanément.

Liguine (*V.*). — Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe. (153-163).

Dans le même Recueil (2[e] série, t. XIV, p. 529), M. Liguine a déjà publié un intéressant Mémoire *Sur les systèmes de tiges articulées*. Il se propose ici d'établir la relation entre les chemins parcourus dans le mouvement donné et le mouvement transformé, ainsi que les rapports des vitesses, pour les trois appareils de MM. Peaucellier, Hart et Kempe (*Voir* aussi un article de M. d'Ocagne, *Nouv. Ann.*, 2[e] série, t. XX, p. 456).

Picart (*A.*). — Note sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces. (163-171).

L'auteur résume les principales propriétés relatives à ces paraboloïdes, et se propose surtout d'étudier l'enveloppe des paraboloïdes osculateurs du second ordre qui ont leurs points de contact sur une ligne donnée.

Ocagne (*M. d'*). — Sommation d'une série remarquable. (171-173).

Il s'agit de la série de Stainville

$$1 + a\frac{z}{1} + a(a+k)\frac{z^2}{1.2} + \ldots + a(a+k)\ldots[a+(n-1)k]\frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont Gergonne et Ampère se sont occupés. M. d'Ocagne trouve pour somme $(1-kz)^{-\frac{a}{k}}$.

Berloty (le P.). — Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\psi(x) = 0$. (173-176).

Conditions pour que $F(x)$ admette comme facteur $(x^p - a^p)$.

Auzelle (*J.*). — Concours d'admission à l'École Centrale (2[e] session, 1879); solution de la question proposée (176-180).

Problème relatif aux coniques tangentes aux quatre côtés d'un carré.

Boudènes (*J.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales, proposée au concours d'agrégation de 1880. (180-184).

Problème relatif à un ellipsoïde et à un cône.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la première question proposée au concours général de 1879 (Philosophie). (184-185).

Inscription d'un trapèze isoscèle dans un quadrilatère.

Lez (*H.*). — Solution des questions proposées au concours général de 1879 (troisième). (185-189).

Première question : Théorème sur la circonférence. — Deuxième question : Propriétés du triangle.

Concours général de 1881. — Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Philosophie, Rhétorique, Seconde. Énoncés des compositions. (189-192).

Questions proposées. — 1396 à 1399. (192).

Brisse (*Ch.*). — Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en s. (193-206).

Cet intéressant article débute par l'étude de l'équation en s et par la discussion des divers cas qui peuvent se présenter, savoir : trois racines simples, une racine double, une racine triple, une ou plusieurs racines nulles. L'auteur examine ensuite l'influence de la nature des racines de l'équation en s sur la forme des fonctions considérées, ce qui le conduit naturellement à la classification complète des surfaces du second ordre. La détermination des sections cir-

culaires et des conditions pour qu'une surface de second ordre soit de révolution termine l'étude dont il s'agit.

Brisse (*Ch.*). — Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre en coordonnées obliques. (207-216).

C'est en quelque sorte un complément de l'étude qui précède. L'auteur reprend les formules générales de transformation en coordonnées obliques, puis les applique à la recherche des cordes principales dans les surfaces du second ordre, cordes dont les directions dépendent essentiellement de l'équation en *s*. L'article se termine par l'étude des relations entre les directions des cordes principales et celles des plans de section circulaires, puis par la réduction de l'équation générale du second degré.

Caron (*J.*). — Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second degré. (217-219).

Extension à toutes les surfaces de révolution du second ordre, de la méthode de M. Rouché, analysées plus haut.

Lebon (*É.*). — Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre. (219).

Même sujet.

Henry (*E.*). — Solution d'une question d'Analyse, proposée au concours d'agrégation de 1880. (220-229).

Propriétés diverses de la surface définie par les formules

$$x = (u + \beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha,$$
$$y = (u + \beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha,$$
$$z = \varphi(\beta),$$

en admettant que u soit une fonction de α et u' la dérivée.

Moret-Blanc. — Solution des questions de licence proposées au concours d'agrégation de 1880. (230-236).

1. Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées. — 2. Problème de Mécanique : rotation d'un tube autour d'un axe vertical.

Concours d'agrégation de l'enseignement secondaire spécial en 1880. — Épreuves écrites : Algèbre et Géométrie, Géométrie descriptive, Mécanique. — Épreuves orales : Algèbre ou Trigonométrie, Géométrie descriptive, Mécanique. Épreuves pratiques. (236-239).

Questions proposées. — 1400 à 1403. (239-240).

Ocagne (*M. d'*). — Sur le développement des logarithmes et des exponentielles. (241-244).

Recherche du développement de $\log f(x)$ suivant les puissances de $\varphi(x)$, la fonction $f(x)$ étant elle-même développée suivant les mêmes puissances. Problème inverse : développement de $f(x)$ connaissant celui de $\log f(x)$. Développement de e^x comme vérification.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales, proposée au concours d'agrégation de 1879. (245-254).

Problème sur un hyperboloïde à une nappe et sur un paraboloïde circonscrit.

Gambey. — Solution de la question de Mécanique élémentaire, proposée au concours d'agrégation de 1879. (254-256).

Équilibre d'une lame homogène demi-circulaire, suspendue par un fil attaché aux extrémités de son diamètre.

Dorlet (E.). — Solution de la question proposée en Mathématiques spéciales au concours général de 1880. (256-265).

Problème sur une courbe de troisième degré ayant un point de rebroussement.

Moret-Blanc. — Solution des questions proposées en Mathématiques élémentaires au concours général de 1880. (266-268).

I. Résolution d'un système d'équations.
II. Problème sur le cercle.

Lebon (E.). — Solution de la question de Géométrie descriptive, proposée au concours d'agrégation de l'enseignement spécial en 1880. (269-274).

Cône enveloppe des plans qui coupent deux plans verticaux suivant deux droites rectangulaires.

Roubaudi (C.). — Solution de la question de Mécanique, proposée pour l'obtention du brevet de Cluny en 1880. (274-278).

Mouvement de deux corps unis par un fil et placés sur deux plans inclinés.

Kien (L.). — Solution de la question proposée en 1881 (1re section), pour le concours d'admission à l'École Centrale. (278-283).

Problème sur l'ellipse et ses normales.

Moret-Blanc. — Solution des questions proposées au concours pour les bourses de licence à Marseille, en 1881. (283-288).

I. Points d'inflexion d'une cubique.
II. Lieu des foyers des coniques passant par l'intersection d'un cercle et de deux droites parallèles données.

A. L.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (1).

Tome XCVIII, nos 2329-2352; 1880.

Jedrzejewicz (*M.*). — Mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à son observatoire particulier de Plonsk. (1-16, 145-152, 171-190, 193-198, 225-234, 257-266, 273-282, 289-300, 353-362).

Dunér (*N.-C.*). — Découverte d'une nouvelle étoile variable. (15-16).

L'étoile des zones de Bonn, zone + 37°, n° 2771, est variable de la huitième à la onzième grandeur.

Luther (*E.*) et *Rahts* (*J.*). — Observations de planètes faites au cercle méridien de l'Observatoire de Königsberg, de décembre 1879 à avril 1880. (17-20).

Hough (*G.-W.*). — Observations des satellites d'Uranus faites à l'Observatoire de Dearborn (Chicago), en mars, avril et mai 1880. (25-28).

Les satellites observés à l'équatorial de $18\frac{1}{2}$ pouces anglais sont Ariel, Umbriel, Titan et Oberon.

Gill (*D.*). — Observations de la comète *a* de 1880, faites en février 1880 à l'Observatoire du cap de Bonne-Espérance. (29-30).

Doberck (*W.*). — Formules pour le mouvement de quelques étoiles doubles. (31-32).

Bruhns (*C.*) et *Peter* (*B.*). — Observations de planètes faites à l'équatorial de l'Observatoire de Leipzig en janvier, février et mars 1880. (33-48).

Swift (*L.*). — Découverte d'une comète, comète 1880 IV, faite le 18 août à Rochester. (47-48).

Abetti (*A.*). — Éléments paraboliques de la comète de Swift, 1879

---

(1) Voir *Bulletin*, IV$_1$, 154.

III, et comparaison de l'éphéméride avec les observations faites à l'Observatoire de Padoue en juillet et août 1879. (49-54).

Les éléments

$$\begin{aligned} T &= 1879 \text{ avril } 28,06793 \text{ t. m. B.}, \\ \pi &= 47.\ 9.17.1, \\ \Omega &= 44.57.29,9, \\ i &= 107.14.18,6, \\ \log q &= 9,940522, \end{aligned}$$

satisfont à l'ensemble des observations du 10 juillet au 15 août.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables. (53-54).

Tacchini (*P.*). — Observations de planètes faites en juin et juillet 1880 à l'équatorial de Merz de l'Observatoire du Collège Romain. (55-58).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'étoile double ζ d'Hercule. (59-62).

Les éléments sont calculés d'après l'ensemble des observations faites de 1826 à 1873.

Ceraski (*W.*). — Note sur une étoile variable. (61-64).

L'étoile de la Durchmusterung, dont la position est

$$\text{Æ} = 0^h 49^m 39^s, \quad \delta = +81°5',6,$$

est variable avec une période d'environ dix jours.

Peters (*C.-F.-W.*). — Résultats des observations du pendule. IIe Partie. — Mesure de la longueur du pendule simple à secondes à Berlin. (65-84).

Les observations ont été faites à l'aide du pendule à réversion de Lohmeier, dans le but de comparer les résultats fournis par cet instrument avec ceux autrefois obtenus à Berlin avec un pendule invariable de Fortin (observations de 1823 à 1824), avec un pendule filaire de Repsold (Bessel, 1835), enfin avec un pendule à réversion de Repsold (Albrecht, 1869). On sait que l'ensemble de ces observations a été discuté, en 1874, par Bruhns dans les publications de l'Institut impérial de Géodésie prussienne.

L'ensemble de huit séries d'expériences a donné à M. Peters, pour la longueur du pendule simple à secondes, à Berlin et au niveau de la mer,

$$\lambda = 994,1860^{mm}.$$

Les anciennes déterminations avaient donné

$$\lambda = 994,2318^{mm}.$$

SECONDE PARTIE.

[illegible] (*J.-F.-J.*). — Recherches sur la couleur des étoiles. (8[illegible]-90).

Le savant directeur de l'Observatoire d'Athènes a d'abord étudié, à l'aide d'une échelle de couleurs qui lui est spéciale et qui permet de définir par un nombre la couleur d'une étoile, les variations que présente la couleur de Vénus lorsque la planète s'abaisse vers l'horizon; dans ce cas, il ne lui a pas été difficile de montrer que la planète devient d'autant plus rouge que sa distance zénithale augmente. L'intensité de la coloration rouge peut d'ailleurs être traduite par une courbe dont les ordonnées croissent depuis zéro (la planète est blanche au zénith) jusqu'au rouge.

Cette courbe étant construite permet ensuite de mesurer le degré de rouge que l'atmosphère donne forcément aux étoiles qui restent toujours voisines de l'horizon et par suite d'arriver à une appréciation vraie de la couleur de ces étoiles.

Les étoiles spécialement étudiées par M. Schmidt sont δ de Céphée, η de l'Aigle, ζ des Gémeaux, β de la Lyre et Mira Ceti.

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double de 87 de Pégase (89-90).

Les mesures montrent que le compagnon a un mouvement certain autour de l'étoile principale.

Meyer (*M.-W.*). — Observations équatoriales faites à l'Observatoire de Genève en mai, juin et juillet 1880. (91-94).

Les observations ont été faites au nouvel équatorial de 10 pouces que M. Plantamour a fait installer à Genève.

Swift (*L.*). — Note sur les circonstances de la découverte d'[illegible] comète faite le 17 août 1880. (95-96).

Cette nébulosité, observée une nuit par M. Swift, n'a pas été revue.

Möller (*Axel*). — Observations de la comète périodique de Fa[illegible] 1880 III, faites à Lund du 29 au 31 août 1880. (95-96).

Coggia. — Découverte d'une planète, (217), faite à Marseille [illegible] 30 août 1880. (95-96).

Spoerer. — Recherches sur la périodicité des taches solaires, [illegible] longueur de leur période et les époques des maxima ou minim[illegible] (97-104).

La période des taches solaires est de 11,313 années; les époques des mini[illegible] et maxima sont données par les formules :

$$\text{Minimum} \ldots\ldots \quad 1753{,}914 + \alpha.11.313,$$
$$\text{Maximum} \ldots\ldots \quad 1758{,}364 + \alpha.12{,}333,$$

où α prend les valeurs entières 0, 1, 2, ...

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1880. (103-112).

Palisa (*A.*). — Découverte de la planète (218), faite le 4 septembre 1880. (111-112).

Oppenheim (*H.*). — Calcul des perturbations de Clytie (73) par Jupiter, de 1862 à l'époque actuelle. (113-128).

Palisa (*A.*). — Observations de comètes et de planètes faites à l'Observatoire de Pola, de août 1879 à avril 1880. (129-144).

Hartwig. — Découverte d'une comète, 1880 V, faite à l'Observatoire de Strasbourg le 29 septembre 1880. (143-144).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double ζ du Sagittaire. (151-152).

Les observations de 1867 à 1880 montrent un mouvement de rotation rapide.

Pechüle (*C.-F*). — Observations de la comète de Brorsen faites en 1879 au grand équatorial de l'Observatoire de Copenhague. (153-156).

Tebbutt (*J.*). — Éléments paraboliques de la grande comète australe, comète I, 1880. (155-156).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'étoile double η de la Couronne boréale. (157-160).

Ces éléments représentent l'ensemble des observations faites de 1781 à 1872.

Bruhns (*C.*). — Observations de la comète Hartwig, comète 1880 V. (159-160).

Pechüle (*C.-F.*). — Passage de Mercure du 6 mai 1878 observé à Copenhague. (161-174).

Le premier contact intérieur a été observé par rupture brusque de la goutte noire. Des observations de la position de Mercure sur le disque du Soleil ont ensuite été faites avec un micromètre annulaire. Le Mémoire de M. Pechüle contient le développement des formules nécessaires à la réduction d'observations de cette espèce, lorsque l'astre observé est assez voisin de l'horizon pour que les corrections de réfractions deviennent considérables.

Zelbr (*K.*) et *Hartwig* (*E.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, comète 1880 V. (169-170).

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, 1880 V. (191-192).

Burnham (*S. W.*). — Note sur l'étoile double δ du Petit Cheval. (190-192).

La révolution du compagnon est de 30 à 40 ans.

Oppolzer (*v.*). — Perturbation du premier ordre exercées sur la planète Concordia (58) par Jupiter et Saturne. (199-204).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double OΣ367. (203-204).

Les deux étoiles mesurées par O. Struve sont fixes, mais il y a au voisinage du compagnon (à une distance de 0",77) une très petite étoile non encore signalée.

Klinkerfues (*W.*). — Observations de la comète *b* de 1880, faites en avril et mai à Göttingue. (205-206).

Notice nécrologique sur *W. Lassell.* (207-208).

W. Lassell, né le 18 juin 1799 à Bolton (Lancashire), est mort à Maidenhead le 5 octobre 1880. Vers 1820, il construisit de ses mains un télescope de 7 pouces d'ouverture, avec lequel il découvrait la sixième étoile du trapèze d'Orion. En 1844, il obtenait un télescope de 2 pieds d'ouverture et de 20 pieds de distance focale; c'est avec cet instrument qu'il a découvert le satellite de Neptune (1847), puis Hyperion (1848) et enfin Umbriel et Ariel (1851). Enfin, en 1861, il transportait à Malte un télescope de 4 pieds d'ouverture et y découvrait environ 600 nébuleuses nouvelles.

Depuis son retour de Malte, le télescope de 4 pieds est resté inutile; M. Lassell avait seulement installé à Maidenhead le télescope de 2 pieds.

Swift (*L.*). — Découverte d'une comète, comète 1880 VI, faite à Rochester le 12 octobre 1880. (207-208).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Recherches sur la rotation de Jupiter. (209-222),

Une tache noire qui s'est montrée pendant l'été de 1862 sur l'hémisphère nord de Jupiter et que M. Schmidt a pu observer du 15 mai au 7 juillet avait autrefois donné à cet astromone pour la rotation de Jupiter :

Rotation de Jupiter $= 9^h 55^m 25^s,684 \pm 0^s,179$. — Observations de 1862.

La tache rouge, qui est actuellement visible dans l'hémisphère austral de la planète, et que la constance de sa forme paraît devoir faire considérer comme fixe sur Jupiter, donne à M. Schmidt :

Rotation de Jupiter $= 9^h 55^m 34^s,63 \pm 0^s,09$. — Observations de 1879-1880,

résultat qui surpasse de 9^s environ le nombre généralement admis.

Meyer (*M.-W.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, 1880 V. (223-224).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig (1880 V) faites à l'Observatoire du Collège Romain en septembre et octobre 1880. (235-238).

Zelbr (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Hartwig, 1880 V. (239-240).

Küstner (*F.*). — Observations d'étoiles de comparaison faites en 1880, au petit cercle méridien de l'Observatoire de Berlin (241-248).

Knorre (*V.*). — Observations de petites planètes faites à l'équatorial de 9 pouces de Berlin, pendant le second semestre de 1879. (247-256).

Peters (*C.-F.-W.*). — Éléments paraboliques de la comète Hartwig. (255-256).

Meyer (*M.-W.*). — Observations de la comète périodique de Faye, faites à l'Observatoire de Genève en septembre et octobre 1880. (267-270).

Bredikhine (*Th.*). — Spectre de la comète de Hartwig. (271-272).

Les deux bandes les moins refrangibles ont été mesurées et elles ont pour longueurs d'ondes 556 et 515.

Doberck (*W.*). — Éléments de γ des Chiens de chasse $= \Sigma$, 1768. (271-272).

Ces éléments représentent les observations de 1827 à 1880. La période de révolution est de cent dix-neuf ans.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur l'étoile variable de Céphée, découverte par M. Ceraski. (283-284).

La période de variation est de $2^j\ 11^h\ 50^m$.

Knott (*G.*). — Observation du minimum de l'étoile variable de M. Ceraski, le 23 octobre 1880. (285-286).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la comète de Hartwig, 1880 V, faites en octobre 1880, à Clinton (U.-S.). (285-288).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig, 1880 V, faites à l'Observatoire d'Arcetri (Florence) d'août à octobre 1880. (299-304).

Notice nécrologique sur *B. Peirce*. (303-304).

Peirce, professeur d'Astronomie à Cambridge (Massachusetts), né à Salem le 4 avril 1809, est mort à Cambridge le 6 octobre 1880.

Howe (*H.-A.*). — Note sur deux nouvelles solutions du problème de Kepler. (305-308).

Étant donné une solution approchée, toujours facile à obtenir, de l'équation

$$U = m - e \sin U,$$

M. Howe donne deux formules propres à calculer assez exactement la valeur de U.

Lehmann-Filhès (*R.*). — Note sur les formules dans le 134e paragraphe du *Theoria motus* de Gauss. (307-310).

Upton (*Winslow*). — Observations de la comète Hartwig, 1880 V, faites à l'Observatoire naval de Washington en octobre 1880, et éléments paraboliques de cette comète. (311-312).

Konkoly (*N.-V.*) et *Kobold* (*H.*). — Observations de la comète de Hartwig, 1880 V, faites à Ó Gyalla du 30 septembre au 2 novembre 1880. (311-318).

Le spectre de la comète est formé de quatre bandes lumineuses ayant pour longueurs d'ondes 560, 549, 517, 486; elles sont donc très voisines des lignes de C_2H_3.

Les positions de la comète ont été observées du 30 septembre au 2 novembre par le Dr Kobold.

Ritchie (*J.*). — Éléments et éphémérides de la comète de Swift, 1880 VI. (319-320).

Lohse (*J.-G.*). — Éléments paraboliques de la comète de Swift, 1880 VI. (319-320).

Stebnitzky (major *J.*). — Nouvelle détermination de la longitude et de la latitude de Constantinople. (321-324).

Les résultats obtenus sont, pour la position géographique de la tour du Seraskierat,

$$\varphi = 40°0'57'',32,$$
$$L = 1^h 55^m 51^s,72 \text{ E. de Greenwich.}$$

La longitude est déduite de celle d'Odessa.

Copeland (*Ralph*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Éléments et éphéméride de la comète VI de 1880. (319-328).

La comète paraît identique à la comète III de 1869.

Zelbr (*K.*) et *Hepperger* (*J.-V.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète VI de 1880. (327-328).

Chandler (*S.-C.*). — Note sur l'identité de la comète VI de 1880 (comète de Swift) avec la comète III de 1869. (327-330).

Block (*E.*). — Observations des comètes V et VI de 1880, faites à l'Observatoire d'Odessa en octobre et novembre 1880. (329-330).

Möller (*Axel*). — Observations de la comète Swift (1880 VI) faites à Lund. (331-332).

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Swift (1880 VI). (331-332).

Moesta (*C.-W.*). — Note sur la parallaxe de α_2 du Centaure. (333-334).

La parallaxe a pour valeur $0'',521 \pm 0'',066$.

Abetti (*A.*). — Observations de la comète de Hartwig, faites à Padoue en octobre 1880. (333-334).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète Hartwig, faites à Kiel en novembre 1880. (335-336).

Löw (*M.*). — Recherches sur la hauteur du Pôle à Helgoland. (337-342).

La latitude de la station géodésique occupée en 1857 par le général Bayer est

$54°10'48'',80$.

Young (*C.-A.*). — Observations de la comète de Swift (1880 VI), faites en octobre et novembre, à Princeton, New-Jersey (U. S.). (341-342).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète Hartwig (1880 V), faites en octobre et novembre au Collège Romain. (343-346).

Block (*E.*). — Observations des comètes Hartwig (1880 V) et

Swift (1880 VI), faites en octobre et novembre à l'Observatoire d'Odessa. (347-348).

Young (*C.-A.*). — Observation du spectre de la comète de Hartwig. (349-350).

Le spectre se compose de trois bandes ayant pour longueurs d'onde les nombres 556,4, 516,9, 473,7. La première bande est très rapprochée de la ligne *b* du magnésium; les deux dernières se rapprochent des bandes les plus réfrangibles de la lumière du bec de Bunsen.

Börgen (*C.*). — Observations de la comète de Swift (1880 VI), faites à Wilhelmshaven en novembre 1880. (351-352).

Meyer (*M.-W.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig (1880 V), faites à l'Observatoire de Genève en octobre et novembre 1880. (363-366).

Upton (*Winslow*). — Éléments et éphéméride de la comète Swift (1880 VI), d'après les observations de Washington. (367-368).

Palisa (*J.*). — Observations de comètes et de planètes, faites à Pola pendant les mois de septembre et octobre 1880. (369-372).

Strasser (*G.*). — Observations de la Lune et d'étoiles de culmination lunaire, faites en 1878 et 1879 à Kremsmünster. (371-378).

Ross (*Lewis*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Swift (1880 VI). (377-380).

Bellamy (*W.*). — Éléments paraboliques de la comète de Swift (1880 VI). (379-380).

Notice nécrologique sur *J.-C. Watson*. (383-384).

Watson (J.-C.), longtemps directeur de l'Observatoire d'Ann Arbor, est mort à Madison, le 22 novembre 1880, à l'âge de 43 ans.

Tome XCIX, n°s 2353-2376; 1881.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur l'influence des erreurs d'observation dans la détermination de la durée de rotation de Jupiter. (1-12).

Les points noirs que l'on observe parfois sur Jupiter ou dans ses bandes, ainsi que les points brillants qui sont fréquents sur les bandes, ont, en général, un mouvement propre, rapide sur la planète.

Schulhof et *Bossert*. — Note sur la comète de Swift, comète VI de 1880. (11-16).

La comète de Swift est identique à la comète 1869 III, mais la révolution, au lieu de s'effectuer en onze ans, se fait en cinq ans et demi. La comète est donc revenue en 1874 sans avoir été aperçue; elle reviendra dans des conditions défavorables en 1885.

Pechüle. — Découverte de la comète VII de 1880, faite à Copenhague le 16 décembre 1880. (15-16).

Schulhof et *Bossert*. — Éléments elliptiques de la comète de 1880. (15-16).

D'après l'ensemble des observations, la durée de la révolution serait de 1280 ans.

Zelbr (*K.*). — Recherches sur l'orbite de la comète III de 1869. (17-20).

Les observations de 1869 peuvent être assez bien représentées par une ellipse de onze années. Le calcul paraît donc laisser indécise la question de savoir si la comète 1869 III ou 1880 VI a une révolution de cinq ans et demi ou de onze ans.

Hepperger (*I. v.*). — Éléments elliptiques et éphéméride de la comète VI de 1880, comète de Swift. (19-22).

Les éléments sont calculés dans l'hypothèse d'une révolution de 1097 ans; ils montrent l'identité de la comète actuelle avec la comète 1869 III.

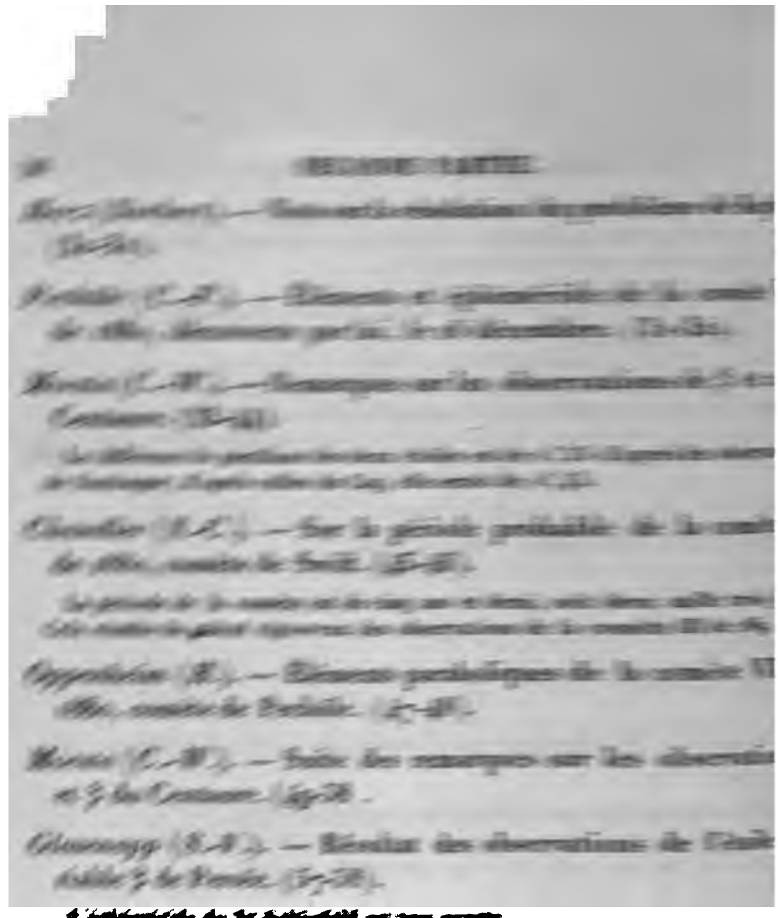
Tempel (*W.*). — Observations de la comète V de 1880, comète Hartwig, et de la comète VI de 1880, comète Swift, faites à Arcetri, en novembre et décembre 1880. (21-24).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète VI de 1880, faites à Athènes en novembre et décembre 1880. (23-26).

Bredikhine (*Th.*). — Sur la constitution de Jupiter. (25-26).

La zone équatoriale de Jupiter est une zone solide élevée; l'hémisphère austral est plus chaud que l'hémisphère boréal.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète VI de 1880 (Swift), faites en décembre 1880 à l'équatorial du Collège Romain. (.. 2.)



[illegible] de cette comète.

Kortazzi (I.). — Différence de longitude entre Berl[illegible] O'Gyalla. (57-60).

La longitude de O'Gyalla est [illegible] à l'est de Berlin.

Hepperger (J.). — Éléments et éphéméride de la comè[illegible] 1880, comète de Pechüle. (59-60).

Kobold (H.). — Observations de la comète VI de 1880 fai[illegible] O'Gyalla en novembre 1880. (61-62).

Peters (C.-F.-W.). — Observations de la comète VII de [illegible] faites à Kiel en décembre 1880. (61-62).

Millosevich (E.). — Observations de la comète VII de 1880 (Swift) faites à l'Observatoire du Collège Romain en déce[illegible] 1880. (63-64).

Gasparis (A. de). — Sur les rapports qui existent entre le[illegible]

riations simultanées de certains éléments des ellipses instantanées du problème des trois corps; 1re partie. (65-72).

Peters (*C.-H.-F.*). — Note sur la transmission par le câble transatlantique des dépêches astronomiques annonçant une découverte. (73-75).

Holetschek (*J.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète VII de 1880 (comète Pechüle). (75-78).

Millosewich (*E.*). — Observations de la comète VI de 1880, comète Swift, faites à l'équatorial de l'Observatoire du Collège Romain en décembre 1880. (77-80).

Oppenheim (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète VII de 1880. (79-80).

Gasparis (*A. de*). — Suite des recherches sur les variations simultanées des éléments de l'ellipse instantanée dans le problème des trois corps. (81-88).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Variations et éclat de T de Céphée, étoile variable découverte par M. Ceraski. (87-92).

La période est de $2^j\,11^h\,51^m$.

Searle (*A.*). — Note sur la lumière zodiacale. (91-94).

Il existe entre l'Aigle et les Pléiades, passant par le Verseau et la partie sud du Bélier et des Poissons, une bande permanente de matière cosmique lumineuse qui a été parfois confondue avec la lumière zodiacale.

Konkoly (*N. v.*). — Observations spectroscopiques de la comète Pechüle. (93-94).

Le spectre de la comète est formé de trois bandes ayant pour longueurs d'onde

I..........	$560^{mm},3$
II.........	516,3
III........	476,3

Ambronn. — Éléments et éphéméride de la comète VII de 1880. (95-96).

Pickering (*E.-C.*). — Observations de la comète III de 1869 faites en décembre 1869 à l'Observatoire de Harvard College (95-96).

Gasparis (*A. de*). — Suite des recherches sur les vari multanées des éléments de l'ellipse instantanée du des trois corps. (97-102).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des comètes de F Hartwig, faites en 1880 à l'Observatoire d'Athènes. (

Pickering (*E.-C.*). — Observations de l'éclipse du 30 décembre 1880, faites à l'observatoire de Harvard (107-108).

Chandler (*S.-C.*). — Éléments de la comète VII de 188 Pechüle. (109-110).

Frisby (*E.*). — Éléments de la comète de Swift, calcul trois observations méridiennes de Washington. (111-

Notice nécrologique sur le baron *Dembowski*. (111-112

Le baron Dembowski est mort à Gallarate le 19 janvier 1881, à l'â Ses premières observations d'étoiles doubles ont été faites à Naples 1860 il avait fait construire à Gallarate un observatoire où il a obs ses derniers jours.

Peters (*C.-H.-F.*). — Recherches sur les étoiles variabl à l'Observatoire de Clinton (Hamilton College). (113-

Schaeberle (*J.-M.*). — Observations de la comète IV comète de Hartwig, faites en octobre 1880 à l'Observ Ann Arbor. (127-128).

Peters (*C.-F.-W.*). — Détermination de la longueur du simple à secondes à Königsberg. (129-138).

La longueur du pendule simple à secondes est de 994^{mm},4061, à Kön dans les localités voisines, on a successivement trouvé, soit par les o d'un pendule à fil, soit par les observations d'un pendule à réversion tats suivants

Station	Observateur	Longueur du pendule simple. mm	Longueur du pendule à réversion. mm	Di
Altona.	Sabine	994,3342	994,3007	+
Berlin.	Bessel	994,2318	994,1860	+
Königsberg .	Bessel	994,4098	994,4061	+
Königsberg. .	Peters	994,4358	994,4061	+

L'existence de ces différences montre qu'il existe encore une assez certitude dans la valeur du coefficient de résistance de l'air.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète Pechüle, comète VII de 1880, faites en décembre 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (137-140).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la planète Frigga (77), faites à l'Observatoire de Lichtfield (Clinton). (141-142).

Pritchett (*H.-S.*). — Observations de la comète IV de 1880, comète Hartwig, faites à l'observatoire Morrison (Glasgow, U. S) en novembre 1880. (143-144).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1880 à l'équatorial de l'Observatoire de Düsseldorf. (145-150).

Luther (*W.*). — Éphéméride de Leucothea (35) pour l'opposition de mars-avril 1881. (151-154).

Engelhardt (*B. v.*). — Observations des comètes Hartwig, Swift et Pechüle, faites à son observatoire privé de Dresde d'octobre 1880 à février 1881. (153-158).

Meyer (*W.*). — Observations de la comète Pechüle, faites à l'Observatoire de Genève en janvier 1881. (157-158).

Abetti (*A.*). — Observations de la comète Pechüle, faites à Padoue en janvier 1881. (157-160).

Strasser (*G.*). — Observations de la comète VI de 1880, faites à Kremsmünster en décembre 1880 et janvier 1881. (159-160).

Pucci (*E.*). — Note sur la réduction des observations astronomiques et des angles géodésiques d'une surface de niveau à une autre. (161-168).

Oppenheim (*H.*). — Éphéméride de la comète VII de 1880, comète de Pechüle, pour février et mars 1881. (169-170).

Upton (*Winslow*). — Éléments elliptiques de la comète VI de 1880, comète de Swift. (171-172).

La période serait de 2189^j, soit 6 ans.

Tacchini (*P.*). — Note sur le diamètre de Vesta. (173-174).

A la distance 1 le diamètre apparent de Vesta est de 1″,41.

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double $o\Sigma 547$. (173-174).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète VII de 1880, comète Pechüle, faites à Kiel en janvier 1881. (173-174).

Börsch (*A.*). — Mesure des coefficients de dilatation du fer et du zinc, au moyen de l'appareil de Bessel pour la mesure des bases. (175-190).

Holetschek (*J.*). — Éphéméride de la comète VII de 1880, comète de Pechüle, pour mars 1881. (189-190).

Dunér (*N.-C.*). — Découverte d'une nouvelle étoile variable. (191-192).

L'étoile 1044 de la zone +34° du Catalogue de Bonn, qui est l'étoile 57*a* du Catalogue des étoiles rouges de Schjellerup, est variable.

Abetti (*A.*). — Observation de la comète de Pechüle, comète VII de 1880, faite à Padoue le 22 février 1881. (191-192).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (220). (191-192).

Tacchini (*P.*). — Suite des observations de la comète VII de 1880, Pechüle, faites au Collège Romain en janvier et février 1881. (193-194).

Winkler (*W.*). — Observations d'éclipses de satellites de Jupiter, faites à Gohles (près Leipzig) de 1876 à 1881. (195-198).

La lunette employée est un équatorial de Steinheil de 108mm d'ouverture.

Tempel (*W.*). — Observations de la comète de Swift, faites à Arcetri en janvier 1881. (197-198).

Tacchini (*P.*). — Observations de petites planètes faites en 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (199-202).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la comète III de 1864, faites à Clinton. (203-204).

Tebbutt (*J.*). — Observation micrométrique de la distance de Jupiter à l'étoile 363 du Catalogue de Washington le 20 novembre 1880. (205-206).

Abetti (*A.*). — Observations de la comète de Pechüle, VII de 1880, faites à Padoue le 24 février 1881. (207-208).

Block (*E.*). — Observations des comètes VI de 1880 (Swift) et

VII de 1881 (Pechüle), faites à Odessa d'octobre 1880 à février 1881. (209-212).

Jedrzejewicz. — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites à Plonsk pendant l'opposition de 1880-1881. (211-216).

La durée de la rotation de l'extrémité orientale de la tache est de

$9^h 55^m 34^s,414 \pm 0^s,13.$

Kobold (*H.*). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle) faites à O'Gyalla du 20 décembre 1880 au 23 février 1881. (217-220).

Strasser (*G.*). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Kremsmünster en janvier 1881. (219-220).

Pickering (*E.-C.*). — Observations du satellite de Sirius, faites à Harvard College, de 1867 à 1872, par J. Winlock. (219-222).

Engelhardt (*B. v.*). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Dresde du 25 janvier au 3 mars 1881. (223-224).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1880. (225-234).

Peters (*C.-H.-F.*). — Comparaison de la grandeur des étoiles d'après Ulugh Beg avec l'éclat actuel. (235-240).

Abetti (*A.*). — Observations de petites planètes en opposition, faites à l'équatorial de Padoue en 1880. (241-254).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Athènes du 30 décembre 1880 au 25 février 1881. (253-256).

Abetti (*A.*). — Observations de petites planètes en opposition, faites à l'équatorial de Padoue en 1880. (257-262).

Jedrzejewicz. — Mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à Plonsk en 1876 et 1877. (263-272).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des taches solaires, faites à Athènes en 1880. (273-278).

Glauser (*J.*). — Recherches sur le point radiant des comètes. (279-282).

M. Hoek a signalé, dans plusieurs publications, que les comètes pouvaient être réunies par groupes ayant un point radiant commun, ce qui compléterait l'analogie entre ces corps et les étoiles filantes et il a signalé plusieurs de ces groupes.

Pour des comètes venant du même point de l'espace on doit, suivant M. Glauser, avoir la relation

$$\frac{q'}{q} = \frac{e-1}{e'-1}$$

où q est la distance périhélie et e l'excentricité.

Or il se trouve que, parmi les groupes signalés par M. Hoeck, il n'y a que le groupe des comètes, 1824 juillet 11, et 1833 novembre 10, qui satisfasse à cette relation.

Suivant M. Glauser, les autres groupes ne sont pas réels.

Kuhlberg (*P.*). — Résultat des observations du pendule dans le Caucase. (281-288).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète Swift, 1880 VI, faites à Athènes en décembre 1880. (287-288).

Löw (*M.*). — Note sur la théorie de l'instrument des passages établi dans le premier vertical. (289-298).

La méthode de réduction proposée par M. Low consiste à faire les réductions fil à fil et à déduire de chaque passage une valeur de ($\varphi - \delta$).

Sawyer (*E.-F.*). — Observations des étoiles variables η Aigle et β Lyre, faites en 1877-1878 à Cambridge (Massachusets). (297-300).

Ceraski (*W.*). — Note sur le calcul des observations des étoiles variables. (299-302).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète VII (Pechüle), faites à l'Observatoire du Collège Romain du 17 au 23 mars 1881. (301-304).

Burnham (*S.-W.*). — Observations du compagnon de Sirius en 1880-1881. (303-304).

Schmidt (*Alex.*). — Théorie des erreurs de division des instruments méridiens. (305-342).

Thraen (*A.*). — Nouvelles recherches sur l'orbite de la comète découverte en 1810 par Pons.

Schaeberle (*J.-M.*). — Note sur une méthode physique rapide pour régler la position d'un équatorial. (347-348).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur la découverte d'une nouvelle étoile dans la tête du Petit Chien.

Tempel (*W.*). — Observations de la comète VII de 1880, Pechüle, faites à Arcetri du 24 février au 17 mars 1881. (351-352).

Egbert (*H.-V.*). — Éléments de (201) Pénélope. (351-352).

Swift. — Découverte d'une comète faite à Rochester (U. S.), le 30 avril 1881. (351-352).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations de la tache polaire australe de Mars pendant l'opposition de 1879. (353-358).

La position du plan de l'équateur de la planète par rapport à l'équateur terrestre de 1880, à l'écliptique de 1880 et à l'orbite de Mars en 1880, est donnée par les valeurs suivantes du nœud et de l'inclinaison :

Équateur terrestre............	$\Omega = 48°\ 7',8$	$i = 36°.22',9$
Écliptique.....................	84.28,3	26.20,6
Orbite de Mars	86.47,7	24.52,0

Ces nombres sont très voisins de ceux qu'a employés M. Marth pour le calcul de ses éphémérides pour les observations physiques de Mars.

Meyer (*W.*). — Détermination des orbites des satellites de Saturne, Encelade, Thétis, Dione et Rhéa d'après une nouvelle méthode. (359-364).

Les calculs fondés sur les observations micrométriques faites en 1880 à Genève par M. W. Meyer ont donné les éléments elliptiques des quatre satellites.

Todd (*D.-P.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites à Washington en 1879-1880. (365-366).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète découverte le 30 avril par M. Swift. (365-366).

Leavenworth (*T.-P.*). — Éléments de la planète (213) Lilea. (367-368).

Searle (*A.*). — Note sur la lumière zodiacale et la distribution des étoiles dans la portion du ciel voisine de l'équinoxe du printemps. (369-372).

Spoerer. — Observations de taches solaires, faites à Potsdam de février à août 1880. (371-376).

Pickering (E.-C.). — Liste d'étoiles remarquables par leur couleur ou la distribution de la lumière dans leur spectre, découvertes à l'Observatoire de Harvard College. (375-378).

Les objets signalés par M. Pickering sont au nombre de 39.

Foerster (W.). — Remarques sur les observations du pendule faites à Königsberg par M. C.-F.-W. Peters. (379-382).

Block (E.). — Observations et éléments de la comète I de 1881, comète de Swift. (381-382).

Knorre (V.). — Observations de la comète I de 1881, faites à Berlin. (381-382).

Oppenheim (H.). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète I de 1881, Swift. (383-384). G. R.

The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Conducted by sir Robert Kane, sir William Thomson and William Francis. — London, in-8° (¹).

Tome VI; juillet-décembre 1878.

Croll (J.). — Sur l'origine des nébuleuses. (1-14).

L'auteur examine les contributions que la Science moderne de l'énergie apporte à la question de l'origine des nébuleuses, et il considère en particulier la cause physique de la dispersion de la matière dans l'espace, sous forme de nébulosités.

Hughes. — Sur l'action physique du microphone. (44-50).

Meldola (R.). — Sur la cause de l'apparition de lignes brillantes dans le spectre solaire. (50-61).

Mills (E.-J.). — Note sur des recherches de thermométrie. (62-63).

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 84-101.

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la relation entre les tuyaux sonores ouverts et les tuyaux fermés. (63-66).

Clarke (*Col. A.-R.*). — Sur la figure de la Terre. (81-93).

Le nombre qui exprime l'aplatissement du sphéroïde terrestre et que l'on a évalué, au commencement de ce siècle, à $\frac{1}{300}$ environ, semble devoir s'accroître, à mesure que de nouvelles données viennent s'ajouter aux données anciennes sur la forme du globe. Ainsi, les travaux géodésiques récemment exécutés dans l'Inde anglaise donnent, pour les ellipticités des deux principaux méridiens terrestres, les fractions $\frac{1}{289,54}$ et $\frac{1}{295,77}$.

Blaikley (*D.-J.*). — Sur les instruments à vent en cuivre comme résonateurs. (119-128).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. — IX. Radiation et rotation. (128-132).

Lockyer (*J.-N.*). — Recherches récentes sur la Chimie solaire. (161-176).

Heaviside (*Ol.*). — Sur la résistance des électro-aimants télégraphiques. (177-185).

Zöppritz (*K.*). — Problèmes hydrodynamiques relatifs à la théorie des courants océaniques. (192-211).

« Le but de ce Mémoire est de montrer quels sont les mouvements qu'admet une couche liquide illimitée sous des influences extérieures agissant seulement à la surface, dans la supposition que le liquide admette un frottement (comme c'est le cas pour l'eau et pour tous les autres liquides connus, à un degré plus ou moins marqué). »

Ennis (*Jacob*). — Origine de la force qui produit les radiations stellaires. (216-225).

Dvorák (*V.*). — Sur la répulsion acoustique. Suivi d'une Note du professeur *A.-M. Mayer*. (225-233).

1. Répulsion acoustique des résonateurs ouverts à une seule extrémité. — 2. Le moulin acoustique. — 3. La balance de torsion acoustique. — 4. Production de courants aériens par le son.

Boltzmann (*L.*). — Sur quelques problèmes de la théorie mécanique de la chaleur. (236-237).

Clausius (*R.*). — Sur la relation entre le travail produit par la

diffusion et le second théorème de la théorie mécanique de la chaleur. (237-238).

Blake (*J.-F.*). — Sur la mesure des courbes formées par les céphalopodes et autres mollusques. (241-263).

Études géométriques sur la forme et la loi d'accroissement des coquilles.

Hennessy (*H.*). — Sur les limites des hypothèses concernant les propriétés de la matière qui compose l'intérieur de la Terre. (263-267).

Worthington (*A.-M.*). — Sur la couleur bleue du ciel. (267-270).

Rayleigh (*Lord*). — Note sur la répulsion acoustique. (270-271).

Thompson (*Silv.-P.*). — Sur certains phénomènes accompagnant les arcs-en-ciel. (272-274).

Ball (*R.-St.*). — Sur les *vis* (*screws*) principales d'inertie d'un corps rigide libre ou restreint. (274-280).

Unwin (*W.-C.*). — Sur l'écoulement de l'eau à travers des orifices à des températures inégales. (281-287).

Edlund (*E.*). — Recherches sur l'induction unipolaire, sur l'électricité atmosphérique et sur l'aurore boréale. (289-306; 360-371 et 423-436).

Gray (*Th.*). — Sur la détermination expérimentale des moments magnétiques en mesure absolue. (321-331).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la multiplication au moyen d'une Table à simple entrée. (331-347).

Il s'agit de l'emploi, pour remplacer les Tables de multiples ou les logarithmes, d'une Table contenant les quarts de carrés, qui permet d'obtenir un produit par une simple soustraction. L'usage de cette Table est fondé sur la formule

(1) $$ab = \tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2.$$

La première Table de cette espèce qui ait paru a été publiée par Voisin, à Paris, en 1817, et s'étend jusqu'à 20000. Depuis S.-L. Laundy en a construit une allant jusqu'à 100000. Le général Shortrede en avait préparé une prolongée jusqu'à 200000, mais qui est restée manuscrite.

On peut remarquer que, si $a+b$ dépasse les limites de la Table, on pourra, d'après une remarque de Voisin, remplacer la formule (1) par la suivante :

$$ab = 2\left[\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right].$$

La formule (1) a été généralisée par M. Sylvester et étendue au produit de plusieurs nombres. Ainsi on peut calculer le produit de trois nombres au moyen d'une Table des vingt-quatrièmes de cubes, par la formule

$$24\,abc = (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3.$$

La Note de M. Glaisher se termine par des recherches historiques sur la *prosthaphérèse* des astronomes successeurs de Copernic; ce procédé se rattache à la formule

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

qui peut aussi être employée pour changer la multiplication en addition.

Thompson (*Silv.-P.*). — Figures magnétiques représentant les relations électrodynamiques. (348-353).

Purser (*J.*). — Sur l'application des équations de Lagrange à certains cas du mouvement des fluides. (354-359).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la théorie mécanique de Crookes sur la tension (*stress*) des gaz (401-423).

Heaviside (*O.*). — Sur un moyen d'essai des lignes télégraphiques. (436-438).

Chase (*Pl.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. — X. Prédictions. (448-454).

Davis (*A.-S.*). — Sur une cause possible de la formation des queues des comètes. (459-462).

Lévy (*M.*). — Sur l'attraction moléculaire dans ses relations avec la température des corps. (466-468).

Tome VII; janvier-juin 1879.

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la théorie mécanique de la force de Crookes. (15-29).

« Lorsque deux surfaces, à des températures inégales, se trouvent en présence et séparées par un gaz, il existe une force tendant à les séparer. En admettant cette force, on explique un grand nombre de phénomènes, parmi lesquels le mouvement observé dans les radiomètres de M. Crookes et l'état sphéroïdal des liquides. »

L'auteur donne le développement mathématique de sa théorie.

Preece (*W.-H.*). — La lumière électrique. (29-34).

« La théorie de la lumière électrique ne peut être traitée rigoureusement par les formules mathématiques dans l'ignorance où nous sommes encore sur la re-

lation exacte qui existe entre la production de la chaleur et l'émission de la lumière par un courant donné; mais on en sait assez pour affirmer que ce qui est vrai pour la production de la chaleur est également vrai pour la production de la lumière au delà de certaines limites. »

Weber (*H.-F.*). — Sur les inductions qui se produisent dans le téléphone. (34-39).

Baily (*W.*). — L'amidon et le verre non recuit vus au polariscope. (39-50; 4 pl.).

Fröhlich (*J.*). — Nouvelle proposition de la théorie de la diffraction, et son application. (51-57).

« Pour de petits angles de diffraction, quelle que soit la forme de l'ouverture, l'énergie cinétique de la lumière incidente est égale à l'énergie cinétique de la lumière diffractée. »

Crookes (*W.*). — Sur l'illumination des lignes de pression moléculaire, et sur la trajectoire des molécules. (57-64).

Hennessy (*H.*). — Sur la fignre de la planète Mars. (67-69).

Wiedmann (*E.*). — Recherches sur la nature des spectres. (77-95).

Mayer (*A.-M.*). — Sur la morphologie des configurations formées par des aimants flottant verticalement et soumis à l'attraction d'un aimant superposé; avec des notes sur quelques-uns des phénomènes de structure moléculaire que ces expériences peuvent servir à expliquer et à représenter. (98-108; avec 2 pl.).

Jacques (*W.-W.*). — Effet du mouvement de l'air dans une salle sur les qualités acoustiques de cette salle. (111-116).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Sur la musique des couleurs et sur le mouvement visible. (117-125; 2 pl.).

Lang (*V. von*). — Sur un goniomètre horizontal. (136-138).

Rayleigh (*Lord*). — Observations acoustiques, II. (149-162).

Trowbridge (*J.*). — Méthodes pour mesurer les courants électriques de grande puissance; avec la comparaison des machines de Wilde, de Gramme et de Siemens. (165-173; 1 pl.).

Steinhauser (*A.*). — Théorie de l'audition binauriculaire. Contribution à la théorie du son. (181-197, 261-274; 1 pl.).

Lodge (*O.-J.*). — Sur la détermination de la variation de la conductibilité thermique des métaux avec la température, au moyen de la courbe permanente de température le long d'une tige mince uniforme chauffée à l'une de ses extrémités. (198-211, 251-261; 1 pl.).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la théorie électromagnétique de la réflexion et de la réfraction de la lumière. (216-218).

Jacques (*W.-W.*). — Sur la vitesse des sons très aigus. (219-222).

Cook (*E.-H.*). — L'existence de l'éther lumineux. (225-239).

Oldham (*R.-D.*). — Sur le module de cohésion de la glace, et son rôle dans la théorie de l'érosion glaciaire des bassins lacustres. (240-247).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur un nouveau galvanomètre absolu. (274-276).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Nouvelle détermination du rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de la quantité d'électricité. (277-289, 1 pl.).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une propriété des fractions ordinaires. (321-336).

« Si toutes les fractions propres, réduites à leur plus simple expression, et dont les numérateurs et les dénominateurs ne dépassent pas un nombre donné n, sont rangées par ordre de grandeur, alors chacune de ces fractions sera égale à la fraction dont le numérateur et le dénominateur sont respectivement égaux à la somme des numérateurs et à celle des dénominateurs des deux fractions inscrites l'une à gauche, l'autre à droite de la fraction considérée.

» Ainsi, pour $n = 7$, la suite des fractions étant

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},$$

on aura

$$\frac{1}{6} = \frac{1+1}{7+5},\quad \frac{1}{5} = \frac{1+1}{6+4},\quad \frac{1}{4} = \frac{1+2}{5+7},\quad \ldots.$$

» Cette propriété a été énoncée par John Farey dans le *Philosophical Magazine*, en 1816, et peu de temps après démontrée par Cauchy.

» Il existe une autre propriété de cette même suite de fractions, savoir, que la différence de deux fractions consécutives est égale à l'inverse du produit de leurs dénominateurs; par exemple,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6.7},\quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5.6},\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4.5},\quad \ldots.$$

La première propriété découle immédiatement de celle-ci; car si

$$\frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ \frac{a_3}{b_3}$$

sont trois fractions consécutives de la série, telles que l'on ait

$$\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{b_2 b_1}, \quad \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{b_3 b_2},$$

alors

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = a_3 b_2 - a_2 b_3 = 1,$$

d'où

$$a_2(b_1 + b_3) = b_2(a_1 + a_3),$$

et par suite

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}.$$

» Dans les deux paragraphes suivants, l'auteur donne une démonstration élémentaire de ces deux propriétés. Dans les § 4 et 5 la première propriété est démontrée indépendamment de l'autre; le § 7 contient une extension des conditions pour lesquelles ces propriétés ont lieu. Enfin les § 7 à 13 sont principalement consacrés à l'historique de la question. »

Tait (*P.-G.*). — Sur la dissipation de l'énergie. (344-346).

Thomson (*Sir W.*). — Note sur la lettre précédente. (346-348).

Thomson (*Sir W.*). — Sur la motivité thermodynamique. (348-352).

Siemens (*W.*). — Sur la transmission et la distribution de l'énergie par le courant électrique. (352-356, 1 pl.).

Aron (*Hermann*). — Contribution à la théorie du microphone. (377-380).

Fisher (*O.*). — Sur les conditions thermales et la stratification des glaces antarctiques. (381-393).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Nouvelle théorie du magnétisme. (401-411).

Naquet (*A.*). — Considérations sur les deux Mémoires de Sir B.-C. Brodie sur le calcul des opérations chimiques. (418-427).

Brodie (*Sir B.-C.*). — Note sur une objection faite par M. Naquet dans ses « Observations » précédentes. (427-431).

Naquet (*A.*). — Seconde Note. (431-432).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides. (432-437).

Tome VIII; juillet-décembre 1879.

Auerbach (*F.*). — Sur le passage du courant galvanique à travers le fer. (1-18, 138-152, 217-229, 1 pl.).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Sur un principe négligé, qui peut être employé dans les mesures des tremblements de terre. (30-50, 1 pl.).

Heaviside (*O.*). — Sur la théorie des erreurs dans les câbles. (60-74, 163-177).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur la grandeur des molécules. (74-75).

Rowland (*H.-A.*). — Sur la nouvelle théorie du magnétisme terrestre, présentée par MM. Ayrton et Perry; avec une Note sur une nouvelle théorie de l'aurore polaire. (102-106).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur une équation aux différences finies. (120-121).

L'équation

$$u_x = \frac{u_{x-1}}{x} + u_{x-}$$

admet les deux séries d'intégrales particulières

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 1,\quad u_2 = \frac{1}{2},\quad u_3 = \frac{1}{2},\quad u_4 = \frac{1.3}{2.4},\quad u_5 = \frac{1.3}{2.4},\quad \ldots,$$

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 2,\quad u_2 = 2,\quad u_3 = \frac{2.4}{1.3},\quad u_4 = \frac{2.4}{1.3},\quad u_5 = \frac{2.4.6}{1.3.5},\quad \ldots.$$

Si $\varphi(t)$ désigne la fonction génératrice de u_x, l'équation

$$x u_x - (x-2) u_{x-2} - u_{x-1} - 2 u_{x-2} = 0$$

donnera

$$(1-t^2)\frac{d\varphi}{dt} + (-1-2t)\varphi = C;$$

d'où, en intégrant,

$$\varphi = C' \frac{1+t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} + C \frac{\arcsin t + \sqrt{1-t^2}}{(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

et les deux termes de cette expression sont les fonctions génératrices correspondant aux deux suites précédentes.

Muir (*M.-M.-Pattison*). — Affinité chimique. (181-203).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Sur les constructions dans un pays sujet aux tremblements de terre. (209-217).

Airy (*Sir G.-B.*). — Sur la construction et l'usage d'une échelle pour jauger les mesures cylindriques de capacité. (246-250).

Rayleigh (*Lord*). — Recherches optiques, relatives spécialement à la spectroscopie. (261-274, 403-413, 1 pl.).

Lodge (*O.*). — Essai d'une classification systématique des diverses formes d'énergie. (277-286).

Voici le résumé des propositions traitées par l'auteur :

1. Troisième loi de Newton.
2. Définition du travail, + et —.
3. Négation de l'*action à distance*.
4. Définition de la puissance active (*working power*).
5. Définition de l'énergie.
6. Conservation de l'énergie, et première loi de la Thermodynamique.
7. Possibilité de diverses formes d'énergie.
8. Classification des formes d'énergie.
9. Les formes fondamentales d'énergie.
10. Les énergies cinétique et potentielle correspondant aux deux facteurs du produit du travail.
11. Transformation d'une forme dans l'autre.
12. Subdivision ultérieure des formes d'énergie.
13. Table de classification.
14. Distinction entre l'énergie et ce qu'on appelait autrefois *entropie*.
15. Distinction entre l'énergie utilisable ou non utilisable, et entre le travail utile ou inutile.
16. Raison pour laquelle l'énergie des masses ordinaires est utilisable.
17. Raison pour laquelle l'énergie planétaire est presque inutilisable.
18. Raisons pour lesquelles l'énergie moléculaire est en grande partie inutilisable, et seconde loi de la Thermodynamique.
19. Extension de l'utilisation de l'énergie atomique et électrique.
20. Dissipation de l'énergie.

Rosetti (*F.*). — Recherches expérimentales sur la température du Soleil. (324-332, 438-449, 537-550).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la tension des vapeurs près des surfaces courbes de leurs liquides. (382-384).

Thompson (*S.-P.*). — Le pseudophone. (385-390).

Instrument destiné à l'étude de l'audition binauriculaire, au moyen des illusions qu'il produit dans la perception acoustique de l'espace.

Lodge (*O.-J.*). — Sur la détermination de la variation de la conduc-

tibilité thermique des métaux avec la température, au moyen de la courbe permanente de température le long d'une tige mince chauffée à une de ses extrémités, deuxième Mémoire. (510-523).

Schwendler (*L.*). — Sur une méthode simple d'utiliser, pour des usages télégraphiques, une fraction insignifiante du courant principal produit par une machine dynamo-électrique. (558-561).

Tome IX ; janvier-juin 1880.

Wiedemann (*G.*). — Sur la torsion. (1-15, 97-109, 1 pl.).

Guthrie (*Fred.*). — Sur certaines vibrations des solides. (15-20).

Challis. — Sur la « Regula tertia philosophandi » de Newton. (21-35).

» Le Livre III des *Principes de Newton,* auquel est attaché exclusivement le titre *De Mundi Systemate,* contient au commencement quatre règles de raisonnement philosophique, accompagnées chacune d'explications. De ces règles, la première, la deuxième et la quatrième, avec leurs explications, ont été universellement adoptées, et n'exigent aucune considération spéciale. La troisième règle, énoncée en ces termes : *Qualitates corporum quæ intendi et remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt,* est accompagnée de remarques explicatives spéciales et de définitions relatives aux qualités ultimes des corps. Le but de cet article est d'indiquer et d'appliquer cette règle dans la conduite d'une théorie physique et de discuter les définitions dont Newton l'a accompagnée ».

Rayleigh (*Lord*). — Recherches d'optique, concernant spécialement le spectroscope. (40-55).

Walenn (*W.-H.*). — Note sur une méthode de preuve des opérations. (56-59).

Poynting (*J.-H.*). — Sur la graduation du sonomètre. (59-64).

Fletcher (*L.*). — La dilatation des cristaux par le changement de température. (81-96).

Fleming (*J.-A.*). — Sur une nouvelle forme de balance de résistance, adaptée à la comparaison des bobines-étalons. (109-117).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Photomètre de dispersion. (117-120).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. — IX. Remarques pratiques sur ce sujet, avec des exemples. (121-123, 271-273).

Voir *Philos. Magazine*, t. V, p. 218 (*Bulletin*, II_2, 101).

Lodge (*O.-J.*). — Sur les courants intermittents et sur la théorie de la balance d'induction. (223-146).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Note sur la mesure de l'intensité du son. (174-177).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur la trajectoire libre moyenne des molécules. (177-180).

Fletcher (*L.*). — Notes cristallographiques. (180-191, 1 pl.).

Bridge (*J.*). — Sur un appareil de calcul fondé sur les baguettes de Napier. (191-197, 1 pl.).

L'auteur fait voir comment, en perfectionnant la manipulation de l'appareil décrit par Napier dans sa *Rhabdologia*, on peut en tirer un assez grand parti pour rendre les calculs plus sûrs et moins pénibles.

Lindemann (*F.*). — Sur les formes des vibrations des cordes pincées et percutées. (197-221).

Wright (*C.-R.-Alder*). — Sur la détermination de l'affinité chimique en fonction de la force électromotrice. (237-266, 331-347).

Rayleigh (*Lord*). — Observations acoustiques. III. (278-283).

Thomson (*J.-J.*). — Sur la théorie de la lumière de Maxwell. (284-291).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (292-301).

Cockle (*Sir James*). — Note supplémentaire sur les formes primaires. (348-351).

Voir une Note ajoutée au travail de l'auteur, *Philos. Mag.*, t. L, décembre 1875 (*Bull.*, II_2, 94).

Preston (*S.-Tolver*). — Sur la méthode de recherche des causes. (356-367).

Morisot. — Sur la chaleur spécifique et la conductibilité des corps. (386-389).

Clausius (*R.*). — Comment se comporte l'acide carbonique au point de vue de la pression, du volume et de la température. (393-408).

Wild (*H.*). — Théorie complète du magnétomètre bifilaire, et nouvelles méthodes pour la détermination de l'intensité horizontale absolue du magnétisme terrestre, ainsi que de la température et des coefficients d'induction des aimants. (443-445).

Herschel (*J.*). — Sur la détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (446-448).

Challis. — Supplément aux recherches sur la théorie hydrodynamique des forces physiques, comprenant une théorie du microphone. (448-452).

Mascart. — Sur la théorie des courants d'induction. (452-455).

Legebeke (*G.-J.*). — Sur un théorème général énoncé par M. Clausius relativement à l'influence électrique. (458-460).

Tome X ; juillet-décembre 1880.

Venn (*J.*). — Sur la représentation diagrammatique et mécanique des propositions et des raisonnements. (1-18).

Dickson (*J.-D.-A.*). — Sur le critérium au moyen duquel on peut déterminer le point critique d'un gaz. (40-43).

Ayrton (*W.-E.*) et ***Perry*** (*J.*). — Sur la détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (43-53).

Réponse aux critiques adressées par le major Herschel dans le journal *Nature.*

Cellérier (*C.*). — Remarque sur une simplification de la théorie des mouvements vibratoires. (57-60).

Rayleigh (*Lord*). — Sur la résultante d'un grand nombre de vibrations de même acuité (Pitch) et de phase arbitraire. (73-78).

Baily (*W.*). — Les vibrations d'une pellicule en rapport avec le phonéidoscope. (79-89).

Thomson (*Sir W.*). — Statique des tourbillons. (97-109).

L'objet de ce Mémoire est le *mouvement constant* des tourbillons.

Le mouvement système quelconque de matière solide, ou fluide, ou en partie solide et en partie fluide est dit *constant* quand la configuration du système reste égale et semblable à elle-même, et que les vitesses des parties homologues sont égales, de quelque manière que la configuration puisse se mouvoir dans l'espace, et à quelque distance que les particules matérielles individuelles puissent, à un instant donné, se trouver des points homologues à leurs positions à un autre instant.

Thomson (*Sir W.*).— Sur les oscillations causées par la gravitation dans l'eau animée d'un mouvement de rotation. (109-116).

» C'est là, en réalité, le sujet traité par Laplace dans sa théorie dynamique des marées, et cela avec la plus grande généralité, à une importante restriction près, le mouvement de chaque particule devant être infiniment peu différent de la direction horizontale, et la vitesse toujours égale pour toutes les particules situées sur une même verticale. Cela implique que la plus grande profondeur doit être très petite en comparaison de la distance qu'il faut parcourir pour trouver l'écart de niveau de la surface de l'eau, altéré d'une fraction sensible de sa valeur maximum. Dans la présente Note, l'auteur adopte cette restriction, et de plus, au lieu de supposer, comme le fait Laplace, la surface d'un sphéroïde solide, en totalité ou en grande partie recouverte par l'eau, il traite le problème plus simple d'une étendue d'eau assez restreinte pour que la figure d'équilibre de sa surface ne présente pas une courbure sensible. »

Rayleigh (*Lord*). — Sur le pouvoir résolvant des télescopes. (116-119).

Hennessy (*H.*). — Sur la figure de la planète Mars. (119-122).

Wiedemand (*E.*). — Sur un moyen pour déterminer la pression à la surface du Soleil et des étoiles, avec quelques remarques spectroscopiques. (123-125).

Plateau (*J.*). — Une application des images accidentelles. (134-136).

Clark (*J.-W.*). — Sur la manière dont se comportent les liquides et les gaz dans le voisinage de leur température critique. (145-155).

Thomson (*Sir W.*).—Vibrations d'un tourbillon en colonne. (155-168).

Mc Coll (*H.*). — Sur la représentation diagrammatique et mécanique des propositions et des raisonnements. (168-171).

Hummel (Rev. *F.-H.*). — Développement par soustraction. (190-199).

On obtient la racine carrée de 64, par exemple, en retranchant de 64 les termes successifs de la série 2, 4, 6, ..., 14. On trouve de même la racine cubique de $n^3 = 729$, en retranchant successivement les termes de la série 6, 18, 36, ..., 168, 216, formée au moyen des nombres triangulaires multipliés par 6. Dans la présente Note, l'auteur généralise cette méthode, en développant la valeur générale de l'expression

$$u_n = n^m - n - [(n-1)^m - (n-1)] = n^m - 1 - (n-1)^m$$
$$= -1 + mn^{m-1} - \frac{1}{2} m(m-1) n^{m-2} + \ldots - (-1)^m (mn-1).$$

La racine $m^{ième}$ du nombre n^m s'obtient par la soustraction successive des nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$.

Glazebrook (*R.-T.*). — Notes sur le prisme de Nicol. (247-254).

Clausius (*R.*). — Sur l'emploi du potentiel électrique pour la détermination des forces pondéromotrices et électromotrices. (255-279).

Exner (*Fr.*). — La cause de la production d'électricité par le contact de métaux hétérogènes. (280-295).

Craig (*Th.*). — Sur le mouvement permanent dans un fluide visqueux incompressible. (342-357).

Macfarlane (*A.*). — Sur la décharge explosive de l'électricité. (389-407).

Tome XI, janvier-juin 1881.

McColl (*H.*). — Logique *implicationnelle* et équationnelle. (40-43).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Note sur les articles de M. Exner au sujet de l'électricité de contact. (43-54).

Kirchhoff (*G.*). — Sur la mesure des conductivités électriques. (81-91).

Hastings (*Ch.-S.*). — Théorie de la constitution du Soleil, fondée sur les observations spectroscopiques, originales ou autres. (91-103).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur l'article du professeur O. Reynold,

intitulé : « Sur certaines propriétés *dimensionnelles* de la matière à l'état gazeux ». (103-109).

Glan (*P.*). — Sur un spectro-télescope. (110-113).

Oberbeek (*A.*). — Sur le frottement dans les surfaces libres des liquides. (132-147).

Draper (*J.-W.*). — Sur le phosphorographe d'un spectre solaire et sur les raies de sa région infra-rouge. (157-169).

Rayleigh (*Lord*). — Sur la copie des réseaux de diffraction, et sur quelques phénomènes qui s'y rattachent. (196-205).

Rayleigh (*Lord*).— Sur les images formées sans réflexion ni réfraction. (214-218).

Preston (*S.-Tolver*). — Sur l'action à distance. (218-220).

Thomson (*J.-J.*). — Sur les effets électriques et magnétiques produits par le mouvement de corps électrisés. (229-249).

Challis. — Explications théoriques de la transmission rectiligne et de la diffusion spontanée du son et de la lumière. (249-2..).

Rowland (*H.-A.*). — Sur la nouvelle théorie des attractions magnétiques, et sur la rotation magnétique de la lumière polarisée. (254-261).

Voir *Bulletin*, V_2, 216.

Hennessy (*H.*). — Sur les figures des planètes. (283-285).

Voir *Bulletin*, V_2, 88. L'auteur remarque que la formule donnée par lui dans les *Comptes rendus* peut s'écrire plus simplement sous la forme

$$e = \frac{5}{2} Q \left(\frac{D}{5D - 3D'} \right),$$

Q étant le rapport de la force centrifuge à la gravité à son équateur, D la densité moyenne de la planète, et D' sa densité à la surface. Mais, dans l'hypothèse de la fluidité primitive, on a

$$e' = \frac{Q}{q} e_1,$$

e_1 étant l'aplatissement de la Terre et q le rapport de la force centrifuge à l'équateur terrestre à la gravité. On en tire

$$\frac{e}{e'} = \frac{5}{2} \frac{e_1}{q} \frac{D}{5D - 3D'}.$$

Pour toute planète pour laquelle on peut admettre que le rapport de la densité moyenne à la densité superficielle soit à peu près le même que pour la Terre, soit $\frac{5.6}{2.6}$, on aura

$$\frac{e}{e'} = \frac{70}{101}\ \frac{e_1}{q} = \frac{207}{303}.$$

L'auteur applique ses formules aux planètes Mercure, Vénus et Mars, et en tire des résultats intéressants.

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur la mesure des petites résistances. (291-295).

Abney. — Sur les raies de la région infra-rouge du spectre solaire. (300-301).

Struve (*O.*). — Sur une proposition adressée à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg par le général Schubert, relativement à l'arc russo-scandinave. (313-335).

Cet article a paru en 1861 dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III, 396-424. Il est reproduit ici à cause de l'importance des considérations qu'il renferme, et qui ne paraissent pas être assez répandues en Angleterre.

Boys (*C.-V.*). — Une machine intégrante. (342-348).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur une méthode pour comparer les capacités électriques de deux condenseurs. (370-377).

Browne (*W.-R.*). — Sur l'action à distance. (379-381).

Stoney (*G.-J.*). — Sur les unités physiques de la nature. (381-390).

Preston (*S.-T.*). — Sur l'importance des expériences relativement à la théorie mécanique de la gravitation. (391-393).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur la théorie de l'action électromagnétique, fondée sur les tourbillons moléculaires. (398-413).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur les battements de consonances de la forme $h : 1$. (420-436 et 492-506, 4 pl.).

Macfarlane (*A.*). — Analyse des degrés de parenté. (436-446).

Watson (*H.-W.*) et *Burbury* (*S.-H.*). — Sur la loi de la force entre les courants électriques. (451-466).

Lodge (*O.-J.*). — Sur l'action à distance et la conse[illegible] l'énergie. (529-534).

Tome XII : juillet-décembre 1881.

Thompson (*S.-P.*). — Sur la conservation de l'électrici[illegible] l'unité absolue du potentiel électrique. (13-25).

Poynting (*J.-H.*). — Changement d'état : solide-liquid[illegible] 1 pl.).

Thomson (*J.-J.*). — Sur quelques expériences électroma[illegible] avec des circuits ouverts. (49-60).

Rayleigh (*Lord*). — Sur la théorie électromagnétique [illegible]mière. (81-101).

Thompson (*S.-P.*). — Sur l'opacité des cristaux de to[illegible] (112-129).

Tait. — Note sur la conductivité thermale et sur les [illegible] changements de température, de chaleur spécifique et d[illegible]tivité sur la propagation des ondes planes de chaleur. ([illegible]

Airy (*Sir G.-B.*). — Sur une interruption systématiq[illegible] l'ordre des valeurs numériques des fractions ordinaires [illegible] en séries suivant l'ordre de leurs grandeurs. (175-1[illegible]

[illegible] fractio[illegible] [illegible] 3 [illegible] [illegible] remarq[illegible] [illegible] [illegible] voici le[illegible] [illegible] exprimés [illegible]

[illegible]

[illegible] 10, 11[illegible]

[illegible] grandes diff[illegible] [illegible] général.

[illegible] — [illegible] critiqu[illegible]

B[illegible] (*F.-D.*). — Attraction [illegible] (2[illegible]).

Schuster (*A.*). — Sur la théorie dynamique de la radiation. (261-266).

Marquand (*Allan*). — Sur les diagrammes logiques pour n termes. (266-270).

Bosanquet (*R.-M.*). — Sur l'histoire de la théorie des battements des consonances fausses. (270-282).

Gray (*Th.*). — Sur la meilleure disposition du pont de Wheatstone pour la mesure d'une résistance particulière. (283-290).

Clausius (*R.*). — Sur la détermination théorique de la pression de la vapeur et des volumes de la vapeur et du liquide. (381-390).

Muir (*Th.*). — Sur les déterminants gauches. (391-394).

Brioschi a démontré, en 1855, en même temps que Cayley, que tout déterminant d'ordre pair peut s'exprimer par une fonction de Pfaff. La condition de parité de l'ordre a jusqu'ici été crue nécessaire. L'auteur se propose, dans cette Note, de montrer que cette restriction n'est pas nécessaire.

Dans un numéro récent du *Quarterly Journal of Mathematics*, on trouve une nouvelle expression du produit de deux déterminants, au moyen d'un déterminant dont les éléments sont formés avec les sommes et les différences des éléments correspondants des déterminants donnés. Ainsi

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \dots & a_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_n & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b'_1 & \dots & b_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ b'_n & \dots & b_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_1 + b'_1 & \dots & a_1^{(n)} + b_1^{(n)} & a'_1 - b'_1 & \dots & a_1^{(n)} - b_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n + b'_n & \dots & a_n^{(n)} + b'_n & a'_n - b'_n & \dots & a_n^{(n)} - b_n^{(n)} \\ a'_1 - b'_1 & \dots & a_1^{(n)} - b_1^{(n)} & a'_1 + b'_1 & \dots & a_1^{(n)} + b_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n - b'_n & \dots & a_n^{(n)} - b_n^{(n)} & a'_n + b'_n & \dots & a_n^{(n)} + b_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir le carré d'un déterminant par cette formule, on remplacera le second déterminant par le premier dans lequel on aura échangé entre eux les indices supérieurs et inférieurs, ce qui donnera pour résultat un déterminant gauche, dont la racine carrée se présentera sous la forme d'une fonction de Pfaff. Donc tout déterminant peut se ramener à cette forme.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (...).

Tome III : 1879.

Morel (A.). — Théorie des axes radicaux. (Suite et

Les cercles isogonaux à trois cercles fixes ont même axe ra... rèmes de Hart et de Casey : condition que doivent remplir quat... être tangents à un cinquième, A, B, C, D étant les points de con...

$$\frac{AB}{\sqrt{r_1 r_2}}\,\frac{CD}{\sqrt{r_3 r_4}} \pm \frac{AD}{\sqrt{r_1 r_4}}\,\frac{BC}{\sqrt{r_2 r_3}} \pm \frac{AC}{\sqrt{r_1 r_3}}\,\frac{BD}{\sqrt{r_2 r_4}} = 0 \ (...$$

Le rapport des distances circulaires d'un point à deux cercl... dans l'inversion. L'inverse d'une anallagmatique est une anal... Condition de possibilité de la construction, entre deux cercles do... rieur à l'autre, d'une couronne de cercles tangents aux deux ce... chacun à ses deux voisins : a, b, c, rayons et distance des centre... pour qu'une couronne de n cercles entoure h fois le cercle intéri...

$$\sin^2\frac{h\pi}{n} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2}.$$

Kliszowski. — Note sur le second degré. (9-13).

Méthode pour vérifier si les racines réelles sont comprises en... que leur impose la nature de la question.

Malloisel. — Note de Géométrie. (13-17).

Formation des coniques par le foyer et la dir[ectrice] ... la polaire du premier.

D... (Georges). — Propriétés des nombres. (...

[illegible] la suite des nombres ... sommes des termes ... Dans tout ... trouve ...

L... (Emile). — Note sur un p[roblème] ...

[illegible]

et tangente à une droite donnée », habituellement présenté comme exercice sur le IIIe Livre de Géométrie, se résout par les deux premiers Livres.

Morel (*A.*). — Note de Géométrie. (22-24).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note sur la parabole. (33-36).

Morel (*A.*). — Note de Trigonométrie. (36-43).

Relations entre les erreurs des données et celles des résultats ([1]).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note sur la divisibilité. (43-46).

Ocagne (*Maurice d'*). — Théorie de l'incommensurabilité. (65-70, 97-104).

Définition de la limite. — Condition d'existence d'une limite pour une quantité variable. — Plus grande commune mesure. — Définition de l'incommensurabilité. — Nombres incommensurables.

Racines carrées incommensurables. — Calcul des nombres incommensurables. — Grandeurs géométriques incommensurables. Exemple de la diagonale du carré, développée géométriquement en fraction continue :

$$\alpha = \frac{d}{c} = 1 + \frac{d-c}{c} = 1 + \frac{c}{d+c} = 1 + \frac{1}{1+\alpha} = 1 + = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

Pillet. — Éléments de la théorie du lavis. (70-79, 105-113, 151-155, 172-177, 212-217, 244-249.)

Généralités. Le lavis a pour but d'étudier et de rendre, à l'aide de couleurs, les différences d'éclat ou de couleur que présentent les corps suivant leurs positions relativement à la source de lumière et au spectateur.—Principe des orientations. — Poli et dépoli. — Un plan dépoli se conduit comme s'il avait une lumière propre. — Loi du cosinus d'incidence. — Lignes d'égal éclairement ou d'égal éclat. — Rayons de reflets. — Les rayons atmosphériques produisent l'effet d'un soleil plus pâle, symétrique du soleil vrai. — Les surfaces dans l'ombre sont d'autant plus noires qu'elles reçoivent moins de rayons indirects. — L'ombre propre d'un corps décroît de la ligne d'ombre au rayon vecteur normal. — Lignes d'égale teinte sur une sphère dépolie. — La ligne la plus claire est voisine du contour apparent.

Corps polis, c'est-à-dire réfléchissant spéculairement les rayons lumineux. — Aspect d'un plan, d'une sphère polie. — Point brillant correspondant à chaque

---

([1]) Les rédacteurs d'un journal pour les élèves ne sauraient trop insister sur les questions de ce genre, malheureusement trop négligées par beaucoup de professeurs. Il est très fréquent, en effet, de voir, sous le vain prétexte de les « exercer au calcul », demander aux élèves de déterminer des résultats avec une exagération « absurde » d'approximation. On fausse ainsi leur jugement, sans grand profit pour leur habileté dans la manipulation des chiffres. L.

direction de rayons lumineux. — La lumière diffuse revient à des rayons parallèles venant de toutes les directions. — Lignes d'égale teinte, l'intensité des rayons variant avec l'incidence. Elles sont les intersections de la sphère et des cônes du second ordre. — Corps mi-polis. Échelle de teintes. Conventions.

Tons simples et purs (jaune, rouge, bleu). — Tons simples, rabattus, composites du premier, du deuxième et du troisième ordre. — Couleurs complémentaires. — Teintes conventionnelles. — Lavis en camaïeu. — Couleur des objets. — Saturation; sur et sous-saturation; orientation correspondante.

Transparence et intensité d'une teinte. Règles pratiques.

Principe des distances. — Différents plans. — L'effet des distances est de diminuer l'éclat relatif des objets éloignés par suite de la lumière réfléchie par l'atmosphère, et en second lieu de colorer de bleu la couleur propre de l'objet. — Manière de rendre en camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance. — Règle générale, prendre le ton des lointains comme base. — Effets de contraste et d'irridiation. — Dans le dessin on exagère ces effets.

Reflets. — Rayon terrestre principal. — Rayon aéro-terrestre principal incliné à 45°, de droite à gauche et de bas en haut. — Contre-ombres. — Lavis pratique. — Teinte générale du ton: teinte d'ébauche sur les ombres propres ou portées, dégradée de haut en bas; modelé des moulures considérées comme corps dépolis; lavis des surfaces planes, avec une teinte égale à celle des éléments parallèles des moulures, mais placées en réserve, c'est-à-dire en ménageant les filets de reflets sur les arêtes regardant le rayon aéro-terrestre. — Contre-ombres et retouches.

Combier. — Note de Géométrie. (79-81, 120-126, 129-136).

L'auteur, après avoir, par un calcul trigonométrique assez compliqué, résolu le problème : « Construire un triangle de forme donnée dont les sommets s'appuient sur trois circonférences concentriques données », en donne une solution géométrique simple; mais, s'étant proposé de donner un exemple de l'aide que le calcul peut prêter à la Géométrie, il a soin d'observer qu'il n'a été conduit à la solution géométrique que par la construction graphique de la solution trigonométrique (¹).

Suter (Henri). — Histoire des Mathématiques. (Suite.). (82-87).

Philosophie d'Aristote (384 av. J.-C.). — Arrêt dans les progrès des Mathématiques.

Bernier (F.). — Formule d'approximation pour la racine carrée. (114-117).

a étant une valeur approchée de $\sqrt{N}$, la correction $\sqrt{N} = a + \dfrac{2a(N-a^2)}{3a^2+N}$ ne laisse subsister qu'une erreur au plus égale à quatre unités de l'ordre décimal double de celui du dernier chiffre de a.

(¹) L'argument est spécieux, et l'exemple n'est sans doute pas des mieux choisis; car « pourquoi » la solution géométrique, d'ailleurs fort ancienne,

Morel (*A*.). — Question d'examen. (117-119).

Lemoine (*E*.). — Note sur un théorème d'Arithmétique. (119).

L'égalité en nombres entiers $x^2 \pm 2\lambda = k^2$ entraîne $x^2 \pm \lambda = (x \pm \alpha)^2 + \alpha^2$.

Morel (*A*.). — Note sur la divisibilité. (137-142).

Caractères de divisibilité par tout nombre premier inférieur à 100.

Morel (*A*.). — Note de Géométrie descriptive. (142-145).

Le centre du cercle de base d'un cône droit est foyer de la projection de toute section plane.

Lecoq (*H*.). — Note de Mécanique et de Géométrie. (161-167).

Construction du rayon de courbure de l'ellipse, au moyen du point correspondant sur le cercle concentrique de rayon $a+b$. Du point M décrire un cercle passant au point correspondant C du cercle précité, et construire son intersection I avec le diamètre conjugué de OM. La perpendiculaire, élevée de I sur la droite MI, passe au centre de courbure de l'ellipse au point M.

Morel (*A*.). — Variation du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$. (167-171).

Morel (*A*.). — Note sur le triangle. (177-182, 202-207, 233-239, 268-274, 298-303, 329-336, 359-363).

Formules nouvelles du Rév. James Booth (traduit de l'anglais). Un triangle ABC, de surface $\Delta = pr$, étant donné, notations adoptées : r, r', r'', r'''; ω, $\Omega, \Omega', \Omega''$ (*mauvais. Pourquoi pas* $\Omega', \Omega'', \Omega'''$?) rayons et centres des cercles inscrits et exinscrits; R et O, du cercle circonscrit. — Cercle orthocentrique, ou des neuf points, circonscrit au triangle orthocentrique, passant par les pieds des hauteurs; ρ et H, rayon et centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique

$$4R + r = r' + r'' + r''' \text{ (1)},$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2};$$

enfin, h', h'', h''' désignant les hauteurs, et q', q'', q''' les distances de O aux côtés du triangle,

$$\sum \frac{q}{h} = 1, \quad \sum \frac{1}{h} = \frac{1}{r}.$$

---

croyons-nous, n'aurait-elle pas précédé, plutôt que suivi, sa compagne, de laquelle elle n'est en somme dans aucune dépendance forcée? Ce n'est qu'une application des plus élémentaires de la théorie des figures semblables d'orientation variable avec le module, ou de la « rotation avec épanouissement ». L.

(1) Cette formule devrait s'écrire : $4R = \Sigma r$; car le signe de r est contraire à ceux de r', r'', r''', en bonnes notations.

Formules de J. Booth :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \ (^1).$$

$$\Delta = pr = \sqrt{rr'r''r'''}, \quad q' + q'' + q''' = R + r.$$

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C \cos C \cos A = \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2},$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Si δ', δ'', δ''' sont les surfaces des triangles ayant les côtés pour bases et leur sommet à l'orthocentre, et π', π'', π''' les distances de l'orthocentre aux côtés,

$$\pi' + \pi'' + \pi''' = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{2R},$$

$$h + h' + h'' - (\pi' + \pi'' + \pi''') = 2(R + r).$$

Soient x, x_1; y, y_1; z, z_1 les côtés des carrés inscrits et exinscrits, s'appuyant sur l'un des côtés

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z_1} = 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}\right) = \frac{2}{r}.$$

Morel (A.). — École spéciale militaire. Concours de 1879. (182-188).

Lionnet. — Limite de l'erreur commise en remplaçant la circonférence, ou le périmètre d'un polygone régulier circonscrit, par celui d'un polygone inscrit semblable au premier. (193-197).

Launoy. — Note de Géométrie sur la normale à l'ellipse. (197-202).

Kœhler. — Théorie des centres des moyennes harmoniques. (225-229, 257-263, 289-293, 321-329, 354-359).

Historique. — Maclaurin; Poncelet; de Jonquières. — Cremona, et les centres harmoniques des divers ordres.

Règle des signes. — Proportion harmonique, ou rapport anharmonique $= -1$; Faisceau harmonique. — Polaire d'un point par rapport au système de deux droites, droite lieu du conjugué harmonique du point, par rapport à leurs intersections par les rayons qui pivotent autour du point.

Progression ou échelle harmonique, perspective de divisions successives égales sur une droite parallèle à la droite qui joint l'œil au point origine des segments. On a

$$\frac{1}{pa} - \frac{1}{pb} = \frac{1}{pb} - \frac{1}{pc} = \frac{1}{pc} - \frac{1}{pd} = \ldots.$$

---

(1) Cette formule serait mieux sous la forme $\sum \frac{1}{r} = 0$.

Construction de Poncelet d'une échelle harmonique, par rapport à un point et à un segment déterminé.

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points en ligne droite; il est perspective du centre des moyennes distances de points en ligne droite, le point origine étant le point de fuite de la droite sur laquelle sont prises les moyennes distances; q étant centre des moyennes harmoniques de p, on a

$$\frac{n}{pq} = \sum \frac{1}{pa}.$$

Le même centre des moyennes harmoniques d'un groupe de n points correspond à $n-1$ pôles différents. — Centre des moyennes harmoniques de points en ligne droite affectés de coefficients (poids). — Si les n points sont les intersections de n droites fixes par le rayon mobile d'un faisceau de centre P, le lieu du centre harmonique relatif à P des intersections, affectées de poids fixes pour chaque droite, est une droite, polaire rectiligne de P. — Le point d'intersection de l'une des droites par la polaire rectiligne de P par rapport aux $(n-1)$ autres appartient à la polaire rectiligne de P par rapport aux n droites (Cayley). — Les droites qui joignent respectivement les points d'intersection des trois côtés d'un triangle, par une transversale, à leurs conjugués par rapport aux sommets, sont concourantes.

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points dans un plan ou point fixe par lequel passe constamment l'axe des moyennes harmoniques par rapport au faisceau des rayons allant à ces points, lorsque le sommet du faisceau décrit la droite origine.

Centres harmoniques des divers ordres.—Les rapports des distances du pôle et du centre harmonique du $r^{\text{ième}}$ ordre (par rapport au système de points situés avec eux sur la même droite) au même point du système étant tous formés et combinés, r à r, de toutes les manières possibles par multiplication, la somme des produits obtenus est nulle. — Le pôle p, pour lequel le point q est centre harmonique du second ordre, par rapport à trois points, est lui-même le centre du premier ordre du même système par rapport au centre q, pris pour pôle. — Le nombre des centres est égal à l'ordre. — Si q_1 et q_2 sont les centres du second ordre de (a, b, c) par rapport au pôle p, le centre du premier ordre Q du système (q_1, q_2) par rapport à p est en même temps le centre harmonique de (a, b, c) par rapport au même pôle p. — Si (q_1, q_2) (q'_1, q'_2) sont respectivement les centres harmoniques de (a, b, c) pour deux pôles différents p et p', ces deux points auront même conjugué harmonique par rapport aux deux couples de centres harmoniques du second ordre. — Les centres harmoniques du second ordre de tous les points de la droite abc, par rapport au même système (abc), forment une involution quadratique. — Ces propriétés sont projectives.

Construction des centres harmoniques du second ordre d'un système de trois points. Le cas du pôle à l'infini se résout immédiatement, comme représentant les racines de l'équation $3X^2 - 2S_1X + S_2 = 0$. Le cas général s'en déduit.

Polaire rectiligne et conique d'un point par rapport à un triangle. — Le lieu des centres harmoniques du second ordre des intersections des trois côtés du triangle par les transversales issues d'un pôle p est une conique circonscrite au triangle, polaire conique de p. — La polaire rectiligne du point, par rapport aux côtés du triangle, est en même temps sa polaire par rapport à la polaire conique. — Le lieu des points dont les polaires rectilignes passent en p est la polaire conique de p, et le lieu des points dont la polaire conique passe

en q est la polaire rectiligne de q. — Les polaires coniques de points en ligne droite concourent en un point dont la droite est polaire du second ordre. — Toutes les droites qui passent par un point ont leurs pôles sur la polaire conique du point. — La tangente à la polaire conique du point p, menée par le sommet A, est le rayon conjugué harmonique de Ap par rapport aux côtés AB, AC. — Les points situés sur les côtés du triangle ont deux droites pour polaire conique (dont le côté lui-même). — La polaire conique du centre de gravité est une ellipse circonscrite ayant son centre en ce point. — Le pôle du cercle circonscrit est le point de concours des droites allant des sommets aux points qui divisent les côtés opposés en raison directe des carrés des côtés adjacents. — Le lieu des points dont les polaires sont des paraboles est une ellipse, tangente aux trois côtés en leurs milieux. — Celui dont les polaires sont des hyperboles équilatères est une droite, polaire du point de concours des hauteurs.

Cochez (*C.*). — Note d'Algèbre. (230-232).

Maximum et minimum de la fraction homogène du second ordre.

Triangles inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre. O, R, centre et rayon du cercle circonscrit; ω, r, du cercle inscrit; $D = O\omega$; D', D'', D''', mêmes distances pour les cercles de contact exinscrits,

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2;$$

d et δ, distances de O au pôle et à la polaire communs aux deux cercles.

$$(D + \delta)\, d = R^2, \quad (d - D)\, \delta = r^2.$$

Cercle orthocentrique, A', B', C', ou T'

$$\Delta' = \Delta\, 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Les perpendiculaires abaissées des sommets de T sur les côtés de T' passent en O. — H est le centre du cercle inscrit à T',

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \quad OH^2 = (3R)^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \quad AH^2 + BH^2 + CH^2 - OH^2 = 3R^2.$$

ρ', ρ'', ρ''', rayons des cercles exinscrits au triangle orthocentrique : soit

$$P^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2};$$

$$\rho = \frac{P^2 - 4R^2}{2R}, \quad \rho' = \frac{P^2 - a^2}{2R}, \quad \ldots, \quad \rho + \rho' + \rho'' + \rho''' = \frac{P^2 - 2R^2}{R} \text{ (1)}.$$

On a encore

$$q'^2 + q''^2 + q'''^2 = R(R - \rho).$$

$$3\Sigma D^2 = 4\Sigma a^2 + 4\, OH^2,$$

$$16R^2 = \Sigma r^2 + \Sigma a^2,$$

$$\sum \frac{a}{r'} \frac{\Sigma a}{\Sigma r'} = 4,$$

$$H\omega^2 = 4R^2 - 8Rr + \Sigma ab - \Sigma a^2,$$

$$H\omega^2 + \Sigma H\Omega^2 = \Sigma D^2 + 4\, OH^2.$$

---

(1) Même observation que ci-dessus; le signe de ρ doit, logiquement, être

Distance du centre de gravité K aux centres des cercles étudiés

$$\omega K^2 = \frac{5}{36}\sum a^2 + \frac{1}{6}\sum ab + r^2, \quad \omega K^2 + \sum \Omega K^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}\sum a^2;$$

$$OK^2 = R^2 - \frac{\Sigma a^2}{9}, \quad OH = 3OK.$$

La somme des carrés des douze droites qui joignent les sommets aux points de contact des cercles sur les côtés opposés est quintuple de celle des carrés des côtés. — Celle des carrés des douze distances des milieux des côtés aux centres des cercles de contact, augmentée de celle des côtés, est égale à douze fois le carré du cercle circonscrit. — La somme des aires des quatre triangles formés en joignant trois par trois les points de contact est constante et égale au double de l'aire du triangle. — Valeurs des côtés, angles et surface des triangles excentraux $\Omega\Omega'\Omega''$, $\Omega\,\omega\,\Omega'$, etc.

$$\Omega\Omega'^2 = (r' + r'')^2 + b^2.$$

Les puissances des centres des cercles de contact, par rapport à tout cercle passant au centre du cercle circonscrit, ont une somme constante, triple du carré du diamètre de ce dernier. — Si l'on forme successivement les triangles excentraux d'un triangle, de son excentral, et ainsi de suite, la forme du triangle a pour limite l'égalité des trois angles. — Un quelconque des quatre centres des cercles de contact est l'orthocentre du triangle des trois autres. — Le cercle des neuf points bissecte tous les rayons vecteurs menés de l'un des centres de contact à la circonférence des trois autres. — Les droites qui joignent les centres Ω aux milieux des côtés opposés du triangle sont concourants. — Cercles radicaux d'un triangle ayant pour diamètre l'une des six distances des centres des cercles de contact. — Les six axes radicaux des cercles de contact, pris deux à deux, se coupent à angle droit au milieu des côtés du triangle et sont parallèles aux côtés du triangle excentral principal $\Omega\Omega'\Omega''$.

Le cercle des neuf points est tangent aux trois cercles de contact. — La somme des distances de son centre aux quatre centres de ceux-ci est égale à six fois le rayon du cercle circonscrit. — La somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles de contact est égale au produit de son diamètre par la somme des distances, aux mêmes points, du centre du cercle des neuf points.

Dostor (Georges). — Sommation directe et élémentaire des cinq premières puissances des n premiers nombres, naturels ou impairs. (239-243).

La formule de récurrence

$$n^2 = A_n - A_{n-1} \quad \text{où} \quad A_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donne Σn^2. On obtient aussi

$$\frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = \frac{n+n+1}{3}, \quad \Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

---

pris contraire de celui de ρ', ρ'', ρ'''. En observant cette règle, on obtient l'expression beaucoup plus simple

$$\Sigma\rho = 2R.$$

De même

$$n^6 = B_n - B_{n-1} \quad \text{où} \quad B_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \frac{(\Sigma n^2)^2}{\Sigma n^3} = \left[\frac{n+(n+1)}{3}\right],$$

$$\Sigma(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Thual. — Note d'Algèbre. (251-252).

Transformation de $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

Dostor (Georges). — Sommation directe et élémentaire des cinq premières puissances des n premiers nombres, naturels ou impairs. (Suite). (263-267).

$$\sum n^4 = \sum n^2 \frac{3n^2+3n-1}{5}, \quad \sum (2n-1)^4 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)(12n^2-\cdots}{30}$$

Posant $D_n = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$, on voit que $n^5 = D_n - D_{n-1}$, d'où

$$\sum n^5 = D_n = \sum n^3 \frac{2n^2+2n-1}{3}, \quad \sum (2n-1)^5 = \frac{1}{3}n^2(16n^4-20n^2+\cdots$$

$$4(\Sigma n)^3 = 3\Sigma n^5 + \Sigma n^3.$$

Ocagne (Maurice d'). — Note sur la soustraction des fractions (275-276).

Morel (A.). — Note d'Algèbre. (294-297).

Quelques expressions sur les nombres figurés de Pascal et de Fermat. — Théorème de Goldbach : dans la fraction $\frac{1}{(m-1)^{p+1}}$, si l'on donne à m et p toutes les valeurs positives entières, la somme de toutes ces fractions a pour limite l'unité.

Ocagne (Maurice d'). — Sur le minimum d'une expression algébrique à plusieurs variables. (304-308).

Recherche élémentaire du minimum de la somme des carrés de m fonctions linéaires à $m-1$ variables.

Kœnigs. — Note de Géométrie. (308-310).

Tout triangle autopolaire (vulg. conjugué) par rapport à une conique est inscrit à un cercle dont la puissance par rapport au centre de la conique est (a^2+b^2). — Théorème analogue dans l'espace.

Malloisel (R.). — Note de Géométrie, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre. (365-369).

Les cordes de contact des côtés opposés se coupent à angle droit, en un point constant pour tous les quadrilatères, en nombre infini lorsqu'il y en a un. I

condition de possibilité est

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 - d^2) \quad (^1).$$

Ocagne (*Maurice d'*). — Théorème sur le trapèze. (370-372).

L'auteur, construisant par des parallèles aux côtés une série de trapèzes semblables au premier, leur trouve des propriétés qu'il suppose « nouvelles ». Malheureusement il oublie de remarquer que tout est évident et que le point de concours des diagonales est le centre de similitude de toutes ces figures successives.— Les rédacteurs du journal auraient dû, au lieu d'insérer ce petit travail d'un élève, excellent d'ailleurs, mais qui a eu un moment d'oubli, lui en faire l'observation.

Kœnigs (*G.*). — Note de Géométrie. (372-374).

La médiane d'un triangle est perpendiculaire à la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point où la base est coupée par la droite qui joint les pieds des hauteurs correspondant aux côtés. — La polaire réciproque d'une conique, par rapport au cercle d'où elle est aperçue sous un angle droit, est le lieu des points dont les deux tangentes et la polaire forment un triangle dont les hauteurs se coupent sur la conique.

Gino-Loria. — Note sur un problème classique de Géométrie. (374).

Pour construire sur une corde m un segment capable de l'angle A, inscrire arbitrairement entre les côtés de l'angle une base de longueur m; construire le cercle circonscrit au triangle formé; le transporter sur la corde donnée. — La solution est plus simple que celle que donnent les traités élémentaires. — Mais nous ne partageons pas l'avis du rédacteur qui ajoute que l'indétermination du triangle arbitraire permet, en le prenant voisin du triangle rectangle, d'augmenter la précision de la détermination graphique du rayon. C'est certainement un lapsus, car la condition choisie serait au contraire la plus défectueuse possible.

Bibliographie. 62.

Correspondance. 32, 53, 64, 128, 352, 353.

Questions proposées. (Nos 141 à 205), 31, 60, 95, 128, 159, 192, 223, 288, 319, 350, 324.

Concours pour les Écoles. 182, 252, 253, 280-283.

---

(1) Pourquoi n'avoir pas donné la signification géométrique de cette condition? Si l'on joint le centre O' du cercle inscrit au point C du cercle circonscrit, extrémité du rayon perpendiculaire à la ligne des centres, le segment O'D compris dans le prolongement en arrière de cette droite, entre O' et la circonférence circonscrite, est égal au côté du carré inscrit dans la circonférence inscrite. Pourquoi aussi ne pas représenter par un carré (μ^2 au lieu de μ) l'indice de transformation? Chez un professeur ces nuances ont leur importance.

L.

CONCOURS GÉNÉRAUX. 24, 25, 146-150, 279.

EXAMENS DIVERS. 249, 254, 276, 346, 347.

CONCOURS ACADÉMIQUES. 87, 188, 207-211, 255, 256, 310, 375, 376.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES. 26, 28, 48, 89, 90, 156, 217, 311, 312, 337, 339.

QUESTIONS RÉSOLUES. 9, 29, 50-60, 91-95, 126, 189-192, 218-222, 283-288, 313-319, 341-350, 377-383.

L.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET SPÉCIALES, publié sous la direction de MM. BOURGET et KOEHLER.

Tome IV; 1880 (¹).

Dostor (G.). **— Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. — Polygones réguliers correspondants. — Polygones réguliers étoilés. (3-8).**

Le second de ces nombres est égal ou double du premier, suivant que n est impair ou pair. — A chaque polygone de n (impair) côtés correspond un polygone de $2n$ côtés, les espèces étant p et $n-2p$, et les côtés cordes supplementaires du cercle circonscrit. — Si n est pair, à chacun des polygones de n côtés

(¹) A partir de 1880, le *Journal de Mathématiques* élémentaires, dirigé par MM. Bourget et Kœhler, a élargi son cadre, pour admettre désormais les questions de Mathématiques spéciales, et s'adresser, sans distinction, à tous les candidats aux écoles du gouvernement. Le sous-titre des *Nouvelles Annales de Mathématiques* semblerait indiquer que les questions nouvelles que renferme le journal dont nous nous occupons avaient déjà leur organe de publicité; toutefois il y a lieu de remarquer que les *Nouvelles Annales* n'ont jamais été, à proprement parler, un journal d'élèves. Un bien petit nombre des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, généralement d'un instinct mathématique précoce, et fort en dehors des aptitudes qui se développent dans un cours, suivaient avec fruit cette publication, et y mêlaient leurs noms à ceux de mathématiciens déjà classés. Il y avait donc une lacune à combler, et, si le rôle du *Journal de Mathématiques elémentaires et spéciales* est plus modeste, il n'en peut être que plus utile; aussi nous pouvons désormais étendre à tous les étudiants en Mathématiques ce que nous disions à son sujet, dans un précédent compte rendu, de son influence sur les études des élèves des classes élémentaires. L.

d'espèce p, correspondent deux polygones de $2n$ côtés, d'espèces p et $n-p$, que l'on considère comme conjugués, et qui ont pour côtés des cordes supplémentaires du cercle circonscrit. — Le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est quatrième proportionnelle au rayon du cercle circonscrit, et aux côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, inscrits dans le même cercle.

Dostor (*G.*). — Formules sur les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs au triangle. (20-23).

Kœhler.—Théorie des centres des moyennes harmoniques. (Suite et fin.). (29-34).

Pôles et polaires dans les courbes du troisième ordre. — Si la cubique se décompose en une conique et une droite, la polaire conique d'un point se décompose en la polaire du point par rapport à la conique et la droite.—Les polaires coniques ou rectilignes d'un point par rapport à un faisceau de cubiques forment un faisceau. — Si c et c' sont les polaires coniques de deux points p et p' par rapport à la cubique k, les polaires rectilignes de p par rapport à c', et de p' par rapport à c, coïncident. — La polaire conique d'un point p, par rapport à une cubique à point double δ, est tangente en δ au conjugué harmonique de δp par rapport aux tangentes à la cubique (théorème s'étendant aux courbes d'ordre quelconque). Un arc de rebroussement de cubique est tangent à toutes ses polaires coniques par rapport aux divers points du plan. — Si la polaire de p est un couple de droites concourant en p', la polaire de p' sera de son côté un couple de droites passant en p. — Le lieu des points, dont les polaires sont doublement rectilignes, est une seconde cubique, qui est en même temps le lieu du point de concours de ces droites (hessienne de la cubique). — Pour les degrés supérieurs au troisième, le lieu des points dont les premières polaires ont un point double est d'ordre $3(m-2)^2$. Courbe de Steiner. — La polaire d'un point d'inflexion est un couple de droites, la tangente d'inflexion, et la droite qui unit les points de contact des tangentes issues du point d'inflexion. — Toute cubique a donc neuf points d'inflexion, réels ou imaginaires, intersections avec sa hessienne. — La droite passant par deux points d'inflexion d'une cubique passe par un troisième.

Boquel (*E.-J.*). — Propriétés générales des formes quadratiques, et leurs applications en Géométrie. (35-41, 79-88, 164-170, 318-323, 371-376).

Définitions. — Décomposition en sommes de carrés, de nombre au plus égal à celui des variables. — Les nombres respectifs de carrés positifs et négatifs des formes équivalentes sont invariables (Sylvester). — Invariant ou déterminant (symétrique) des demi-dérivées partielles. — L'invariant Δ' de la forme obtenue par une substitution linéaire est égal au produit de celui de la forme primitive, Δ, par le carré δ^2 du déterminant de la substitution.

Étant opérée une substitution linéaire dans une forme quadratique ternaire à trois variables, faisant $z=z'=1$, le module de transformation a pour valeur $\delta=\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}$, d'où $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$ est invariable pour une même conique, quels que soient

les axes des coordonnées. Le nombre de carrés de décomposition d'une form[e] quadratique est égal à celui des variables, en même temps que l'invariant [d]e la forme est différent de zéro. Propriété fondamentale de la forme F, adjoi[nte] de f (Gauss), c'est-à-dire telle que le résultat de la substitution, aux variables de leurs valeurs en fonction des demi-dérivées partielles, X, de la form[e] soit $\frac{F}{\Delta}$.

Si $\varphi = \theta f - \Sigma(\varpi X)^2$, l'invariant de φ est $\theta^4(\theta\Delta - F)$.

Si f' est la forme transformée de f par la substitution $x_\lambda = \Sigma_{u=1}^{u=n} \alpha_{u\lambda} x'_u$, et F' les formes adjointes de f et f', R le module de la transformation, en pos[ant] $X'_\rho = \Sigma_{u=1}^{u=n} \alpha_{u\rho} X_u$, on aura identiquement

$$F'(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n) = R^2 F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Applications. — Distance, en coordonnées obliques, d'un point à une droi[te] (P. Joubert).

Longueur des axes d'une section plane centrale d'une surface du secon[d] ordre.

Lorsque l'invariant d'une forme est nul, son adjointe est un carré parfait. Applications.

***Longchamps* (*G. de*). — Recherches des facteurs commensu[r]ables de degré quelconque d'une équation. (41-44).**

Exposé de la méthode de M. Landry pour déterminer les facteurs de form[e] $(x^p - a)$.

***Launoy*. — De l'ellipse, de l'hyperbole et de leurs propriété[s] (49-60, 97-106, 145-152, 193-201, 241-246, 289-297, 337-35[3], 385-394).**

Démonstration des principales propriétés en partant de la définition par l[a] directrice et le foyer.

Théorèmes sur les tangentes et leurs intersections avec les axes et les ta[n]gentes aux sommets. — Normale. — D'un point donné on peut mener quatr[e] normales.

Constructions de normales. — Rayon de courbure. — Relation

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{R\cos\alpha}.$$

Normales rectangulaires. — Ellipses et hyperboles homofocales.

Parabole. — Théorème de Steiner. — Normales. — Le lieu du point d'o[ù] partent deux normales rectangulaires est une parabole. — Le centre de gravi[té] des pieds des trois normales issues d'un même point est sur l'axe, et le cer[cle] des trois pieds passe au sommet. — Problèmes divers.

Rayon de courbure de la parabole. — La projection du foyer sur les normal[es] est une parabole à cordes focales. — Les rayons de courbure en ses extrémit[és] sont liés par la relation

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R'^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}$$

Longchamps (*G. de*). — Recherche des facteurs commensurables de degré quelconque d'une équation. (70-74).

Facteurs du second degré. — Recherches. — Conditions de divisibilité d'un polynôme par le trinôme du second degré.

Collin (*J.*). — Recherches sur les courbes planes du troisième ordre. (74-79, 171-176, 315-317).

L'auteur expose une méthode simple et ingénieuse de construction par points des courbes du troisième degré ayant au moins une asymptote à distance finie.

Courbes à point singulier. — Les rayons vecteurs de la courbe issus du point double sont la somme de deux rayons vecteurs de même direction, limités, le premier à l'asymptote directrice, le second à une conique directrice, passant au point double, ayant ses asymptotes parallèles aux deux autres asymptotes de la courbe, et passant par les points où l'asymptote directrice est coupée par les tangentes au point double; elle a pour tangente au point double le rayon vecteur du point d'intersection de la courbe avec son asymptote directrice. — Si les trois asymptotes sont réelles, le rayon vecteur de la courbe est la somme des trois rayons vecteurs compris, sur sa direction, entre le point double et les trois asymptotes. — Classification. — Dix-huit espèces de cubiques à point double ayant au moins une branche hyperbolique.

Construction de ces courbes, au moyen d'une conique fixe et d'une parallèle mobile à l'asymptote située à distance finie.

Seconde méthode de construction des cubiques considérées, par le moyen d'une conique fixe et de deux parallèles fixes. — Les deux rayons vecteurs issus d'un point particulier de la courbe étant ρ' et ρ'', on a

$$\rho' + \rho'' = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{et} \quad \rho'\rho'' = \rho_1\rho_3,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant les rayons vecteurs de la conique et des deux droites.

Laurent (*H.*). — Notes sur les fonctions trigonométriques. (88-92).

Prenant pour définition des fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$ leurs développements en série, l'auteur établit les formules fondamentales de la Trigonométrie, abstraction faite de toute considération géométrique.

Longchamps (*G. de*). — Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres. (92-96).

Relation récurrente $n S_n^p = \Sigma_1^n S_x^p - S_n^p$ est fonction entière de degré $(p+1)$ en n, sans constante, et chez laquelle les coefficients de n^{p+1} et de n sont $\frac{1}{p+1}$ et $\frac{1}{2}$. — Valeurs de S_n^2 et S_n^3.

Guéroult (*L.*). — Note de Géométrie. (106-108).

Un cercle étant tracé sur une face d'un dièdre d'ouverture variable, l'angle α des droites qui joignent son centre aux foyers de sa projection sur l'autre face est invariable ([1]).

([1]) Démonstration qui serait suffisante dans un examen, mais à proscrire

Ainsi que nous l'avons déjà observé, on ne devrait admettre dans le *Journal* que des démonstrations « recommandables par leur goût approprié au sujet », car elles servent fatalement de types modèles.

Malloisel (*R.*). — Problème d'admission à l'École Normale supérieure en 1877. (108-113).

Colombier (*P.-A.-G.*). — Note relative au théorème de Pappus sur le quadrilatère complet. (113-114).

Cernesson (*J.*). — Propriété de l'hyperbole. (115).

Janin (*A.*). — Note sur l'intersection de deux surfaces de révolution du second ordre à axes concourants. (116-127).

Détermination graphique des éléments de la conique, projection de l'intersection sur le plan des axes.

Kœnigs (*G.*). — Concours général de 1878. (Mathém. spéciales) (128-133).

Laurens (*Ch.*). — Variétés. — Essai pour les coniques de Pascal. (133-141, 176-183, 232-240).

Historique. — Propriétés de l'hexagramme mystique.
Relation d'involution de Desargues. — Origine de la théorie des pôles et polaires.

Pajon. — Note d'Algèbre. (152-158).

Ocagne (*Maurice d'*). — Étude sur une ligne remarquable du triangle, antibissectrice. (158-164).

Définition : droite divisant la base inversement à la division par la bissectrice. Longueurs, angles, formules diverses. — Application à des problèmes. — Enveloppe de la corde mobile détachant sur une courbe un arc de longueur constante. — Son contact est le pied de l'antibissectrice de la corde et des deux tangentes.

Morel (*A.*). — Formules trigonométriques relatives aux éléments

---

d'une façon absolue du *Journal* comme d'un esprit des moins appropriés à la nature du sujet; elle offre un développement d'écriture algébrique fort inutile et du plus fâcheux exemple. La seule démonstration présentable de ce théorème, quasi évident, serait la suivante : O et O' étant les centres du cercle et de sa projection, A leur projection sur l'arête, B l'extrémité du rayon OA et B' sa projection sur OO'; BG est le demi petit-axe, OG la demi-distance focale, d'où

$$\tang \frac{\alpha}{2} = \frac{OG}{OO'} = \frac{OB}{OA}.$$

d'un triangle rectiligne. (201-204, 246-249, 297-300, 493-497).

Formules extraites du « Recueil de problèmes de Trigonométrie et de Stéréotomie de Reidt ».

Relations diverses : r, r', r'', r''', rayons des cercles inscrit et exinscrit; S, surface; R, rayon du cercle circonscrit

$$rr'r''r''' = S^2,\quad R = \frac{abc}{4S},\quad \frac{r'r''r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2r},\quad \Sigma r^2 = 4R^2 + \Sigma h_a^2,$$

$$r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Questions résolues. (497-501).

Fajon. — Variations des fonctions bicarrées, déduites de celles des fonctions du second degré. (205-210).

Questions à l'usage des candidats à Saint-Cyr. (210-212).

Boquel (E.-J.). — Note sur un point de la discussion des équations du premier degré à trois inconnues. (213-214).

Collin (J.). — Note sur le théorème de Descartes. (215-217).

Théorème de Descartes sur le nombre des racines positives, déduit de celui de Rolle.

Kœhler. — Note sur les fractions continues indéfinies, non périodiques. (217-223).

Longchamps (G. de). — Transversales réciproques et applications. (272-277).

Les transversales réciproques coupant les côtés du triangle en des points réciproques, symétriques l'un de l'autre par rapport au milieu du côté.— Construction des tangentes aux cissoïdes et strophoïdes, droites ou obliques, à la lemniscate de Bernoulli, aux conchoïdes.

Collin (J.). — Sur le nombre de points d'inflexions réels d'une courbe du troisième degré. (277-278).

Minine. — **Du nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à un nombre donné n, et compris entre 0 et p. (278-280).**


Désignant par $[\varphi(N)]_0^p$ le nombre cherché, par $E(x)$ la partie entière de x, enfin, symboliquement, par $n E\frac{(1)}{x}$ l'expression $E\left(\frac{n}{x}\right)$, on a la valeur

$$[\varphi(N)]_0^p = p\left[1 - E\frac{(1)}{a}\right]\left[1 - E\frac{(1)}{b}\right]\left[1 - E\frac{(1)}{c}\right]\cdots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant les facteurs de N, tels que $N = a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$ On a de plus,

entre des nombres N, N′, N″, ..., premiers entre eux,

$$[\varphi(N)]_0^p[\varphi(N')]_0^{p'}[\varphi(N'')]_0^{p''}=\ldots=[\varphi(NN'N''\ldots)]_0^{p\,p'\,p''\ldots},$$

et en particulier

$$\varphi(N)\varphi(N')\varphi(N'')=\ldots=\varphi(NN'N''\ldots).$$

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. (280-283).

Équation du cercle passant par trois des pieds des normales menées d'un point à une conique à centre ([1]).

Bourget (J.). — Note sur un point de la discussion des équations du premier degré à trois inconnues. (411-415).

Questions résolues. — Concours d'agrégation 1879. (415-425).

1° On donne un hyperboloïde gauche et un point A. — Un plan P roule autour du point A. — Lieu du point M d'intersection du paraboloïde touchant l'hyperboloïde suivant sa section par le plan P, avec son diamètre passant par le point A; 2° du point Q où le plan P est percé par la droite qui va de son pôle, par rapport à l'hyperboloïde, au point M; 3° des positions du point A pour lesquelles la dernière surface (qui est du second ordre) est de révolution.

Kœnigs. — Théorème concernant une courbe algébrique. (425-427).

Arnaud. — Démonstration élémentaire d'une formule d'Abel. (427-429).

Démonstration, par la dérivation de la formule binômale

$$(x+a)^m = x^m+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a(a+nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}+\ldots.$$

Variétés. — Université de Tokio (Japon). 429-432.

Ocagne (Maurice d'). — Principes élémentaires de Géométrie cinématique. (433-441).

Conventions de symboles — (a) Trajectoire du point a — $d(a)$, déplacement élémentaire de a sur (a). — Principes :

1° Si t est le point de concours des tangentes aux courbes (a) et (b), on a l'égalité

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{at}{bt};$$

2° Si e est le point où ab touche son enveloppe

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{ae}{be}\,\frac{at}{bt};$$

3° Soient α et β les intersections des normales en a et b, aux courbes (a) et

([1]) Dans la solution de la question 176 (p. 307), l'auteur repousse comme non

(b) par la normale en e, à l'enveloppe (e), on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Déplacement d'une figure, variable de forme, dans un plan. — Problèmes généraux :

1° On donne m courbes $(a_1), (a_2), \ldots, (a_m)$, sur lesquelles les m points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ doivent se mouvoir, les courbes $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$, enveloppe des $m-1$ premiers côtés successifs du polygone $a_1, a_2, \ldots, a_m$. — Trouver l'enveloppe E_m de $a_m a_1$;

2° On donne les m enveloppes et $(m-1)$ trajectoires, trouver la $m^{\text{ième}}$ trajectoire. — Les deux solutions sont données par la relation

$$1 = \frac{a_1\alpha_1 . a_2\alpha_2 . a_3\alpha_3 \ldots a_{m-1}\alpha_{m-1} . a_m\alpha_m}{a_1\beta_1 . a_2\beta_2 . a_3\beta_3 \ldots a_{m-1}\beta_{m-1} . a_m\beta_m}.$$

Si les normales en e et h, aux enveloppes (e) et (h) de ab et ac, se coupent en α sur la normale (en a) à (a), on a

$$\frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{c\gamma},$$

en désignant par β le point de concours des normales $e\alpha$ et $b\beta$, et par γ celui des normales $h\alpha$ et $c\gamma$. — Application. — Construction de la normale à l'enveloppe du côté bc du triangle abc, dans lequel l'angle a pivote autour de son sommet, les points a et b décrivant (a) et (b).

Morel *(A.)*. — Inégalité des jours et des nuits. (441-444).

Discussion de la formule $\cos\varphi = \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\lambda$.
Examens oraux de Saint-Cyr en 1880. (444-446).
Questions résolues (Examens de Saint-Cyr). (446-456).
Choix de questions, avec solutions, par M. A. Morel.
Questions résolues. (456-459).

Boquel *(E.-J.)*. — Note sur une application du Calcul des déterminants à certaines questions de maxima et de minima. (460-464).

Distance d'un point à une droite, sur le plan et dans l'espace.



Guichard. — École Normale supérieure, 1880. — Composition. (465-471).

Correspondance. — Faire passer un carré par quatre points donnés. (478).

---

susceptible d'interprétation une racine négative, solution des plus naturelles du problème. Le Comité de rédaction du Journal devrait, nous semble-t-il, ne pas laisser échapper des erreurs aussi grossières.

Solution fondée sur ce théorème : « Les portions de deux droites rectangulaires, interceptées entre les deux côtés opposés d'un carré, sont égales ([1]). »

Morel (*A.*). — Note sur les fractions décimales périodiques. (481-487, 529-535).

Nouvelles propriétés des périodes développées dans un Mémoire de M. A. Bouché. Soient x le quotient et y le reste de la division $\frac{1}{N}$, poussée de manière à avoir K chiffres décimaux au quotient, et abstraction faite de la virgule,

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}} = \frac{x}{10^k}\left[1 + \frac{y}{10^k} + \left(\frac{y}{10^k}\right)^2 + \ldots\right],$$

d'où le calcul facile par séries de K chiffres.

Deux nombres dont les chiffres correspondants ont tous 9 pour somme sont dits complémentaires; une période est dite complète lorsqu'elle est formée de deux nombres complémentaires mis à la suite l'un de l'autre.

Soient p la période de la fraction irréductible $\frac{1}{N}$, et D un nombre d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à p; on a

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D},$$

p doit contenir tous les facteurs premiers de D qui ne se trouvent pas dans N. — Si, en réduisant $\frac{a}{N}$ en décimales, on trouve le reste $N - a$, la période est complète; et, si la fraction est irréductible, sa période a le même nombre de chiffres que celle de $\frac{1}{N}$. — Si h est l'un des restes de $\frac{1}{N}$, la période $\frac{h}{N}$ ne diffère de celle de $\frac{1}{N}$ que parce qu'elle commencera à un autre chiffre. — Si N est premier, le nombre de chiffres de la période est $N - 1$, ou l'un de ses sous-multiples.

Lorsqu'une fraction, à dénominateur premier, donne naissance à une période non complète, le nombre des chiffres de la période est impair. — Réciproque. — Si la période p, correspondant à la fraction $\frac{1}{N}$, est divisible par le nombre premier N, la période $\frac{1}{N^2}$ aura le même nombre, K, de chiffres que $\frac{1}{N}$. — Si p n'est pas divisible par N, le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^k}$ est KN^{k-1}; les deux périodes sont en même temps complètes ou incomplètes. — Le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{NN'N'',\ldots}$ est égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des autres périodes. — Recherche des nombres N tels que la période $\left(\frac{1}{N}\right)$ ait p chiffres. — Ce sont les diviseurs de

---

([1]) On a voulu dire « réciproquement interceptées entre les deux couples de côtés du carré ». Solution fort élégante, d'ailleurs. **L.**

$10^p - 1$, dont on supprime 3, 9 et les diviseurs des nombres tels que $10^a - 1$, eux-mêmes diviseurs de $10^p - 1$.

Ocagne (Maurice d').—Sur le partage des polygones. (487-489).

Construction fort simple pour diviser dans un rapport donné un polygone par une transversale passant par un point de son contour ([1]).

Desmons. — Note sur les irrationnelles. (489-493).

Morel (A.). — Formules trigonométriques. (Suite.). (493-497).

Songaylo. — Sur les tangentes aux points doubles de l'intersection des surfaces. (502-506).

L'auteur recherche, en projection sur un plan perpendiculaire à son axe, les tangentes au point double d'intersection d'une surface de révolution par son plan tangent ([2]).

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. (507-512).

Recherche des systèmes de diamètres conjugués parallèles dans les courbes et surface du second ordre ([3]).

Janin. — Concours d'Admission à l'École Polytechnique. (513-519).

([1]) Cette construction était connue de temps immémorial des géomètres du Cadastre, et enseignée jadis dans les Cours les plus élémentaires. Comment les rédacteurs n'ont-ils pas relevé la phrase malheureuse de l'auteur où il dit que jusqu'à son travail « on ne connaissait qu'une solution approximative!! du problème »? Que de fois on réédite, sans s'en douter, du « vieux neuf »!

([2]) Dans cet article, dont la suite sera donnée plus loin, il est fait usage des procédés de la Géométrie descriptive et des calculs de Géométrie analytique pour arriver, assez péniblement, à une construction que de simples considérations infinitésimales rendent quasi évidente. — Il eût été presque aussi court de développer franchement la théorie de l'indicatrice. — Pourquoi enfin ne pas donner la construction de l'angle en vraie grandeur des tangentes, au lieu de sa projection? La construction en est plus simple. C'est celui d'où est vue, du centre de courbure du méridien, la corde que le cercle, décrit sur la distance de ce centre au point d'intersection de la normale et de l'axe, détache sur la tangente au méridien. L.

([3]) Les articles émanant de professeurs devraient, dans le *Journal* des élèves, être marqués au coin d'une perfection toute particulière. Aussi remarquerons-nous que l'auteur aurait dû observer que la distance des courbes ou surfaces est indifférente, leur orientation seule étant en jeu. — Étudier dès lors la question pour les courbes ou surfaces à centre, en les prenant concentriques; il en fût résulté, outre la simplification des équations, l'avantage de faire songer très probablement l'auteur à la solution géométrique, beaucoup plus simple, plus prompte et surtout plus lumineuse pour la classification que la solution analytique. Cette étude géométrique et analytique menée parallèlement était jadis fort en honneur chez les « bons élèves ». L.

Nettre. — Sur une propriété des coniques. (519-522).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note de Géométrie. (535-538).

Trois circonférences passent par un même point et se coupent deux à deux sur une même droite. Par un point de celle-ci on mène une tangente à chacune des trois premières; les points de contact de ces tangentes et le point commun aux trois circonférences sont sur un même cercle; les points diamétralement opposés au point commun dans chacune des trois circonférences sont, avec celui-ci, sur un même cercle. — Transformation par inversion, et application du théorème de Ptolémée.

Descube. — Théorème de Géométrie. (538).

Ocagne (*Maurice* (*d'*). — Note sur une ligne dans le triangle rectiligne. (539-542).

Propriétés de la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice. — Relations métriques. — Construction d'une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact. — Normale à la lemniscate.

Songaylo. — Sur les tangentes aux points doubles de l'intersection des surfaces. (Suite.). (552-559).

Intersections de surfaces coniques et cylindriques.

Boquel (*E.-J.*). — Note sur une application du calcul des déterminants à certaines questions de maxima et minima. (Suite et fin.). (560-564).

Démonstration de l'identité $\Sigma a^2 . \Sigma b^2 = \Sigma (a_s b_n - a_n b_s)^2 + (\Sigma a_s b_s)^2$, maximum de la fonction du second degré de $(n-1)$ variables, telle qu'on puisse écrire $F = \Sigma X^2$, les n quantités X étant fonctions linéaires des $n-1$ variables. Il est égal à $\frac{\Delta^2}{\Sigma L^2 - 1}$, Δ étant le déterminant des X, et L les fonctions multiplicateurs des éléments de sa dernière colonne (termes connus) dans son développement par rapport à ceux-ci.

Bibliographie. — 526.

Questions proposées. — (N°s 206-283). 28, 45, 69, 96, 143, 190, 285, 479, 527, 574.

Concours pour les Écoles. — 8, 249, 302, 324, 417, 444, 477, 551, 574.

Concours généraux et Concours académiques. — 301, 302, 475.

Baccalauréat ès sciences. — 24, 27, 269, 271, 408, 411, 549-551.

Examens divers. — 210, 226, 255, 283, 312, 333, 368, 382, 324.

Questions résolues. — 8-19, 20-69, 141-143, 183-190, 259-269, 304-312, 325-333, 353-367, 380, 394-407, 456-459, 465, 497-501, 513, 523-526, 542-548, 564-573 (¹).

Laquière.

ANNALES DES MINES (²).

7ᵉ série. — Tome XVIII; 2ᵉ semestre 1880.

Ce Volume ne renferme point de Mémoires ayant trait aux applications des Mathématiques.

Tome XIX; 1ᵉʳ semestre 1881.

Marié (*G.*). — Étude sur la mesure exacte des hautes pressions et sur le frottement des cuirs emboutis des presses hydrauliques. (104-156, 2 pl.).

Emploi des manomètres et des soupapes à la mesure des pressions. Évaluation des causes d'erreur.

Étude spéciale et mesure des frottements des cuirs emboutis; nouveau dynamomètre.

Laussedat. — Sur la méthode employée par d'Aubuisson, en 1810, pour la mesure des bases géodésiques. (172-174).

L'idée d'employer une seule règle, transportée successivement entre des repères placés sur l'alignement de la base, a été préconisée par le major piémontais Porro, à qui elle a été généralement attribuée.

Il est intéressant, pour l'histoire de la Science, de rapporter le mérite de cette précieuse innovation à l'ingénieur des mines d'Aubuisson, qui le premier a employé ce procédé dans la mesure d'une base destinée à appuyer des opérations trigonométriques ayant pour objet la détermination de la hauteur du sommet du

---

(¹) La question 235 : « Trouver l'enveloppe des directrices des coniques, dont on donne un point et le foyer correspondant à la directrice », revenant à demander d'une manière détournée la définition du cercle, peut être posée dans un examen pour tâter la présence d'esprit de l'Élève; mais ne devrait en aucune sorte figurer au Journal; des questions aussi insignifiantes ne sont guère susceptibles d'une solution intéressante ou utile; aussi sont-elles traitées par des calculs « à l'aveugle », alors qu'en Géométrie analytique le bon élève n'écrit jamais, ou rarement, une équation dont il ne lise clairement l'interprétation. L.

(²) Voir *Bulletin*, IV_2, 204.

mont Gregorio, à l'entrée de la vallée d'Aoste. Cette mesure fut effectuée au commencement de l'année 1810.

Mallard (*E.*). — Sur les propriétés optiques des mélanges cristallins de substances isomorphes et sur l'explication de la polarisation rotatoire. (256-313, 1 pl.).

L'auteur a essayé déjà dans les *Annales* (1876) de montrer que la théorie de la double réfraction pouvait tirer quelque utilité de l'étude des phénomènes observés par Nörremberg sur des lames de mica très minces superposées, et par Reusch sur ces mêmes lames, associées suivant une certaine loi d'empilement. Il se propose, dans ce nouveau Mémoire, de développer cette théorie et d'en faire, d'une part, le moyen de déduire les propriétés biréfringentes d'un mélange cristallin, en partant de celles des cor[illegible] mélangés, et de l'autre, une explication complète et rationnelle de tous les [illegible] que l'on groupe sous le nom de *polarisation rotatoire,* aussi bien ceux qui se produisent dans les cristaux que ceux que montrent les dissolutions ou les liquides.

Tome XX; 2e semestre 1881.

Trautmann. — Organisation du service d'hiver et réfrigération artificielle de l'eau minérale à l'établissement thermal de Bourbonne. (86-120, 1 pl.).

Description des procédés économiques employés à cette réfrigération artificielle.

De Kossuth (*F.*). — Étude sur l'application de la ventilation artificielle à l'aérage du tunnel du mont Cenis. (285-322).

L'aérage du tunnel du mont Cenis est insuffisant. Pour la longueur de [illegible] et la section de 42^{mq} de ce tunnel, il faudrait 84^{mc} d'air par seconde, tandis que les aspirateurs des installations actuelles peuvent extraire à peine le douzième de ce Volume.

8e série. — Tome I; 1er septembre 1882.

Resal. — Examen critique des hypothèses auxquelles on a recours pour calculer les efforts transmis aux pièces des systèmes de bancs employés dans les constructions. (449-462, 1 pl.).

Les systèmes de cette nature se trouvent réalisés dans certaines catégories de combles et de ponts.

La statique étant insuffisante pour calculer les efforts transmis, on a recours à des hypothèses plus ou moins plausibles dont la principale consiste à considérer les tiges comme étant rigides dans le sens de leur longueur. On est ainsi conduit à créer des points fixes fictifs aux joints de certains assemblages. Mais comment doit-on choisir ces points fixes pour ne pas être conduit à des incor

patibilités? Tel est le problème que l'auteur s'est proposé, mais dont la solution ne paraît pas susceptible d'être résumée dans un énoncé général. Il n'y a qu'en traitant quelques cas particuliers que l'on peut faire comprendre la marche que doivent suivre les ingénieurs chargés des constructions de la nature de celles dont il s'agit.

Thiré. — Note sur le planimètre polaire d'Amsler. (487-500, 1 pl.).

On a déjà établi la théorie de cet instrument de bien des manières différentes, et divers Ouvrages en renferment l'exposé (*Annales des Mines*, 1871, Notice de M. Combes; *Mémorial de l'Officier du Génie*, 1874, travail de M. Peaucellier; *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1876, Note de M. Laisant).

La nouvelle monographie a pour objet la démonstration du planimètre, fondée sur des calculs assez restreints.

Mallard (*E.*). — Expériences sur la pression du grisou dans la houille (530-551, 1 pl.).

Traduction par extrait et interprétation analytique des résultats de très intéressantes observations faites par M. Lindsay Wood. La conclusion de ces études peut être ainsi énoncée : le grisou est un gaz renfermé dans la houille comme l'eau l'est dans une couche poreuse. Il s'y trouve comprimé sous une pression très variable, qui peut atteindre et sans doute dépasser 32^{kg} par centimètre carré.

Haton de la Goupillière. — Tambours spiraloïdes pour les câbles d'égale résistance. (566-587, 1 pl.).

Le profil théorique du câble d'égale résistance est, comme on sait, celui d'une logarithmique. Dans la pratique courante, les constructeurs le remplacent jusqu'ici par le câble conique, en supprimant à des intervalles constants un fil dans le misage. Le tambour, que l'on déterminera ainsi en rigueur, s'adaptera à l'emploi du câble conique ordinaire avec l'approximation même que celui-ci réalise par rapport à la forme idéale et dont on se contente jusqu'ici.

L'étude de ce problème comprend deux parties distinctes dans le présent Mémoire. La première renferme les propriétés générales de tout système d'extraction d'équilibre rigoureux, quelle que soit la forme de son câble, que celui-ci soit cylindrique d'un bout à l'autre, ou formé de mises cylindriques différentes, qu'il soit logarithmique, conique, ou de telle forme que l'on voudrait, même imaginée d'une manière absolument arbitraire et sans qu'elle fût motivée par aucune raison de pratique usuelle.

Une seconde partie sert à fonder, sur ces principes généraux, la solution complète de la détermination du profil du tambour spiraloïde pour le cas le plus typique de tous, celui du câble d'égale résistance, c'est-à-dire de la forme logarithmique.

Moyennant une transformation de coordonnées, la courbe méridienne du tambour est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{y}{z}\,dz + \frac{dy}{y-1} - \frac{(z+1)\,dy + (y-2)\,dz}{(z+1)y - 2z} = 0.$$

Cette équation paraissant rebelle à toutes les méthodes d'intégration, l'aut a pensé avec raison que, pour le praticien, l'équation aux différences finies profil suffirait parfaitement pour en déduire de proche en proche chaque donnée des divers points d'insertion des spires successives.

Par une analyse très simple, l'auteur établit l'équation aux différences fin

$$y_{n+1} = \frac{[(\beta^n + 1)y_n - 2\beta^n]\beta^{\frac{y_n}{2}} - 2\beta^{n+1}(y_n - 1)}{[(\beta^n + 1)y_n - 2\beta^n]\beta^{\frac{y_n}{2}} - (\beta^{n+1} + 1)(y_n - 1)},$$

qui résout la détermination du profil du tambour.

L'application numérique de cette relation serait sans difficultés et prés ruit tout au plus des longueurs. On peut abréger considérablement ces nières en introduisant une approximation qui n'affecte aucune des décimales que la pratique la plus exigeante pourrait tenir à conserver dans les évaluations. L'équation définitive devient

$$u_{n+1} = (\beta - 1)\beta^n - l\beta + \left(1 + \frac{l\beta}{2}\right)u_n + \frac{(1 - \beta^{2n})l\beta}{2u_n}.$$

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE (¹).

Tome XIX; octobre 1881-mars 1882.

Pravaz. — Calcul des éléments du tir lorsque l'angle d'élévation du but est considérable et application au tir plongeant. (5-1; 3 fig., 1 pl.).

Les Tables de tir des diverses bouches à feu sont dressées pour le tir sur un b situé au niveau de la pièce, condition qui ne se présente habituellement pas dans la pratique.

Si l'angle de site du but est faible, on ne change pas la hausse; l'angle à donner au niveau est simplement augmenté de l'angle de site du but, et l'on admet que l'angle de chute est égal à celui que donnent les Tables pour la même distance sur le plan horizontal diminué de la valeur de l'angle de site du but.

Lorsque l'angle de site atteint une certaine valeur, on n'obtient plus ainsi une approximation suffisante.

Il faut avoir recours à d'autres procédés de calcul. On arrive, en faisant une hypothèse qui se rapproche davantage de la réalité, à calculer ou plutôt à mesurer, par un procédé graphique très simple, les éléments du tir sur un situé au-dessus ou au-dessous de la bouche à feu.

Cette hypothèse est que, pendant un même temps t, la valeur des dépl

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 231.

ments composants suivant l'axe de la bouche à feu et suivant la verticale est constante, quel que soit l'angle de tir.

Dans cette hypothèse, le lieu des positions du projectile lancé dans un plan vertical sous différents angles est, au bout d'un temps t, une circonférence.

L'auteur arrive ainsi à transformer les Tables de tir en tableaux quadrillés et en tracés graphiques qui donnent, à première vue, les charges, les durées du trajet, et les vitesses restantes.

Lefèvre (*J.-B.-V.*).— Influence de la diminution progressive des vitesses initiales données par les cartouches métalliques sur la portée du fusil d'infanterie. (89-109, 3 fig.).

L'expérience a montré que la poudre des cartouches métalliques subit avec le temps une certaine transformation, et que tous les ans, la vitesse initiale, qui était de 450m, éprouvait une diminution de 3m,05 à 4m.

L'auteur se propose d'évaluer les modifications qui doivent en résulter pour le réglage des hausses, et de soumettre les résultats obtenus à une interprétation pratique.

De Galembert. — Étude sur le tir fusant de l'obus modèle 1879. (185-196, 4 fig.).

Remarques nouvelles sur une question déjà traitée dans le même Recueil (t. XVII et XVIII) par MM. Percin et Talayrach.

On est fondé à croire que parfois l'écart probable en portée de la fusée à double effet a une valeur beaucoup plus forte que celle qu'on lui avait attribuée. Dans certaines expériences, cette valeur aurait atteint 35m, ce qui montre que les points d'éclatement se seraient répartis entre deux plans verticaux, à un intervalle de 280m.

Quel que soit son caractère de généralité, cette donnée, très différente de celle qui avait été admise, mérite d'être étudiée, et l'auteur la prend pour base de son travail.

Percin. — Correction à faire subir à la hausse en raison de l'élévation du but. (281-311, 8 fig.).

Dans le tir sous de petits angles, on admet que la trajectoire reste reliée au canon d'une manière invariable et se relève avec lui, sans changer de forme, si l'on fait varier l'angle de tir. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse de la rigidité de la trajectoire. Cette hypothèse, admissible pour des angles suffisamment petits, cesse de l'être lorsque ceux-ci atteignent des valeurs un peu considérables.

On peut admettre, par exemple, que le rapport de l'abaissement dans l'air à l'abaissement dans le vide est indépendant de l'angle de projection; ou encore que, pour une même longueur prise sur la ligne de projection, l'abaissement est indépendant de l'angle de tir; ou enfin, toute autre donnée moyenne permettant de dresser des tableaux graphiques, procédé indiqué précédemment (p. 5-13).

L'auteur se propose, non plus de présenter une hypothèse nouvelle, mais de déterminer, indépendamment de toute hypothèse, l'allure générale de la variation que doit éprouver la correction à la hausse, et cela pour toutes les valeurs de l'angle d'élévation. A cet effet, il considère les lignes d'égale hausse, c'est-à-dire le lieu des points du plan de tir qu'on atteindrait avec une même hausse.

A chaque valeur de α correspond une ligne d'égale hausse. On reconnaît que sa forme et sa position coïncident approximativement avec la seconde trajectoire dont la portée est la même que celle qui correspond à l'angle α. Cette propriété, approximative dans l'air, se vérifie exactement dans le vide. Enfin, l'angle d'arrivée, dans l'air, est plus grand que l'angle de départ, mais inférieur à 90°, et d'autant plus grand que le projectile est plus influencé par la résistance de l'air.

Dans la pratique, on reconnaît que la correction à faire subir à la portée est approximativement égale au centième du produit de la hauteur du but par l'angle de projection des Tables exprimé en degrés.

La courbe neutre, lieu géométrique des points du plan de tir qui ne nécessitent aucune correction, autrement dit, des points qu'on atteindrait avec la hausse correspondant à leur distance absolue, sans s'inquiéter de leur élévation comme si l'hypothèse de la rigidité de la trajectoire était rigoureusement exacte, cette courbe affecte la forme d'une boucle tangente aux deux axes à l'origine et à l'enveloppe des trajectoires.

Cette forme ne peut guère être précisée davantage, car, pas plus que pour les courbes d'égale hausse, il n'est possible d'en établir l'équation en termes finis.

Quoi qu'il en soit, il y a là un sujet d'études qui pourra conduire à d'intéressants résultats.

Decepts. — Sur la représentation graphique des Tables de tir plongeant par les procédés de la géométrie anamorphique (377-397, 10 fig.).

La théorie exposée est fondée sur le principe de l'anamorphose développé pour la première fois par M. Léon Lalanne, dans un Mémoire datant de 1843. Ce Mémoire, qui mérita un rapport élogieux de Cauchy à l'Académie des Sciences, a été reproduit en entier dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, en 1846, sous le titre suivant : *Mémoire sur les Tables graphiques et la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à la Science de l'ingénieur.*

Frique (E.). — Appareils de pointage indirect et de repérage des bouches à feu de siège et de place. (484-510, 9 fig., 1 pl.).

Exposé des divers appareils ou procédés qui ont été imaginés en France ou à l'étranger pour exécuter le repérage de la position de la bouche à feu et permettre le pointage en toutes circonstances.

Ces appareils se divisent en deux grandes classes : ceux qui repèrent la position de l'affût, et ceux qui repèrent la position de la bouche à feu elle-même.

La première classe d'appareils est décrite dans le présent article.

Tome XX; avril-septembre 1882.

Percin. — Sur différentes questions de probabilité qui se présentent dans le réglage du tir percutant. (5-33).

Détermination des éléments du réglage du tir.
Observations sur les règles de tir applicables à une batterie isolée.
Réglage du tir dans les groupes de batteries.

Frique (*E.*). — Appareils de pointage indirect et de repérage des bouches à feu de siège et de place. (51-86, 18 fig., 1 pl.; 119-144, 9 fig., 1 pl.; 265-283, 4 fig.).

Description des quatre groupes des appareils de la seconde classe, qui servent à repérer la position de la pièce.

Tome XXI; octobre 1882-mars 1883.

Gaudin (*A.*). — Rendement de la poudre dans les bouches à feu. (425-441).

On désigne ainsi la quantité de travail recueillie par le projectile, par unité de poids de poudre employée.

L'auteur se propose de signaler quelques relations existant entre la valeur du rendement et la manière dont la poudre se comporte dans l'arme, relations déduites de résultats d'expériences, explicables jusqu'à un certain point, par un examen attentif de ce qui se passe dans les bouches à feu, et qui ont paru conduire à des conséquences importantes.

Le principe de ce travail peut s'énoncer en disant que le rendement est fonction du déplacement qu'a déjà subi le projectile au moment où la production des gaz utilisables est terminée, et il atteint sa plus grande valeur quand la charge peut être considérée comme entièrement brûlée dans un volume peu différent de celui de la chambre.

H. B.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY (1); rediguje Dr F. J. STUDNIČKA, v Praze.

Tome VIII; 1879.

Studnička (Dr *F.-J.*). — Sur l'origine et le développement du Calcul différentiel et du Calcul intégral. (1-10, 97-109, 272-295).

Seydler (*A.*). — Sur les figures d'équilibre des liquides qui ne sont pas soumis à des forces extérieures. (10-19).

Šebesta (*J.-P.*). — Sur les lignes semblables. (19-24).

Remarques sur les sécantes, les tangentes, les rayons de courbure et l'aire des lignes semblables.

(1) Voir *Bulletin*, II_1, 69.

Jäger (*V.*). — Solution de l'équation du cinquièm

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

(25-27).

L'auteur part de l'expression de $\alpha_1^5 + \alpha_2^5$ en $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$, forme de l'identité

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^5 - 5\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^3 + 5\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^5$$

en mettant x à la place de $\alpha_1 + \alpha_2$ et en identifiant cette rel: tion proposée, on a

$$\alpha_1^5\alpha_2^5 = -p^5, \quad \alpha_1^5\alpha_2^5 q,$$

d'où l'on tire α_1, α_2 et enfin $x = \alpha_1 + \alpha_2$.

Koláček (*Fr.*). — Déduction élémentaire des lois tion. (27-32).

L'auteur montre, par un procédé élémentaire, qu'on peut me la conique $\rho = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ d'abord sous la forme (géométriqu

$$p^2\left(1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r}\right) = -a^2,$$

p étant la normale abaissée du foyer sur la tangente; puis, d'a loi de Kepler, $vp = 2C$, sous la forme (cinématique)

$$\frac{a^2}{2C^2}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right) = 2a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

La comparaison de cette équation avec le principe des forces v la loi de la raison inverse du carré de la distance

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

montre que cette loi a lieu effectivement dans le mouvement pl: proquement, qu'en partant de cette loi l'on trouve pour orl conique.

Zahradník (Dr *K.*). — Contribution à l'application nants. (32-33).

Hoza (*Fr.*). — Construction de la tangente à la conch

Bernard (*J.*). — Remarque relative à la trisection de

Solution approchée.

Studnička (Dr *F.-J.*). — Remarque sur les nombr (36-37).

Hromadko (*Fr.*). — Extraits tirés des Biographies écrites par Arago. — Joseph Fourier. (49-59, 151-165, 237-247).

Bečka (Dr *B.*). — Notice sur la théorie des tangentes et des asymptotes des lignes planes. (59-74).

Seydler (*A*). — Aperçu sur les progrès récents en Astronomie. (74-84, 109-118, 257-272).

Jung (*V.*). — Signification géométrique des modules des systèmes logarithmiques. (119-121).

C'est, comme on sait, la quadrature de l'hyperbole qui donne cette signification.

Jäger (*V.*). — Solution des équations du septième degré de la forme

$$x^7 \pm 7px^5 + 14p^2x^3 \pm 7p^3x + q = 0.$$

(121-124).

On identifie cette équation avec la relation qui donne $\alpha_1^7 + \alpha_2^7$ en fonction de $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ en mettant pour $\alpha_1 + \alpha_2 = x$; cela donne

$$\alpha_1^7\alpha_2^7 = -q, \quad \alpha_1^7\alpha_2^7 \mp p^7;$$

d'où l'on tire α_1, α_2 et x.

Pánek (*A.*). — Résolution d'un triangle dans lequel on connaît ou les trois côtés ou deux côtés avec l'angle compris. (124-131).

Studnička (Dr *F.-J.*). — Sur le problème de Délos. (132-133).

Énoncé de deux solutions approchées données par le Dr *Buonfalcea* dans sa *Duplicazione del cubo e quadratura del circolo, nuove soluzioni grafiche colle dimostrazioni analitiche;* Pisa, F. Mariotti, 1878.

Pokorný (*M.*). — Théorème sur le quadrilatère inscrit dans le cercle. (133-134).

Studnička (Dr *F.-J.*). — Démonstration déductive de la formule du binôme. (145-150).

Sucharda (*A.*). — Sur la ligne décrite par un foyer d'une conique qui roule sur une de ses tangentes. (166-175).

L'auteur détermine l'équation de la roulette (à l'aide d'une quadrature) et discute sa construction graphique.

Seydler (*A.*). — Démonstration rigoureuse du parallélogramme des forces. (175-180).

Cette démonstration est fondée sur les axiomes suivants :

A. La grandeur et la position relative des forces ne changeant pas, la grandeur et la position relative de la résultante restent aussi les mêmes.

B. L'action d'un système quelconque de forces n'est pas altéré par l'addition ou par l'enlèvement d'un système qui est équilibre.

C. Les forces qui agissent sur un point suivant une même direction donnent une résultante égale à leur somme algébrique.

Ces propositions supposées vraies, on peut démontrer successivement que :

1. Deux forces dont les directions sont inclinées entre elles ne se font pas équilibre.

2. La résultante de deux forces agissant sur un point est située dans leur plan.

3. Cette résultante tombe dans l'angle déterminé par les directions des composantes.

4. Les forces P, Q ayant pour résultante R, les forces mP, mQ, de même position relative, ont une résultante mR qui a aussi la même position relative.

5. La résultante des forces P, Q faisant un angle γ est donnée, quant à la grandeur, par la formule

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\gamma + z),$$

z étant une fonction encore inconnue de γ.

6. Cet angle z est toujours égal à zéro; la résultante est donnée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme des forces.

Jeřábek (*V.*). — Lieu géométrique des centres des sections faites dans une surface quadrique par des plans menés par une droite fixe. (180-182).

Pánek (*A.*). — Sur la formule qui donne l'aire d'un quadrilatère en fonction des côtés. (182-183).

Jung (*V.*). — Remarque sur la théorie des nombres. (184-185).

Fürst (*J.*). — Sur le centre des forces parallèles. (186-187).

Šimerka (*V.*). — Remarque. (187-188).

Cette courte remarque du P. Šimerka est ainsi conçue : « Quant aux deux cas signalés par Pervouchine, c'est-à-dire que

$$d = 114689 = 7.2^{14} + 1$$

est diviseur du nombre $2^{2^{12}} + 1$ et que

$$d = 167772161 = 5.2^{25} + 1$$

divise le nombre $2^{2^{23}} + 1$, on peut s'en convaincre de la manière suivante :

Posons, pour plus de simplicité, $2_k = 2^{2^k}$; on aura

$$(2_k)^2 = (2_{k+1}).$$

Pour que le nombre $2^{2^{11}}+1 = 2_{12}+1$ fût divisible par le module 114689, il faudrait qu'on eût $2_{12} \equiv -1$. Mais on trouve

$$\begin{aligned} 2_5 &\equiv -21064, \\ 2_6 &\equiv (2_5)^2 \equiv -39645, \\ 2_7 &\equiv 27969, \\ 2_8 &\equiv -28708, \\ 2_9 &\equiv -5890, \\ 2_{10} &\equiv 56022, \\ 2_{11} &\equiv -1. \end{aligned}$$

Ce serait donc par une inadvertance qu'on a mis $2^{2^{12}}+1$ au lieu de $2^{2^{11}}+1$ dans l'énoncé du premier cas. Quant au second, on a, pour le module

$$d = 167772161,$$

$$\begin{array}{lll} & 2_5 \equiv -67108890, & 2_6 \equiv 40265974, \\ 2_7 \equiv 8214125, & 2_8 \equiv -73840779, & 2_9 \equiv -35900037, \\ 2_{10} \equiv 2027927, & 2_{11} \equiv 56706897, & 2_{12} \equiv -65302291, \\ 2_{13} \equiv 42312541, & 2_{14} \equiv 37665517, & 2_{15} \equiv 46675951, \\ 2_{16} \equiv 81947549, & 2_{17} \equiv -66200787, & 2_{18} \equiv -22450470, \\ 2_{19} \equiv -39437715, & 2_{20} \equiv 35921276, & 2_{21} \equiv 30406922, \\ 2_{22} \equiv -65249968, & 2_{23} \equiv -1. & \end{array}$$

De cette manière, on a vérifié les deux énoncés en calculant directement

$$(2_{10})^2 \equiv -1 \quad \text{et} \quad (2_{22})^2 \equiv -1;$$

quoique ces calculs soient assez laborieux, leur exécution est cependant beaucoup plus aisée que la résolution de la congruence $x^2 \equiv -1$ pour les deux modules indiqués. Il paraît que M. Pervouchine n'agit pas d'une autre manière; car autrement il aurait fait connaître les autres facteurs des deux nombres composés, ou bien il aurait pu indiquer des cas analogues en plus grand nombre. Je m'applique à généraliser cette théorie relativement aux nombres de la forme

$$(2a)^{2^n}+1 \quad \text{ou de la forme} \quad \tfrac{1}{2}[(2a+1)^{2^n}+1];$$

il semble qu'on pourra tirer avantage de leur décomposition en produits de deux séries de la forme

$$\sum_0^k (A_k 2^{n+k}+1) \times \sum_0^r (B_r 2^{n+r}+1).$$

Zahradník (Dr *K.*). — Sur la masse de l'ellipsoïde à trois axes inégaux. (188-189).

Weyr (*Éd.*). — Sur les lignes algébriques unicursales planes. (193-236).

Exposé de la théorie de ces lignes d'après les travaux de Chasles, Cayley, Clebsch, Hermite et Lüroth, avec des exemples spéciaux.

Jarolímek (*Č.*). — Sur la surface développable form normales d'un cône du deuxième degré construit d'une ligne de courbure. (247-257).

L'auteur donne l'équation de cette surface, ainsi que les équations de rebroussement.

Ce Tome contient en outre des exercices et des questions proposé leur solution et des notices littéraires.

A. S. et I

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES

N° 1; 3 juillet 1882.

Gyldén. — Sur la seconde comète de l'année 1784. (1

On ne possède que deux observations de cette comète, et l'on n miner que les deux éléments de l'orbite autour de la Terre; il est cette comète appartienne au même groupe que la comète périodiqu en 1881, par M. Denning.

Faà de Bruno. — Sur une nouvelle série dans les fo lliptiques. (22).

Pour construire des Tables elliptiques avec vingt décimales formule

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}} = \frac{1}{1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[4]{64k'}}$$

suffirait à elle seule pour donner les nombres cherchés.

Poincaré. — Sur les transcendantes entières. (23).

Soit une fonction entière $F(x)$ de genre n, c'est-à-dire une fonc facteurs primaires sont de la forme

$$e^{P(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$P(x)$ étant un polynôme du degré n.

Si, x croissant indéfiniment en conservant un argument déterm nombre tel que

l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(x)\, dz,$$

prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de

$$e^{(xz)^{n+1}},$$

pour $z = \infty$, soit nulle, représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

La série

$$\Sigma A_p \sqrt[n+1]{(p')\, x^p}$$

représente une fonction entière.

On peut écrire

$$F(x) = \int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1}\, dz,$$

$\Phi(z)$ désignant une fonction entière et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine.

N° 2; 10 juillet.

Gyldén (H.). — Sur l'équation différentielle qui donne immédiatement la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités du deuxième ordre inclusivement. (35).

Le but de M. Gyldén, dans ses recherches de Mécanique céleste, est de tenir compte, dès la première approximation, des termes du deuxième ordre par rapport aux forces perturbatrices; il établit, dans cette Communication, l'équation différentielle du second ordre qui, dans le sens indiqué plus haut, donne la solution du problème des trois corps.

Darboux. — Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. (69).

Il s'agit de l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2} z.$$

Cette équation ne change pas quand on soumet les variables x, y à une même substitution linéaire quelconque; donc de l'intégrale particulière

$$z = \varphi(x, y)$$

on pourra déduire l'intégrale

$$z = \varphi\left(\frac{mx+n}{px+p}, \frac{my+n}{py+q}\right);$$

c'est ainsi que de la solution

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right)$$

on peut déduire la solution obtenue par Riemann

$$\omega = \left[\frac{(y-x)(x'-y')}{(y-x')(x-y')}\right]^m F\left[m, m, 1, \frac{(y-y')(x-x')}{(y-x')(x-y')}\right].$$

Si $\varphi(x, y)$ est une solution, il en sera de même des fonctions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Si z_p désigne en général une solution de l'équation proposée, où l'on a remplacé m par p, on aura

$$z_{m+1} = \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial y} - 2m\frac{z_m}{x-y};$$

cette relation, si m est entier, fournit la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$z_m = (x-y)^m \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{m-1}}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right);$$

si m n'est pas entier, on peut supposer la partie réelle de m comprise entre 0 et 1, et l'on a alors la solution

$$z = (y-x)^m \int_x^y \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{[(y-\alpha)(\alpha-x)]^m} + (y-x)^{1-m}\int_x^y \frac{\psi(\alpha)\,d\alpha}{[(y-\alpha)(\alpha-x)]^{1-m}}.$$

L'auteur propose en outre la définition suivante de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre entre z, x, y, dans le cas où le procédé suivi par l'intégration ne fournit pas toutes les solutions.

On a l'intégrale générale toutes les fois que les arbitraires contenues dans la définition de cette intégrale permettent de satisfaire à la condition suivante : la surface représentée par l'intégrale peut être amenée à passer par une courbe quelconque et à être tangente, le long de cette courbe, à une développable quelconque donnée à l'avance.

En se plaçant à ce point de vue, l'auteur annonce que la dernière forme donnée pour z constitue, pour $m \gtrless \frac{1}{2}$, l'intégrale générale de l'équation proposée.

Lindemann. — Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. (72).

On sait que M. Hermite a démontré l'impossibilité d'une relation de la forme

$$N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} + \ldots + N_n e^{z_n} = 0,$$

où les quantités $N_1, N_2, \ldots, N_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres entiers; c'est l'étude du beau Mémoire de M. Hermite qui a conduit M. Lindemann à l'importante généralisation que voici :

Une telle relation, où les z désignent des nombres différents rationnels ou à irrationnalité algébrique et les N des nombres à irrationnalité algébrique qui ne sont pas tous nuls, est impossible : donc, en particulier, le nombre π et les

logarithmes népériens de toutes les irrationnelles algébriques sont des nombres transcendants.

Tannery (*J.*). — Rectification à une Communication antérieure sur les intégrales eulériennes. (73).

N° 3 ; 17 juillet.

Jordan (*C.*). — Rapport sur un Mémoire de M. P. Gilbert, sur divers problèmes de mouvements relatifs. (111).

Le Mémoire de M. Gilbert a pour objet l'étude du mouvement des appareils gyroscopiques, et pour point de départ un théorème donné par Bour pour étendre aux mouvements relatifs les formules célèbres de Lagrange. L'auteur retrouve cette proposition par une voie nouvelle et très simple. Une interprétation géométrique élégante des divers termes qui figurent dans cette formule lui permet ensuite d'obtenir par de simples différentiations et presque sans calcul les équations différentielles des mouvements qu'il étudie. Chacune d'elles est ensuite discutée d'une manière approfondie. Après avoir déterminé dans chaque cas les diverses positions d'équilibre qui peuvent se présenter et les conditions de stabilité, M. Gilbert procède à l'intégration des équations différentielles et réussit souvent à l'effectuer complètement.

Les appareils analysés par M. Gilbert peuvent se ramener à trois types : 1° le gyroscope de Foucault; 2° le tore-pendule et le barogyroscope; 3° la toupie.

Relativement au gyroscope, l'auteur trouve tout d'abord que l'équilibre a lieu :

1° Si l'axe du tore est parallèle à l'axe du monde;

2° Si l'anneau extérieur a, par rapport au méridien, une vitesse de rotation égale et contraire à celle de ce méridien lui-même;

3° Si la vitesse de rotation du tore a une valeur convenable.

M. Gilbert s'occupe ensuite de l'intégration des équations différentielles; il montre qu'elle peut s'effectuer par les fonctions elliptiques dans les trois cas suivants (d'ailleurs connus) :

1° Si l'anneau extérieur du gyroscope est invariablement fixé au plan du méridien;

2° S'il est invariablement fixé à l'anneau intérieur;

3° Si l'axe de rotation de l'anneau extérieur est dirigé suivant l'axe du monde, pourvu qu'on néglige, en outre, la masse des anneaux.

Dans chacun de ces trois cas, l'un des angles variables dont dépend la position du gyroscope est déterminé par une équation différentielle identique à celle dont dépend le mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un diamètre vertical. Cet angle subira donc des oscillations périodiques dont la loi s'exprime par des fonctions elliptiques du temps; chacun des autres angles se compose d'une fonction linéaire du temps et d'un terme périodique, où figurent les transcendantes Θ. Le *barogyroscope* imaginé et étudié par M. Gilbert offre une disposition particulièrement ingénieuse. Une chape en acier est supportée par deux couteaux placés aux extrémités de son diamètre horizontal. Elle porte à son intérieur un tore ayant pour axe un second diamètre perpendiculaire au premier. Cet axe se prolonge par une tige mince, terminée par une aiguille et le long de laquelle on peut faire monter ou descendre un curseur.

L'appareil doit être réglé de telle sorte que dans l'état de repos l'axe du tore soit vertical et que le centre de gravité du système se trouve sur cet axe, un peu au-dessous de la ligne des couteaux. On remplira aisément cette dernière condition par le déplacement du curseur.

Supposons que l'appareil ainsi réglé soit placé de telle sorte que le plan d'oscillation de l'aiguille soit confondu avec le méridien et imprimons au tore un mouvement de rotation rapide, de gauche à droite par rapport à la zénithale. L'aiguille déviera aussitôt vers le nord et exécutera une série d'oscillations autour d'une position d'équilibre nettement distincte de la verticale.

Si le tore tournait de droite à gauche, on observerait une déviation vers le sud, un peu moins forte que la précédente.

Enfin, si l'on tourne l'appareil de manière à faire varier l'azimut du plan d'oscillation de l'aiguille, on verra les effets s'atténuer à mesure que ce plan s'écarte du méridien, et, lorsqu'il sera venu dans le premier vertical, on ne constatera plus aucune variation.

Radau. — Sur un point de la théorie des perturbations. (117).

Pour éviter la variation des constantes, on peut comparer l'orbite actuelle d'une planète à une certaine orbite fondamentale dont les éléments sont des constantes absolues. M. Radau étudie et compare diverses façons de procéder dues à Hansen, à M. Gyldén et à lui-même. (*Bulletin*, 2e série, t. V, 1881; Ire Partie, p. 270).

Rouget. — Observations astronomiques sans mesures d'angles. (120).

Suite aux Mémoires des 3 et 10 janvier 1881. — I. Perfectionnement des formules qui utilisent les trajectoires combinées. — II. Doubles solutions d'une même trajectoire — III. Théorie des observations circumpolaires : son application à la détermination de la longitude par l'heure du passage de la Lune dans le vertical d'une étoile passant près du zénith.

Boussinesq. — Sur le choc d'une plaque élastique plane supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni. (125).

Soient μ la masse de ce solide, rapportée à celle de la plaque par unité d'aire, φ le déplacement, à l'époque t d'un point (x, y) du feuillet moyen de la plaque, r la distance de ce point heurté, pris lui-même pour origine et où est censée concentrée la masse μ, enfin $F(t)$ l'impulsion extérieure totale jusqu'à l'époque t; l'auteur trouve par une méthode d'intégration exposée dans le numéro des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 20 février 1882 le résultat suivant :

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(at - \frac{r^2}{2\zeta}\right) \sin\frac{\zeta}{2}\,\frac{d\zeta}{\zeta},$$

en supposant

$$f(at) = \frac{1}{4\pi a}\left[F(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{8a\frac{\theta - t}{\mu}} F'(\theta)\,d\theta\right];$$

il déduit de là diverses conséquences relatives au rapport de la vitesse prise par la petite partie directement ébranlée et de la vitesse de propagation des sons longitudinaux, ainsi qu'à la limite vers laquelle tend le déplacement du point heurté.

N° 4; 24 juillet.

Folie. — Théorie du mouvement diurne de l'axe du monde. (163).

Faye. — Observations relatives à la publication des *Annales de l'Observatoire* de Rio de Janeiro. (164).

M. Faye fait l'historique du développement de cet Observatoire.

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires faites à l'Observatoire royal du Collège Romain, pendant le premier semestre de 1882. (165).

Ricco. — Latitude des groupes de taches solaires en 1881. (167).

Hall. — Sur l'orbite de Japhet. (168).

Réduction des observations de Bernard; leur comparaison avec les éléments adoptés.

Zenger (*C.*). — Solution rapide du problème de Kepler.

Pour résoudre l'équation

$$E - e \sin E = F,$$

l'auteur donne la formule approchée

$$\cos E = \cos F - \frac{e \cos F}{1 + \frac{1}{6}\sin^2(e\omega) + \frac{3}{40}\sin^4(e\omega) + \ldots},$$

où $e\omega$ est l'excentricité exprimée en secondes d'arc; cette formule suppose l'excentricité e très faible.

Cette formule donne une valeur de E approchée à quelques minutes près.

N° 5; 31 juillet.

Zenger. — Note additionnelle sur la solution rapide du problème de Kepler. (207).

L'auteur montre comment, de la solution approchée donnée par lui, on peut déduire rapidement d'autres solutions plus approchées.

Zenger. — Tables approchées pour calculer l'anomalie vraie des planètes. (206).

Machal (*Y.*). — Sur quelques théorèmes d'électricité démontrés d'une manière inexacte dans les Ouvrages didactiques. (210).

Sébert et *Hugoniot*. — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (215).

Déterminer le mouvement vibratoire d'une barre élastique et homogène de longueur finie, dont l'une des extrémités est soumise à des efforts quelconques, pressions ou torsions, variables avec le temps, l'autre extrémité étant libre ou encastrée.

N° 6; 7 août.

Radau. — Remarques concernant le problème de Kepler. (274).

Examen de la méthode de Gauss, abrégée par l'emploi des Tables de M. Doberck; critique de la méthode de M. Zenger.

Tacchini. — Observations des protubérances, des facules et des taches solaires faites à l'Observatoire du Collège Romain, pendant le premier semestre de 1882. (276).

Sébert et *Hugoniot*. — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (278).

En supposant qu'il y ait une extrémité encastrée, les efforts exercés à l'extrémité libre se transmettent intégralement de proche en proche vers le point d'encastrement. Là, ils éprouvent une réflexion sans changement de signe et reviennent vers l'extrémité libre où ils subissent une nouvelle réflexion, avec changement de signe.

Les vitesses que la force imprime à chaque instant à l'extrémité libre se transmettent d'une façon analogue; toutefois elles éprouvent, à l'extrémité encastrée, une réflexion avec changement de signe et à l'autre extrémité une réflexion sans changement de signe.

Les efforts produits par ces différentes ondes s'ajoutent les uns aux autres, conformément au principe de superposition.

Si la force cesse d'agir au bout d'un certain temps, le mouvement périodique s'établit. — Les auteurs ont établi des formules qui représentent le mouvement dans tous les cas.

N° 7; 14 août.

Faye. — Note sur la théorie des cyclones de M. le D[r] Andries. (316).

Rozé. — Des termes à courte période dans les mouvements de rotation de la Terre. (327).

Sur les variations périodiques de l'angle entre l'axe principal de la Terre regardée comme un solide invariable et l'axe résultant des moments des quantités de mouvements.

Wolf. — Description de l'amas de l'Écrevisse et mesures micrométriques des positions relatives des principales étoiles qui le composent. (333).

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (355).

Rectification d'une démonstration précédemment donnée par l'auteur.

Brassinne. — Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux d'inertie et aux moments d'inertie. Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie. (337).

Sébert et *Hugoniot.* — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (338).

Cas où aucune extrémité n'est encastrée; étude du problème suivant, généralisation d'un problème traité par Navier :

Une tige fixée à une extrémité subit à l'autre le choc d'un corps, de poids Π, supposé assez court ou assez raide pour qu'on puisse en négliger le mouvement vibratoire; le corps est lui-même sollicité, parallèlement à la direction de la tige, par une force quelconque $F(t)$ et l'on se propose de déterminer le mouvement du système, en supposant que la masse étrangère demeure, après le choc, invariablement reliée à la tige. (340).

N° 8; 21 août.

De Saint-Venant. — Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considération du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. (360).

Cette Communication de M. de Saint-Venant et une autre postérieure (n° 10) se rapportent au problème traité par MM. Sebert et Hugoniot. Le savant auteur montre, en prenant pour exemple une solution en série trigonométrique, que le problème du choc longitudinal, par un corps de forme quelconque d'une barre élastique fixée à un bout, peut être résolu comme cas simple et extrême de celui du choc mutuel de deux barres. Il en induit que le problème est susceptible d'une solution en termes finis, qui se prête mieux au calcul.

Il rappelle celle qu'il a donnée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 30 mars 1868 en formules de deux termes, pour le cas de liberté complète de la barre heurtée; puis il donne une solution analogue, débarrassée des complications de la mise en compte des ébranlements intérieurs du corps heurtant, pour le cas bien plus pratique d'une barre fixée au bout opposé à celui qui reçoit le choc.

Borrelly. — Observations des planètes (226) et (227) à l'Observatoire de Marseille. (376).

Tacchini. — Sur les éruptions métalliques solaires, observées à Rome pendant le 1er semestre 1882. (377).

N° 9; 28 août.

Mouchez. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue élevée à Fermat dans la ville de Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne). (399).

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète de Wells, faites à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1882. (403).

Paul et *Prosper Henry.* — Observations des planètes (227) et (229) faites à l'équatorial ouest du jardin de l'Observatoire de Paris. (415).

Zenger. — Solution du problème de Kepler pour des excentricités considérables.

N° 10; 4 septembre.

De Saint-Venant. — Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité heurtée. (423).

Voir plus haut.

Faye. — Sur la figure des comètes. (417).

De Gasparis. — Sur le problème de Kepler. (446).

μ, ε étant les anomalies moyenne et excentrique, en parties du rayon comptées de l'aphélie, on a

$$\mu - \varepsilon = \frac{\mu e}{1+e}\left[1 - \frac{\mu^2}{6}\frac{1}{(1+e)^3} - \frac{\mu^4}{120}\frac{9e-1}{(1+e)^6} - \frac{\mu^6}{5040}\frac{225e^2-54e+1}{(1+e)^9} - \frac{\mu^8}{362880}\frac{11025e^3+4131e^2+243e-1}{(1+e)^{12}} - \ldots\right].$$

Brassinne. — Balance d'oscillation pour le calcul des moments d'inertie. (446).

Une tige verticale traverse l'axe horizontal de suspension, qu'elle dépasse un peu. Sa partie inférieure est reliée à une couronne circulaire graduée, qui supporte un petit plateau mobile sur lequel le corps est posé. Chaque expérience d'oscillation donne la valeur du moment d'inertie autour d'une parallèle à la suspension passant par le centre de gravité, parallèle qui variera par une rotation convenable du plateau.

Un poids déterminé, suspendu à l'extrémité supérieure de la tige, s'inclinera et donnera le moyen d'obtenir les distances Δ, D, D' du centre de gravité de l'appareil vidé, chargé, ou du corps en expérience à l'axe horizontal en suspension.

L'oscillation de l'appareil vidé fournit une longueur pendulaire λ et un moment d'inertie $\mu\lambda A$ (μ est la masse de l'appareil). Si la balance est chargée, la longueur pendulaire l donnera pour le moment d'inertie de tout système $(\mu + M)eD$. La différence des deux moments sera le moment d'inertie de la masse M.

N° 11; 11 septembre.

Faye. — Discours prononcé aux funérailles de M. *Liouville*, au nom de l'Académie des Sciences, de la Faculté des Sciences de Paris et du Bureau des Longitudes. (468).

Lemonnier. — Conditions pour que deux équations différentielles linéaires dans le second membre aient p solutions communes. Équation qui donne ces solutions. (476).

L'auteur parvient à ces conditions par un procédé analogue au procédé d'élimination de M. Sylvester entre deux équations algébriques.

Boussinesq. — Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions et notamment de celui du second ordre Δ_2. (479).

Ce paramètre exprime, à un facteur constant près, la valeur moyenne des dérivées secondes de la fonction, prises, au point considéré (x, y, z) suivant toutes les directions possibles.

N° 12; 18 septembre.

Faye. — Note sur la vie et les travaux de M. Plantamour. (495).

Bourget. — Sur les permutations de n objets et sur leur classement. (508).

La classification adoptée par l'auteur consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires : elle permet de trouver la *formule* du rang occupé par un élément déterminé dans la permutation de rang donné.

Quet. — Les carrés des forces d'induction produites par le Soleil

dans les planètes et dues à la vitesse de révolution de ces corps sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des septièmes puissances des distances à l'astre. Induction des comètes, des bolides et des étoiles filantes. (514).

N° 13; 25 septembre.

Resal. — Sur une question de principe qui se rapporte à la théorie du choc des corps imparfaitement élastiques. (547).

L'auteur admet en principe que, abstraction faite du frottement, la perte de force vive éprouvée dans le choc de deux corps imparfaitement élastiques, quelles que soient leur forme et la manière dont le choc a lieu, est égale à la force vive due aux vitesses perdues multipliée par un coefficient ε dépendant de la nature des deux corps, ε étant égal à zéro ou à l'unité dans les hypothèses où les corps seraient parfaitement élastiques ou complètement dénués d'élasticité. Dans le cas du choc direct, Navier avait fait une hypothèse qui est comprise dans celle de M. Resal.

S. M. l'Empereur du Brésil — Observations d'une comète à Rio de Janeiro. (555).

Thollon et *Gouy.* — Sur une comète observée à Nice. (555).

Flammarion. — Communication de diverses dépêches relatives à la nouvelle comète.

Fonvielle (*W. de*). — Note sur une observation de la grande comète de 1882, vue en ballon. (558).

Barbier (*É.*). — Description du dodécaèdre régulier complet. (560).

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON [1].

Tome CLXVI; 1876.

Chambers (*C.*). — Direction absolue et intensité de la force magnétique terrestre à Bombay. (75-90).

Reynolds (*O.*). — Sur le frottement de roulement. (155-174).

---

[1] Voir *Bulletin*, I_2, 187.

Spottiswoode. — Sur le contact multiple des surfaces. (227-256).

Ce Mémoire résume et continue les recherches contenues dans les Mémoires de l'auteur *On the contact of quadrics with other surfaces* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, mai 1874) et « Sur les surfaces osculatrices » (*Comptes rendus*, 6 juillet 1874). M. Spottiswoode y traite du contact tri-, quadri-, quinti-, sexti-ponctuel d'une surface quelconque et d'une quadrique ainsi que du contact à quatre, cinq et six branches : la fin de son Mémoire est consacrée aux mêmes questions, mais en remplaçant la quadrique par une cubique.

Deuxième Partie.

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (325-376).

Broun. — Sur les variations quotidiennes de la moyenne force horizontale du magnétisme terrestre produites par la rotation du Soleil et les révolutions synodiques et tropiques de la Lune. (387-404).

Schuster. — Sur la nature des forces produisant le mouvement d'un corps exposé aux rayons lumineux et calorifiques. (715-724).

Tome CLXVII; 1877.

Gordon. — Sur la détermination de la constante de Verdet en unités absolues. (1-34).

Brodie. — Le calcul des opérations chimiques. (34-116).

Shadwell (*C.*). — Contribution au magnétisme terrestre. (137-148).

Darwin (*H.*). — Influence des changements géologiques sur l'axe de rotation de la Terre. (271-312).

Les changements causés dans l'obliquité de l'écliptique par une petite déformation graduelle de la figure de la Terre ne peuvent être que très petits; ainsi, pendant la période glaciaire et en supposant les circonstances les plus favorables, l'obliquité de l'écliptique n'a pas dû varier de plus de $\frac{1}{100}$ de seconde d'arc; par suite, l'axe de rotation coïncide sensiblement avec l'axe principal de figure.

L'auteur discute avec détail la possibilité du changement géographique du pôle terrestre dans l'hypothèse d'une plasticité plus ou moins grande, puis, en supposant la densité intérieure constante, examine quelles formes doivent présenter les continents et le fond des mers pour que le transport d'une quantité donnée de matière d'un lieu à l'autre produise le plus grand déplacement pos-

sible des pôles terrestres et calcule, dans différentes suppositions ou d'après les données de la Géologie, des limites supérieures de ce déplacement.

Spottiswoode (*W.*). — Sur les surfaces et les courbes hyperjacobiennes. (351-365).

Soient U, φ, ψ, ... des fonctions homogènes des quatre coordonnées x, y, z, t; si l'on considère la matrice

$$\left\| \begin{matrix} U'_x & U'_y & U'_z & U'_t & \Delta U & \Delta' U & \dots \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t & \Delta\varphi & \Delta'\varphi & \dots \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z & \psi'_t & \Delta\psi & \Delta'\psi & \dots \end{matrix} \right\|,$$

où U'_x, U'_y, ... sont les dérivées premières de la fonction U, où ΔU, $\Delta' U$, ... désignent des dérivées d'ordre supérieur au premier, où φ'_x, ..., $\Delta\varphi$, ψ'_x, ... $\Delta\psi$ ont un sens analogue, où l'on suppose enfin que le nombre des colonnes excède le nombre des lignes d'une unité, les deux déterminants indépendants que l'on peut tirer de cette matrice, égalés à zéro, représentent des *surfaces hyperjacobiennes*, l'intersection de ces surfaces est une courbe hyperjacobienne. Les fonctions φ, ψ, ... étant supposées du même degré n, on voit clairement comment la théorie de ces surfaces et de ces courbes se relie à l'étude du contact (d'un ordre plus ou moins élevé) de la surface $U = 0$ avec les surfaces du système linéaire $a\varphi + b\psi + \ldots = 0$. C'est dans ce sens que M. Spottiswoode étudie les propriétés des surfaces et des courbes hyperjacobiennes : ces recherches se relient à celles de M. Brill (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 450), à celles de M. Krey (*Id.*, t. X, p. 231), enfin à celles qu'il a publiées lui-même dans son Mémoire *On the sextactic point of a plane curve* (*Phil. Trans.*, 1865, p. 657).

Casey (*J.*). — Sur une nouvelle forme de l'équation tangentielle. (367-440).

M. Casey montre sur un grand nombre d'exemples, d'une nature élémentaire, tout le parti qu'on peut tirer de la considération de l'équation de la droite

$$x + y \cot\varphi - r = 0,$$

où r désigne une fonction de φ; cette équation définit une courbe, enveloppe de la droite variable. Les dernières pages de son Mémoire, relatives aux quartiques bicirculaires, offrent un intérêt particulier. L'auteur parvient à la rectification de ces courbes au moyen des intégrales elliptiques et généralise ainsi les théorèmes de M. W. Roberts et de M. Genocchi relatifs aux arcs des ovales de Descartes.

Cette rectification repose sur la quadruple génération des quartiques bicirculaires [Casey, *Bicirculars quartics* (*Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIV, p. 480)]. Une telle courbe peut en effet être regardée comme l'enveloppe d'un cercle qui coupe orthogonalement un cercle fixe et dont le centre décrit une conique fixe, dite *focale*, et cela de quatre façons différentes; les quatre coniques focales sont homofocales; les quatre cercles correspondants, dont chacun peut être regardé comme un cercle d'inversion de la quartique sont orthogonaux et leurs centres sont, par conséquent, disposés comme les sommets

et le point de rencontre des hauteurs d'un triangle; l'un d'eux est évidemment imaginaire; à cette quadruple génération se relie cette intéressante proposition de Géométrie : si l'on considère quatre cercles tels que ceux qui viennent d'être décrits et que l'on prenne la figure inverse d'une figure donnée par rapport au premier cercle, puis qu'on transforme de la même façon cette figure inverse par rapport au second cercle, ..., la quatrième inversion reproduira la figure primitive; on voit, d'après cela, qu'il existe dans une quartique bicirculaire une infinité de quadrilatères inscrits dont les côtés vont passer par les centres des quatre cercles d'inversion, chacun des côtés pouvant être regardé comme la corde de contact du cercle bitangent à la quartique dans un des modes de génération; en combinant cette proposition avec le théorème suivant :

Si la sécante OPP′ *coupe le cercle* J *aux points* P, P′, *la différence ou la somme des diamètres des deux cercles qui passent par le point* O *et qui touchent le cercle* J *aux points* P, P′ *est égale au diamètre du cercle* J,

on parvient à la rectification de la quartique.

Si, en effet, on fait varier infiniment peu le quadrilatère inscrit, en désignant par ds, ds' les arcs décrits par deux sommets, par ρ le rayon du cercle générateur bitangent à la quartique aux deux sommets, le théorème précédent conduit immédiatement à la formule

$$ds' \pm ds = 2\rho d\theta,$$

θ étant l'angle du côté du quadrilatère avec une direction fixe; en considérant ainsi les quatre côtés, on parvient à la formule

$$ds = \int \rho d\theta + \int \rho' d\theta' + \int \rho'' d\theta'' + \int \rho''' d\theta''';$$

un calcul bien facile montre ensuite que les quatre intégrales qui figurent dans le second membre dépendent des intégrales elliptiques.

Cayley. — Sur les quartiques bicirculaires : addition au Mémoire du professeur Casey « Sur une nouvelle forme de l'équation tangentielle ». (441-460).

Les recherches de M. Cayley complètent de la façon la plus heureuse, dans le sens analytique, les résultats obtenus géométriquement par M. Casey : les élégants calculs de l'éminent géomètre ont naturellement le même point de départ que les recherches géométriques de M. Casey, la considération d'un quadrilatère inscrit ABCD et du quadrilatère infiniment voisin A′B′C′D′; la position de chaque côté (qui passe par l'un des centres des cercles d'inversion) dépend d'un paramètre ω, les quatre paramètres ω, ω_1, ω_2, ω_3 dépendant d'ailleurs d'un seul. Chacun des arcs infinitésimaux AA′, BB′, CC′, DD′ est susceptible de deux expressions différentes; par exemple, AA′ peut s'exprimer sous les formes $M d\omega$ et $M_1 d\omega_1$ et C, ...; les identités entre ces diverses formes résultent des relations entre les paramètres; chacune d'elles est d'ailleurs compliquée et ne dépend pas simplement des fonctions elliptiques; ce sont les expressions BB′ — AA′, CC′ — BB′, DD′ + CC′, DD′ — AA′ que M. Casey obtient sous forme de différentielles qui dépendent uniquement des fonctions elliptiques et c'est de ces expressions qu'il déduit l'expression de AA′ comme somme de quatre telles différentielles.

M. Cayley se propose d'obtenir directement les expressions monômes telles

que $M\,d\omega$ et d'en déduire l'expression de l'arc infinitésimal dS sous la forme de M. Casey,

$$dS = N\,d\omega + N_1\,d\omega_1 + N_2\,d\omega_2 + N_3\,d\omega_3.$$

Si l'on considère en particulier l'un des quatre modes de génération de la quartique, en désignant par $(f+\theta)x$, $(g+\theta)y$ les coordonnées d'un point M de la conique focale

$$\frac{X^2}{f+\theta}+\frac{Y^2}{g+\theta}-1=0,$$

par ω l'anomalie excentrique correspondante, par α, β, γ les coordonnées et le rayon du cercle d'inversion, le cercle générateur dont la quartique est l'enveloppe ayant pour centre le point M et pour rayon δ, l'un des côtés du quadrilatère inscrit ABCD sera la perpendiculaire abaissée du point (α, β) sur la tangente en M à l'ellipse focale et les deux points où cette perpendiculaire rencontre le cercle générateur seront deux sommets du quadrilatère. On aura les quantités analogues relatives aux trois autres modes de génération en affectant des indices 1, 2, 3 les quantités x, y, θ, α, β, γ, δ.

M. Cayley parvient aux formules suivantes qui donnent les expressions (sous une double forme) des arcs infinitésimaux AA', BB', CC', DD' décrits par les quatre sommets du quadrilatère

$$dS = -\varepsilon R'\,\delta\,\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}\sqrt{\Theta}} = \varepsilon_1 R_1\,\delta_1\,\frac{d\omega_1}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Theta_1}},$$

$$dS_1 = \varepsilon_1 R'_1\,\delta_1\,\frac{d\omega_1}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Theta_1}} = \varepsilon_2 R_2\,\delta_2\,\frac{d\omega_2}{\sqrt{\Omega_2}\sqrt{\Theta_2}},$$

$$dS_2 = \varepsilon_3 R'_2\,\delta_2\,\frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_2}\sqrt{\Theta_2}} = \varepsilon_3 R_3\,\delta_3\,\frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_3}\sqrt{\Theta_3}},$$

$$dS_3 = \varepsilon_3 R'_2\,\delta_2\,\frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_3}\sqrt{\Theta_3}} = \varepsilon R\,\delta\,\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}\sqrt{\Theta}};$$

les quantités ε représentent l'unité positive ou négative; on a d'ailleurs

$$\Theta = (f+\theta)(g+\theta),$$

$$\Omega = (1-\alpha x-\beta y)^2 - \gamma^2(x^2+y^2),$$

$$R = \frac{1-\alpha x-\beta y+\sqrt{\Omega}}{x^2+y^2},\quad R' = \frac{1-\alpha x-\beta y-\sqrt{\Omega}}{x^2+y^2},$$

et des expressions analogues pour les quantités affectées d'indices; on déduit de ces formules

$$dS + dS_1 = +2\varepsilon\,P\,d\omega,$$

$$dS_1 - dS = -2\varepsilon_1 P_1\,d\omega_1,$$

$$dS_2 - dS_1 = -2\varepsilon_2 P_2\,d\omega_2,$$

$$dS_3 - dS = -2\varepsilon_3 P_3\,d\omega_3,$$

en faisant

$$P = \frac{\delta}{(x^2+y^2)\sqrt{\Theta}},\quad P_1 = \ldots;$$

et de là on tire

$$dS = \varepsilon P\,d\omega - \varepsilon_1 P_1\,d\omega_1 + \varepsilon_2 P_2\,d\omega_2 + \varepsilon_3 P_3\,d\omega_3,$$

et des expressions analogues pour dS_1, dS_2, dS_3; enfin chacune des intégrales telles que $\int \frac{\delta d\omega}{(x^2+y^2)\sqrt{\Theta}}$ ne dépend plus que des intégrales elliptiques et M. Cayley effectue la réduction.

Sabine (*E.*). — Contribution au magnétisme terrestre. (461-508).

Jenkin (*F.*). — Sur le frottement entre deux surfaces qui se déplacent lentement. (509-528).

Tome CLXVIII; 1879.

Ce Volume ne contient aucun travail mathématique.

Tome CLXIX; 1878.

Lockyer. — Rapport sur l'éclipse totale de Soleil du 6 avril 1875. (139-154).

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (243-318).

Joule (*P.*). — Nouvelle détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. (365-384).

Cayley. — Addition au Mémoire sur la transformation des fonctions elliptiques. (419-424).

L'auteur complète pour le cas de $n = 7$ les résultats de son *Memoir on the transformation of elliptic Functions* (*Phil. Trans.*, t. CLXIV, 1874; p. 397-456).

Cayley. — Dixième Mémoire sur les quantics. (603-662).

Ce Mémoire, qui, par sa nature même, échappe à l'analyse, est relatif à la forme binaire du cinquième ordre.

Clifford. — Sur la classification des lieux. (663-681).

Courbes unicursales d'ordre n dans un espace à n dimensions; courbes unicursales d'ordre n dans un espace à $n-1$, à $n-k$ dimensions; courbes elliptiques (ou bicursales) d'ordre n dans un espace à $n-1$ dimensions; théorie des points dérivés sur une courbe elliptique; courbes de genre p; relation entre l'ordre et le genre d'une courbe.

Tome CLXX; 1879.

Darwin. — Des marées de la Terre regardée comme un sphéroïde visqueux et semi-élastique; des marées océaniennes en supposant un noyau susceptible de céder. (1-86).

Ce travail peut être regardé comme faisant suite à un Mémoire de Sir William Thomson (*Phil. Trans.*, 1863, p. 573); ses conclusions sont nettement contraires à la supposition d'une masse liquide considérable à l'intérieur de la Terre.

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (87-134).

Crookes. — Sur l'illumination des lignes de pression moléculaire; sur les trajectoires des molécules. (135-164).

Niven (D.). — Sur une certaine intégrale définie qui se rencontre dans l'analyse sphérico-harmonique et sur le développement en séries des potentiels de l'ellipsoïde et de l'ellipse. (379-416).

Il s'agit de l'intégrale définie

$$\int_S e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}\,ds$$

étendue à tous les éléments ds de la surface S d'une sphère de rayon R; x, y, z désignent les coordonnées d'un point de l'élément ds : on trouve immédiatement que cette intégrale est égale à

$$2\pi R\,\frac{e^{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}-e^{-R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

ou, en développant en série, à

$$2\pi R^2\left[1+\frac{R^2}{3!}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\ldots+\frac{R^{2i}}{(2i+1)!}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^i+\ldots\right].$$

Si maintenant V désigne une fonction quelconque de x, y, z développable en série de Taylor pour tous les points de la sphère, cette série pourra s'exprimer symboliquement par la formule

$$e^{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)}V,$$

et, par conséquent, l'intégrale $\int_S V\,ds$ étendue à tous les éléments ds de la surface sphérique S pourra être représentée par la série

$$4\pi R^2\sum_0^\infty \frac{R^{2i}}{(2i+1)!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^i V,$$

où le facteur élevé à la puissance i a une signification symbolique qui s'aperçoit immédiatement. Il est à peine utile de dire qu'il y a un théorème analogue où la sphère est remplacée par un cercle. M. Niven fait d'intéressantes applications de ce théorème, d'une part à la théorie des fonctions sphériques, de l'autre au développement en série des potentiels de l'ellipsoïde et de l'ellipse.

Darwin. — Sur la précession dans un ellipsoïde visqueux et sur l'histoire géologique ancienne. (447-538).

Darwin. — Problèmes relatifs aux marées d'un ellipsoïde visqueux. (539-594).

Crookes. — Contribution à la physique moléculaire dans un vide extrême. (641-682).

Reynolds (*O.*). — Sur certaines propriétés relatives aux dimensions de la matière dans l'état gazeux. (727-846).

Tome CLXXI; 1880.

Niven (*C.*). — Sur la propagation de la chaleur dans un ellipsoïde de révolution. (117-152).

Hicks. — Sur le mouvement de deux sphères dans un fluide. (455-492).

Adney. — Sur la photographie de l'extrémité la moins réfrangible du spectre solaire. (653-668).

Huggins (*W.*). — Sur la photographie du spectre des étoiles. (669-690).

Darwin. — Sur les perturbations séculaires des éléments de l'orbite d'un satellite tournant autour d'une planète, causées par le phénomène des marées. (713-892).

Cayley. — Mémoire sur les fonctions Θ, simples et doubles.

La marche suivie par l'illustre géomètre pour établir les propriétés des fonctions Θ, simples ou doubles, conviendrait encore évidemment pour les fonctions analogues à un nombre quelconque de variables; toutefois, en se bornant à ces cas relativement simples, il a pu donner aux résultats de sa théorie une forme plus explicite. — Nous allons en indiquer rapidement les principales étapes.

En posant

$$\begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}am^2 + \tfrac{1}{2}\pi i u,$$

$$\begin{pmatrix} m, & n \\ u, & v \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}(am^2 + 2hmn + bn^2) + \tfrac{1}{2}\pi i(mu + nv),$$

et de même

$$\begin{pmatrix} m + \alpha \\ u + \gamma \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}a(m + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\pi i(u + \gamma),$$

$$\begin{pmatrix} m + \alpha, & n + \beta \\ u + \gamma, & n + \gamma \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}[a(m + \alpha)^2 + \ldots] + \tfrac{1}{2}\pi i[m(u + \gamma) + \ldots],$$

les fonctions $\mathfrak{S}$ à une ou deux variables sont définies par les formules

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}(u) = \Sigma e^{\begin{pmatrix}m+\alpha\\ u+\gamma\end{pmatrix}},$$

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u, v) = \Sigma e^{\begin{pmatrix}m+\alpha, & n+\beta\\ u+\gamma, & v+\delta\end{pmatrix}};$$

les quantités m, n doivent prendre toutes les valeurs entières paires; les constantes a, h, b doivent satisfaire aux conditions exigées pour la convergence des séries; les quantités u, v sont les variables. Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers; quand on ne s'impose pas cette restriction, on n'a plus affaire aux fonctions $\mathfrak{S}$ proprement dites, mais à des fonctions adjointes (*allied functions*). L'équation évidente

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha+2x, & \beta+2y\\ \gamma+2z, & \delta+2w\end{pmatrix}(u, v) = (-1)^{\alpha x+\beta w}\,\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u, v),$$

où x, y, z, w désignent des entiers, montre qu'on obtiendra toutes les fonctions $\mathfrak{S}$ distinctes en donnant aux quantités α, β, γ, δ les valeurs 0 et 1 : on aura ainsi quatre fonctions $\mathfrak{S}$ simples et seize fonctions $\mathfrak{S}$ doubles; quand on ajoute aux quantités α, β, γ, δ des entiers impairs, les fonctions s'échangent entre elles.

Les propriétés relatives à la périodicité résultent des égalités

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u+z, v+w) = \mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma+z, & \delta+w\end{pmatrix}(u, v),$$

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\left(u+\frac{ax+hy}{\pi i},\quad v+\frac{hx+by}{\pi i}\right) = \lambda\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha+x, & \beta+y\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u, v),$$

où

$$\lambda = e^{-\frac{ax^2+2hxy+by^2}{4}-\frac{\pi i}{2}[(u+\gamma)x+(v+\delta)y]},$$

x et y désignant des nombres entiers.

Les propriétés relatives à l'addition (*product-theorem*) dépendent de la proposition suivante :

Le produit

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u+u', v+v') \times \mathfrak{S}\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}(u-u', v-v')$$

est égal à la somme de quatre produits qui se déduisent de la formule

$$\Theta\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}+p, & \dfrac{\beta+\beta'}{2}+q\\ \gamma+\gamma', & \delta+\delta'\end{pmatrix}(2u, 2v)$$
$$\times\,\Theta\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha-\alpha'}{2}+p, & \dfrac{\beta-\beta'}{2}+q\\ \gamma-\gamma', & \delta-\delta'\end{pmatrix}(2u', 2v'),$$

en prenant pour p, q respectivement les systèmes de valeurs 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1; *quant au symbole Θ, il a le sens du symbole $\mathfrak{S}$ dans lequel on remplace*

a, h, b par $2a$, $2h$, $2b$. Cette proposition s'établit directement de la façon la plus simple.

Il est à peine utile de dire que les propositions qui n'ont été mentionnées que pour les fonctions ϑ doubles ont leurs analogues dans la théorie des fonctions ϑ simples : il suffit, pour ces dernières, de supprimer les lettres qui correspondent aux secondes variables. Ainsi, en donnant aux nombres α, γ les quatre groupes de valeurs 0, 0; 1, 0, ..., le théorème précédent fournit seize équations dont les premiers membres sont des produits de fonctions ϑ simples à systèmes d'indices pareils ou dissemblables, et dans les seconds membres desquelles figurent ou des fonctions Θ véritables, ou des fonctions adjointes; dans le cas des fonctions ϑ doubles, on obtient 256 équations analogues; M. Cayley donne le tableau complet de toutes ces équations. Par exemple, pour les fonctions ϑ simples, on aura

$$\begin{aligned}
\vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(u+u')\vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(u-u') &= \mathrm{XX}'+\mathrm{YY}',\\
\vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(u+u')\vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(u-u') &= \mathrm{YX}'+\mathrm{XY}',\\
\vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(u+u')\vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(u-u') &= \mathrm{XX}'-\mathrm{YY}',\\
\vartheta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(u+u')\vartheta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(u-u') &= -\mathrm{YX}'+\mathrm{XY}',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les quantités X, Y désignant $\Theta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(2u)$, $\Theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(2u)$, et les quantités X′, Y′ les mêmes fonctions de $2u'$, $2v'$.

En faisant u' nul dans ces équations, on voit que les carrés des quatre fonctions ϑ s'expriment linéairement au moyen de X et Y et que, ainsi, ces carrés peuvent être regardés comme proportionnels aux quatre quantités

$$\mathfrak{A}(a-x),\quad \mathfrak{B}(b-x),\quad \mathfrak{C}(c-x),\quad \mathfrak{D}(d-x),$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, a, b, c, d désignant des constantes et x une variable : ce résultat s'interprète géométriquement si l'on regarde les quatre fonctions ϑ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace. Arrivé là, M. Cayley abandonne la notation avec deux indices $\vartheta\begin{pmatrix}\alpha\\\gamma\end{pmatrix}$ dont l'usage a été si avantageux pour systématiser les résultats essentiels de la théorie des fonctions ϑ, mais ne va pas sans quelques longueurs : les notations

$$\vartheta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(u)$$

sont dorénavant remplacées par les suivantes :

$$\mathrm{A}(u),\quad \mathrm{B}(u),\quad \mathrm{C}(u),\quad \mathrm{D}(u).$$

En combinant convenablement les douze équations qui complètent les quatre équations que l'on a précédemment écrites explicitement, on parvient à des for-

mules telles que la suivante :

$$\frac{B(u+u')A(u-u') - A(u+u')B(u-u')}{C(u+u')D(u-u') + D(u+u')C(u-u')} = \text{fonction de } u.$$

La forme de la fonction qui figure dans le second membre s'obtient immédiatement en faisant $u = 0$ dans le premier membre : cette fonction s'annule évidemment pour $u' = 0$. En supposant que u' tende vers zéro, on arrive à l'égalité

$$\frac{A(u)B'(u) - B(u)A'(u)}{C(u)D(u)} = \text{const.}$$

où A', B' désignent les dérivées de A, B.

On voit ainsi que la dérivée de la fonction-quotient $\frac{B(u)}{A(u)}$ est égale à une constante multipliée par le produit des deux fonctions-quotient $\frac{C(u)}{A(u)}$ et $\frac{D(u)}{A(u)}$.

En substituant à la place de ces dernières valeurs leurs expressions en x, on arrive à la formule

$$du = \frac{M\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}},$$

et l'on voit ainsi apparaître les fonctions elliptiques; on a effectivement

$$\operatorname{sn}(Ku) = -\frac{1}{k}\frac{D(u)}{C(u)},$$

$$\operatorname{cn}(Ku) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{B(u)}{C(u)},$$

$$\operatorname{dn}(Ku) = \sqrt{k'}\,\frac{A(u)}{C(u)}.$$

Une autre combinaison facile des équations relatives au produit de deux fonctions ϑ donne quatre formules du type suivant :

$$C^2(0)C(u-u')C(u+u') = C^2(u)C^2(u') - D^2(u)D^2(u');$$

on tire de cette dernière, en supposant u infiniment petit,

$$\frac{C(u)C''(u) - [C'(u)]^2}{C^2(u)} = \frac{C''(0)}{C(0)} - \left[\frac{D'(0)}{C(0)}\right]^2 \frac{D^2(u)}{C^2(u)},$$

équation qui correspond à la formule de Jacobi

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\Pi}}\, e^{\frac{1}{2}u^2\left(1-\frac{E}{K}\right) - k^2\int du\int du\,\operatorname{sn}^2 u};$$

c'est de la même formule que M. Cayley déduit encore cette autre équation de Jacobi

$$\Pi(u, a) = u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

La théorie des fonctions ϑ doubles est faite sur le même plan. Les 256 équations auxquelles conduit le théorème relatif au produit de deux fonctions ϑ fournissent d'une part 16 équations où figurent linéairement les carrés de 16 fonctions ϑ, et de l'autre des relations linéaires entre des fonctions ϑ diff-

rentes; en résumé, on se trouve avoir un système de relations du second degré entre les seize fonctions $\mathfrak{D}$ qui permettent d'exprimer, au moyen de deux variables x, y, les rapports mutuels de ces fonctions.

En désignant par a, b, c, d, e, f des constantes et en posant pour abréger

$$\sqrt{a} = \sqrt{(a-x)(a-y)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sqrt{ab} = \frac{1}{x-y}\sqrt{(a-x)(b-x)(f-x)(c-y)(d-y)(e-y)}$$
$$+\frac{1}{x-y}\sqrt{(a-y)(b-y)(f-y)(c-x)(d-x)(e-x)},$$

on trouve que les 16 fonctions sont proportionnelles à des constantes multipliées par

$$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c},\ \sqrt{d},\ \sqrt{e},\ \sqrt{f},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{ac},$$
$$\sqrt{ad},\ \sqrt{ae},\ \sqrt{bc},\ \sqrt{bd},\ \sqrt{be},\ \sqrt{cd},\ \sqrt{ce},\ \sqrt{de}:$$

telle est l'origine de la notation employée par M. Cayley et qui consiste à employer une des six lettres A, B, C, D, E, F, ou un des couples AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, pour désigner les 16 fonctions.

Le théorème relatif au produit de deux fonctions $\mathfrak{D}$ fournit des expressions pour les quantités de la forme

$$\overset{u+u'}{\mathrm{A}}\,.\,\overset{u-u'}{\mathrm{B}} - \overset{u+u'}{\mathrm{B}}\,\overset{u-u'}{\mathrm{A}},$$

où il faut entendre que $\overset{u+u'}{\mathrm{A}}$, par exemple, est mis à la place de

$$\mathrm{A}(u+u',\ v+v'),$$

et où, aussi, les symboles A, B pourraient être remplacés par des lettres accouplées : en faisant tendre u' et v' vers zéro, on obtient la valeur de

$$\overset{u}{\mathrm{A}}\,\delta\overset{u}{\mathrm{B}} - \overset{u}{\mathrm{B}}\,\delta\overset{u}{\mathrm{A}},$$

où u est encore mis à la place de (u, v) et où δ est une différentielle totale, sous la forme d'une fonction du second degré des fonctions de (u, v) : en divisant par A^2, on voit qu'on obtient la différentielle totale d'une fonction-quotient exprimée au moyen des fonctions-quotients; en substituant aux fonctions-quotients leurs valeurs en x, y, on obtient des relations différentielles entre dx, dy, du, dv, relations qui montrent que, en posant

$$\mathrm{X} = \sqrt{(a-x)(b-x)\ \ldots\ (f-x)},$$
$$\mathrm{Y} = \sqrt{(a-y)(b-y)\ \ldots\ (f-y)},$$

les quantités

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} - \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}},\quad \frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$$

s'expriment linéairement au moyen de du et dv et que, ainsi, les 15 fonctions-quotients ne sont autre chose que les fonctions hyperelliptiques relatives aux intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

Enfin, M. Cayley indique la correspondance entre ses propres notations, celles de Göpel et celles de Weierstrass, ainsi que les liens de cette théorie avec la surface de Kummer.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

6e série. — Tome IV. — 2e semestre 1882.

Allan Cunningham. — Expériences hydrauliques faites à Roorkee. (43-96, 3 fig.).

Compte rendu d'expériences extrêmement intéressantes, faites de 1874 à 1879, sur les conditions de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, par le capitaine Allan Cunningham, ingénieur anglais dans l'Inde, qui les a exposées dans un Ouvrage publié, en 1881, à Roorkee.

M. Flamant a jugé qu'un résumé de ce travail méritait d'être signalé aux lecteurs des *Annales des Ponts et Chaussées*. Les ingénieurs y trouvent, en effet, d'utiles indications sur les méthodes d'observation et les résultats de mesures.

De Perrodil. — Arc d'expérience en maçonnerie de brique et ciment de Portland. (111-139, 1 pl.).

L'auteur avait demandé la construction d'un arc d'expérience destiné à être soumis à diverses épreuves dont les résultats pussent être comparés à ceux que l'on obtient par la théorie de la résistance des matériaux, et notamment par les nouvelles méthodes de calcul indiquées, dans un Ouvrage spécial, publié en 1879. Cet arc d'expérience avait une portée de 20m et l'épaisseur extrêmement faible de 0m,105; les déformations devenaient ainsi considérables et faciles à observer. Elles ont d'ailleurs dépassé de beaucoup toutes celles qui se produisent dans les arcs établis suivant les données ordinaires de la pratique des constructions.

De nombreux Tableaux, ajoutés à ce travail, résument les comparaisons des résultats des calculs et des observations ; les formules employées sont, à quelques changements de notations près, celles du Mémoire de l'auteur inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées*, en 1880 (t. XIX, p. 218-232).

Resal. — Étude sur la stabilité des ponts métalliques en arc (329-368, 2 pl.).

La recherche des conditions de stabilité à réaliser dans l'exécution du pont en fer sur la Loire, devant servir au passage du chemin de fer de jonction des deux gares de Nantes, a conduit l'auteur à différents résultats pouvant présenter quelque intérêt pour les ingénieurs qui auront à dresser des projets de ponts métalliques en arc.

---

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 211.

Cette étude a été dirigée vers les points suivants :

1° Détermination, dans chaque section d'un arc métallique articulé aux naissances, du maximum absolu du travail du fer à la compression ainsi qu'à l'extension, sous l'action simultanée de la charge permanente, des variations de la température et d'une surcharge d'épreuve immobile répartie de la manière la plus favorable;

2° Détermination de la flèche ou de l'abaissement à la clef, ainsi que du travail maximum du métal, dus à l'effet d'une charge volante pour un pont en arc ou en poutre droite, influence de la vitesse du convoi et de la charge permanente de l'ouvrage;

3° Détermination des efforts subis par les tympans rigides d'un pont en arc, par suite des déformations éprouvées par les arcs sous l'influence des variations de la température de la surcharge.

Sampitié. — Appareil orthogonal dans les voûtes biaises dont la section droite est une ellipse surbaissée. (578-599, 2 fig., 1 pl.).

Les questions concernant les appareils biais ont été résolues d'une façon complète au point de vue pratique aussi bien qu'au point de vue théorique, pour les arches où le centre est la courbe de section droite comme pour celles où il est la courbe de tête.

Dans son remarquable Ouvrage *De l'appareil et de la construction des ponts biais*, M. Graeff a, de plus, généralisé le problème; cependant sa méthode laisse de côté le cas, beaucoup plus fréquent dans la pratique, où la section droite est une ellipse surbaissée.

Quant à la construction donnée par M. Collignon, dans le *Cours de Mécanique appliquée*, pour la trajectoire orthogonale parallèle sur le développement, elle ne s'applique pas avec toute la facilité et l'exactitude désirables lorsque la section droite est surbaissée et présente une grande ouverture, 30^m par exemple.

Telles sont les hypothèses dans lesquelles s'est placé l'auteur.

Après avoir étudié l'appareil orthogonal parallèle, il montre que la méthode employée conduisait aussi facilement aux équations des sinusoïdes de développement de la trajectoire, dans le cas de l'appareil orthogonal convergent.

H. B.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE [1].

Tome IX; 1881.

Laquière (E.). — Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux

---

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 15.

demi-échiquiers rectangulaires, ayant pour frontière c l'une des médianes de l'échiquier total. (11-17).

***De Polignac.* — Note sur la marche du cavalier dans un é (17-24).**

***Humbert.* — Sur une généralisation de la théorie des continues algébriques (*suite*). (24-30).**

***De Polignac.* — Formules et considérations diverses s tant à la théorie des ramifications (*suite*). (30-41).**

***Humbert.* — Sur une formule de M. Hermite. (42-45).**

De la formule, donnée par M. Hermite,

$$B\int f(x,a)f(x,b)\,dx = \frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x}$$

où

$$f(x,a) = \frac{H(x+a)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

l'auteur déduit ce fait, démontré autrement par M. Hermite, que $f(x,a)$ satisfait à l'équation de Lamé ($n=1$),

$$f''(x,a) = (2k^2\,\mathrm{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2\,\mathrm{sn}^2 a)\,f(x,a).$$

***Léauté.* — Remarque sur le frottement d'une corde su lindre, lorsque tous deux tournent avec une grande (46-49).**



La formule qu'on applique habituellement est établie en sup cylindre fixe; elle ne peut convenir quand le cylindre se meut r M. Léauté montre comment on doit la modifier dans ce cas.

Stéphanos. — Sur certaines directions de transversales des algébriques qui correspondent aux directions des axes coniques. (49-56).

Si l'on considère une courbe algébrique quelconque dont l'équation

$$f(x,y)=0,$$

et un point quelconque M, le produit des segments compris entre le les points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant p M devient maximum ou minimum pour certaines directions, indé

et les directions axiales par l'équation

$$\varphi = \cos\omega \frac{\partial F}{\partial \sin\omega} - \sin\omega \frac{\partial F}{\partial \cos\omega} = 0.$$

Il y a une infinité de directions axiales pour les courbes de degré $2n+2$, admettant les points cycliques à l'infini pour points $(n+1)^{\text{uples}}$. — Dans le cas d'une conique, les deux directions axiales sont perpendiculaires; M. Stéphanos montre que, en général, le système des m directions axiales d'une courbe $f = 0$ (de degré m) n'est assujetti à remplir une relation métrique que dans le cas où m est pair. La démonstration de ce théorème est liée à la solution du problème suivant : Quelle condition doit remplir une fonction $\varphi(\cos\omega, \sin\omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos\omega$, $\sin\omega$ pour qu'elle coïncide avec la dérivée d'une autre fonction $F(\cos\omega, \sin\omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos\omega$, $\sin\omega$?

Humbert. — Sur la fonction $(x-1)^a$. (56-58).

Déterminer les polynômes P, Q, R de degrés respectifs p, q, r, de façon que le développement de

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R$$

commence par un terme du degré le plus élevé possible en x, savoir de degré $p+q+r+2$.

De Polignac. — Sur la représentation analytique des substitutions. (59-67).

Forme générale des fonctions entières qui peuvent servir à représenter analytiquement une substitution de k lettres.

Le Paige. — Sur la règle de multiplication des déterminants. (67-69).

Démonstration simple de cette règle en s'élevant du cas d'un déterminant de l'ordre n au cas d'un déterminant de l'orde $n+1$.

Laquière. — Démonstrations élémentaires des lois fondamentales des probabilités des écarts dans les méthodes expérimentales. (69-88).

EXTRAITS des procès-verbaux. (89-95).

Halphen. — Problème concernant les courbes planes du troisième degré. (96-112).

M. Cremona a montré que la hessienne et la cayleyenne d'un même réseau de coniques sont tangentes entre elles en neuf points. Toute courbe du troisième degré étant de trois manières différentes la hessienne d'un réseau de coniques, il lui correspond donc trois cayleyennes qui la touchent en neuf points. Donc ce problème :

Étant donnée une courbe plane du troisième degré, trouver une courbe de

la troisième classe qui lui soit tangente en neuf points, admet au moins trois solutions. M. Halphen établit la proposition suivante :

1° Si la cubique donnée est équiharmonique, le problème admet une infinité de solutions; les courbes de troisième classe, touchant la cubique en neuf points, forment un système dont ne font pas partie les trois cayleyennes; celles-ci donnent trois solutions isolées.

2° Si la cubique n'est pas équiharmonique, il n'y a pas d'autre solution que les trois cayleyennes.

Jordan. — Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples. (113-115).

Démonstration simple de ce théorème d'Eisenstein :

La série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)^{\mu}},$$

où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des fonctions linéaires des variables entières $x_1, \ldots, x_n$, par rapport auxquelles on fait la sommation, est convergente ou divergente selon que l'on a

$$2\mu > n \quad \text{ou} \quad 2\mu \leqq n,$$

pourvu, toutefois, que le déterminant des fonctions v ne soit pas nul.

Genty. — Étude sur les courbes gauches unicursales. (113-161).

Considérations générales. — Du nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe unicursale d'ordre m. — Tangente. — Plan osculateur. — Plans osculateurs stationnaires. — Points d'inflexion linéaire et tangentes singulières. — Plans surosculateurs. — Développable osculatrice. — Nombre maximum des points doubles d'une courbe gauche. — Divisions homographiques sur une courbe gauche unicursale.

Sonine. — Note sur une formule de Gauss. (162-166).

De la formule

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

l'auteur déduit la formule de Gauss relative au produit

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right).$$

Humbert. — Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre. (166-172).

L'auteur montre comment on peut obtenir l'équation entre x, y de la courbe de Clebsch, définie par les équations

$$x = a_0 + a_1\frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + a_k\frac{H'}{H}(t-\beta_k),$$

$$y = b_0 + b_1\frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + b_k\frac{H'}{H}(t-\beta_k),$$

avec

$$a_1 + \ldots + a_k = 0, \quad b_1 + \ldots + b_k = 0;$$

cette équation est du cinquième degré et la courbe considérée peut être regardée comme la perspective d'une partie de l'intersection de deux surfaces du troisième degré tangentes le long d'une conique, qui contient le point de rencontre des génératrices rectilignes de chaque surface, situées dans son plan.

Weill. — Théorème d'Arithmétique. (172).

Si un nombre N est décomposé en plusieurs parties, de manière que l'on ait

$$N = \alpha + \beta_1 + \ldots + pq + \ldots + p_1 q_1 + \ldots + rst,$$

l'expression 1.2.3...N est divisible par le produit

$$(1.2\ldots\alpha)(1.2\ldots\beta)\ldots(1.2\ldots p)^q(1.2\ldots sq)$$
$$(1.2\ldots p_1)^{q_1}(1.2\ldots q_1)\ldots(1.2\ldots r)^{st}(1.2\ldots s)^t(1.2\ldots t).$$

Extraits des procès-verbaux. (172-174).

Tome X; 1882.

Lindemann. — Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact de troisième ordre. (21-40).

Étant donnés une courbe de degré n $f = 0$ et un système linéaire

$$\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega = 0,$$

dont les éléments φ, ψ, χ, ω sont du degré s, il s'agit de déterminer les points où la courbe $f = 0$ est touchée au troisième ordre par une courbe du système linéaire. L'auteur commence par traiter les problèmes analogues pour le contact du premier ou du second ordre et retrouve ainsi les résultats connus; le procédé suivi est systématique : par exemple, pour le second ordre, on part de l'équation de la courbe appartenant à un système linéaire de trois éléments φ, ψ, χ qui touche au premier ordre, en un point donné x, la courbe $f = 0$, puis on écrit que cette équation est vérifiée quand on y remplace les coordonnées courantes x_i par $x_i + 2dx_i + 1d^2x_i$. On parvient ainsi à l'équation d'une courbe de degré $3(n+s-3)$ qui coupe la courbe $f = 0$ aux points cherchés; l'auteur montre comment le résultat coïncide avec celui obtenu par M. Brill (*Mathematische Annalen*, t. III). La méthode employée conduit naturellement à l'équation de la courbe du réseau

$$\varphi(x) + \varkappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

qui touche la courbe $f = 0$, en un point donné o, au second ordre, et, par des calculs analogues, on parvient à déterminer une courbe sur laquelle doit se trouver le point x pour que le contact soit du troisième ordre; cette courbe est de degré $4s + 6(n-3)$; la même marche permettrait de traiter ensuite le problème analogue relatif au quatrième ordre. Au surplus, la possibilité de passer du problème concernant le contact $(\gamma - 1)^{\text{uple}}$ d'un système linéaire $\gamma - 1$

fois infini au problème concernant le γ^{uple} d'un système γ fois infini, tient à la proposition générale que voici :

Soient φ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, \gamma$) *les éléments d'un système linéaire* γ *fois infini, et soient* $\varphi_i = 0$ *les courbes qui déterminent pour un système partiel* $\gamma - 1$ *fois infini et contenu dans le précédent les points où la courbe* $f = 0$ *est touchée au* $\varphi - 1^{ème}$ *ordre par une courbe de ce système partiel, l'équation de la courbe du système* γ *fois infini qui touche la courbe* $f = 0$ *au* $\gamma - 1^{ème}$ *ordre au point* x *sera de la forme*

$$\varphi_0(y)\psi_0(x) + \varphi_1(y)\psi_1(x) + \ldots + \varphi_\gamma(y)\psi_\gamma(x) = 0,$$

les coordonnées courantes étant représentées par la lettre y. Cette équation donne précisément le contenu de la loi de réciprocité de M. Brill. (*Mathematische Annalen*, t. IV, p. 527.)

Laisant. — Sur certaines propriétés des centres de gravité. (40-44).

Si plusieurs corps de même nature tournent dans le même sens autour d'axes parallèles entre eux avec la même vitesse angulaire et dans un milieu dont la température soit variable, leur centre de gravité se meut comme s'il appartenait à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers et avec la même vitesse angulaire.

Cet axe *moyen* de rotation s'obtient en prenant un point quelconque sur chacun des axes individuels et en déterminant le centre de gravité de ces points, respectivement affectés des masses des corps correspondants. Ce centre de gravité appartient à l'axe moyen.

Goursat. — Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. (45-52).

Les quantités K et K' étant définies, pour des valeurs quelconques de x, par l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0,$$

la fonction $\omega = \frac{iK'}{K}$ a été étudiée en particulier par M. Picard (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. IX, p. 149); quand on fait décrire à la variable x une courbe fermée quelconque, cette fonction, partie de la valeur ω_0 revient au point initial avec la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels satisfaisant à la relation $ad - bc = 1$; il résulte des recherches de M. Picard que, en regardant comme identiques tous les chemins qui peuvent être réduits à l'un d'entre eux sans franchir aucun des points 0 et 1, il n'y a qu'un chemin pour la variable x qui conduise de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; c'est cette proposition que M. Goursat établit directement en s'appuyant uniquement sur la façon dont se permutent les solutions de l'équation différentielle quand on tourne autour des points critiques.

Laisant. — Remarques sur la théorie des régions et des aspects. (52-55).

Recherche d'une limite supérieure du nombre des *aspects* possibles pour un système de n points. D'après M. Halphen, un aspect est la permutation qui indique l'ordre dans lequel les points apparaissent autour de l'observateur, deux permutations représentant le même aspect lorsqu'on peut les déduire circulairement l'une de l'autre.

Weill. — Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier. (55-58).

Appell. — Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables. (59-67).

La fonction

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p \mid a_{ij}) = \sum_{m_i=-\infty}^{m_i=+\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p + \varphi(m_1, \ldots, m_p)}$$

où $\varphi(m_1, \ldots, m_p)$ est la forme quadratique

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=p} a_{ij}\, m_i\, m_j \; (a_{ij}) = a_{ji},$$

s'exprime au moyen de fonctions Θ à $p-1$ variables et de fonctions ϑ d'une variable si les périodes relatives à x_p sont liées par $p-1$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$k_{i1} a_{p1} + k_{i2} a_{p2} + \ldots + k_{ip} a_{pp} = h_i \pi \sqrt{-1},$$

où

$$i = 1.2 \ldots, p-1.$$

Il y a une réduction analogue quand les p groupes de périodes simultanées des $(p-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ se réduisent à $p-1$ groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \ldots + k_{p-1} a_{i,p-1} + k_p a_{i,p} = h_i \pi \sqrt{-1}$$
$$(i = 1.2 \ldots p-1).$$

Halphen. — Sur une série d'Abel. (67-87).

Il s'agit de la série

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta) + \ldots$$
$$+ \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(n\beta) + \ldots,$$

où β désigne une quantité arbitraire. M. Halphen cherche sous quelles conditions cette série, formée avec une fonction quelconque et indéfiniment prolongée, représente effectivement cette fonction.

Il commence par étudier la série

$$F(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_n \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\ldots n} + \ldots,$$

où les μ sont indépendants de x.

La condition nécessaire et suffisante de convergence consiste dans la convergence de la série indépendante de x, qui a pour terme général

$$u_n = (-1)^{n-1}(e\beta)^n n^{-\frac{3}{2}} \mu_n.$$

Si la série $F(x)$ satisfait à cette condition, elle représente une fonction symétrique dans tout le plan.

Relativement à la série $\varphi(x)$ (d'Abel), M. Halphen établit les propositions suivantes :

Pour que la série d'Abel puisse être applicable à une fonction $f(x)$, il faut qu'il existe des constantes α laissant le produit $\alpha^m f^m(x)$ fini pour m infini.

Soit a le plus grand des modules de ces quantités α, soit u la racine positive de l'équation $ue^{1+u} = 1$; la série d'Abel représente $f(x)$ quand le module de β est moindre que ua.

En particulier, à une fonction $f(x)$ pour laquelle la constante, désignée par a, dépasse toute limite, la série d'Abel s'applique, quelle que soit la constante β.

Le produit $(ez)^m f^{(m)}(mz)$ reste fini, pour m infini, tant que le module de z reste inférieur à ua.

Mais si z conserve un même argument ω et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua, le produit $z^m f^{(m)}(mz)$ reste encore fini jusqu'à un centre limite du module de z. Soit $\varphi(\omega)$ cette limite, dont la forme dépend de la fonction $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série d'Abel s'applique à $f(x)$ consiste en ce que le point affixe de β soit situé à l'intérieur de la courbe $\rho = \varphi(\omega)$, ou, en d'autres termes, que si l'on donne à β l'argument ω, le module de β soit moindre que $\varphi(\omega)$.

La série d'Abel peut converger sans représenter la fonction qui sert à la construire. M. Halphen en cite divers exemples intéressants : en particulier, en partant de la fonction $\frac{1}{x-z}$, il parvient à la transcendante

$$G(x,z) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n+1}},$$

qui est, dans tout le plan, une fonction uniforme de x et de z, symétrique par rapport à x, fractionnaire par rapport à z. Cette fonction jouit de la propriété

$$\frac{\partial G(x,z)}{\partial x} = \frac{\partial G(x+1, z+1)}{\partial z}.$$

Perott. — Sur un théorème de Gauss. (87-88).

Nouvelle démonstration de cette proposition : l'expression

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)}$$

est une fonction entière de x.

Günther (S.) — Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques. (88-97).

Lorsque l'on cherche si l'intégrale

$$S = \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + ex + d}},$$

dans laquelle $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ représentent deux fonctions algébriques entières, respectivement d'ordre P et N, est une intégrale elliptique ou si elle peut s'effectuer sous forme finie, on posera

$$y = \frac{\alpha x^{N-P+2} + \beta x^{N-P+1} + \ldots + \mu x + r}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + cx + d}}$$

et l'on formera l'expression

$$\frac{dy}{my^2 + n}.$$

En posant ensuite

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\zeta \varphi(x)\, dx}{\psi(x)\sqrt{ax^4 + bx^2 + cx + d}},$$

ζ désignant un facteur arbitraire constant, on obtiendra, par l'identification des coefficients de x^0, x^1, x^2, ..., un système d'équations. La simultanéité de ces équations est une condition suffisante pour que l'intégrale S appartienne aux intégrales pseudo-elliptiques.

M. S. Günther applique la méthode qui résulte de cet énoncé à l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{(x^4 + 8)\sqrt{x^4 - 1}},$$

traitée par Legendre et par Clausen; il retrouve, par cette voie, les ingénieux calculs de ce dernier.

EXTRAITS des procès-verbaux. (97-103).

Perrin. — Sur le problème des aspects. (103-127).

Weill. — Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe (127-131).

Si l'on mène en un point t d'une courbe unicursale (dont les points sont déterminés individuellement par la valeur du paramètre t) la tangente qui rencontre la courbe en des points T, et que l'équation qui donne T en fonction de t soit homogène en T et t, les tangentes aux points T se coupent deux à deux en des points B de la courbe, les tangentes aux points B se coupent trois à trois en des points C de la courbe, et ainsi de suite. Si d'un point de la courbe qui jouit des propriétés indiquées, on mène des tangentes, leurs points de contact sont deux à deux sur des droites tangentes à la courbe; les points de contact de ces nouvelles droites sont trois à trois sur des tangentes à la courbe, et ainsi de suite.

M. Weill donne un théorème analogue relatif aux plans osculateurs des courbes gauches unicursales.

quadratiques. (134-137).

Les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique corre
relations qui lient les invariants simultanés du système de formes

$$a_x^2,\quad b_x^2,\quad c_x^2$$

à ceux du système covariant

$$l_x^2 = (bc)b_x c_x,\quad m_x^2 = (ca)c_x a_x,\quad n_x^2 = (ab)a_x b_x.$$

Weill. — Sur le centre des moyennes distances des pc
courbe unicursale. (137-139).

Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à
unicursale fixe d'ordre p et à un système de courbes d'ordre m,
tion contient un paramètre variable du degré k, est une courbe unic
pk, ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre k l
asymptotiques de la courbe unicursale.

Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un
scrit et circonscrit à deux coniques fixes est une conique homothétiqu
laquelle le polygone est inscrit.

Perrin. — Sur une nouvelle méthode de résolution de
du quatrième degré et son application à quelques éq
degrés supérieurs. (139-146).

Cette méthode repose sur l'identité relative aux *trois* quantités a

$$(a+b+c)^4 - 2\Sigma a^2(a+b+c)^2 - 8abc(a+b+c) + (\Sigma a^2)^2 - \ldots$$

qui pour l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

conduit à la résolvante

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2-4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0.$$

De même, l'identité

l'inconnue et dans laquelle les coefficients ne dépendent que d'un seul paramètre, en vertu de $\frac{m-3}{2}$, relation que l'on peut écrire sous la forme

$$p_{2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2\dots k.m} p_2^k,$$

où p_{2k} est le coefficient de x^{m-2k}.

L'auteur examine particulièrement le cas de $m=5$.

Selivanoff. — Sur les intégrales définies uniformément convergentes.

L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x,z)dz$$

est dite uniformément convergente si pour toutes les valeurs de x contenues dans l'intérieur d'un certain contour on peut déterminer un nombre p tel que, en prenant $m > p$, on ait

$$\text{mod} \int_a^\infty f(x,z)dz < k,$$

k étant une quantité aussi petite qu'on voudra, et donnée d'avance.

Si l'intégrale est uniformément convergente, elle est une fonction continue pour les valeurs du paramètre contenues dans le contour de convergence uniforme. Si l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x,z)dzu$$

est uniformément convergente pour $(x) \leqq r$, elle est développable suivant les puissances positives, entières et croissantes de x.

On peut différentier sous le signe $\int$ une intégrale telle que les précédentes si, dans le voisinage du point x, l'intégrale est uniformément convergente et si la fonction f se comporte régulièrement.

Pellet. — Sur les résidus cubiques et biquadratiques. (157-162).

Soient θ une racine de l'équation

$$\frac{x^p-1}{x-1} = 0,$$

p étant un nombre premier, g une racine primitive de p et e un diviseur de $p-1$; si l'on fait

$$\omega = \frac{p-1}{e},$$

l'expression $\theta^{g^{i+ej}}$ ne prend que ω valeurs distinctes lorsque, i étant constant, on fait varier j. Soit

$$S_i = \sum_{j=0}^{j=\omega-1} \theta^{g^{i+ej}};$$

S_i admet ω valeurs distinctes qu'on obtient en donnant à i les valeurs 0, 1, $e-1$.

Ces quantités sont dites les périodes des racines d'ordre p de l'unité correspondantes au diviseur e de $p - 1$. Gauss a donné l'équation aux périodes pour e égal à l'un des nombres 2, 3, 4.

M. Pellet montre comment cette équation permet de reconnaître si un nombre q est résidu quadratique, cubique ou biquadratique suivant le module premier p.

Halphen. — Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles.

Donner neuf points doubles, c'est donner vingt-sept conditions ; vingt-sept conditions sont nécessaires pour déterminer une courbe du sixième degré : toutefois il n'y a pas en général de telle courbe qui admette neuf points doubles assignés arbitrairement.

Si une courbe du sixième degré admet neuf points doubles, par ces neuf points passe une seule courbe du troisième degré.

Pour que neuf points $a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9$, situés sur la courbe du troisième degré A, soient des points doubles d'une courbe du sixième degré, voici la condition nécessaire et suffisante :

Choisissez huit de ces points $a_1, \ldots, a_8$ et prenez le point a'_9 commun aux courbes du troisième degré qui passent par les huit premiers ; des tangentes de la courbe A aux points a_9 et a'_9 doivent se rencontrer sur cette même courbe A ; ou encore, par a'_9 menez les quatre tangentes à A ; les quatre points de contact donnent lieu à trois couples de cordes conjuguées. Le point a_9 doit être l'intersection des deux cordes conjuguées.

Étant donnés huit points doubles d'une courbe de sixième degré qui doit avoir un neuvième point double, le lieu de ce dernier est une courbe du neuvième degré, sur laquelle chacun des huit points donnés est triple.

Ce lieu passe par les douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points. Quand les huit points sont les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, le lieu se réduit à une droite.

L'auteur forme l'équation générale des courbes du sixième degré à neuf points doubles ; il indique aussi d'intéressantes généralisations des propositions précédentes, relatives aux courbes d'ordre $3m$ admettant neuf points multiples d'ordre m.

Schlegel (V.). — Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions. (172-207).

L'auteur, en employant la méthode de Grassmann, étend à l'espace à n dimensions divers théorèmes de Géométrie ordinaire relatifs au triangle, au quadrilatère, au tétraèdre, à l'hexaèdre, à l'octaèdre. On sait d'ailleurs que les analogues du dodécaèdre et de l'icosaèdre n'existent pas dans l'espace à plus de quatre dimensions.

Gascheau. — Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel. (207-219).

Sur le mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre d'action.

Schoute. — Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques. (219-220).

Généralisation de deux théorèmes de Steiner.

Schlegel. — Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité. (220-222).

Démonstration de ce théorème par la méthode de Grassmann.

Schoute. — Aperçu d'une solution géométrique du problème suivant : « Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée. » (222-223).

Lemonnier (*H.*). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes. (223-249).

Le travail de M. Lemonnier comprend deux Parties :

La première est l'exposition d'une méthode simple pour ramener le problème à l'intégration du système bien connu d'équations différentielles ordinaires et de la formation de l'intégrale complète.

Dans la seconde, l'auteur montre comment, inversement, on peut de l'intégrale complète déduire un système intégral correspondant au système d'équations différentielles.

Perott. — Sur les recherches des diviseurs des fonctions entières. (250-251).

Extraits des procès-verbaux. (251-255).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET SPÉCIALES, publié sous la direction de MM. BOURGET, KŒHLER et DE LONGCHAMPS.

Tome V ; 1881.

Landry. — Note d'Algèbre. Procédé nouveau pour déterminer les valeurs numériques des racines réelles de l'équation $x^2+px+q=0$, p et q étant des nombres entiers positifs ou négatifs. (3-9).

Exposé d'une méthode de calcul, abrégeant les opérations arithmétiques à exécuter, dans le cas où p est un nombre considérable, et consistant à déterminer successivement, au moyen de divisions rapides, les chiffres des racines.

S.-B. — Note de Cosmographie. Étant données la déclini d'une étoile et la latitude d'un lieu, calculer la durée de la p sence de l'étoile au-dessous de l'horizon du lieu, en temps s ral. (10-11).

Établissement, par les procédés de la Géométrie descriptive, de la for $\cos \theta = \tan g \lambda \tan g \delta$.

Colombier (P.-A.-G.). — Note d'Arithmétique. Détermi tion d'une limite supérieure du nombre des divisions à fectuer dans la recherche du plus grand commun diviseu deux nombres. (12-18).

Désignant par A, B, D les deux nombres et leur plus grand commun seur; par M le plus petit commun multiple de leurs diviseurs apparents; B', B'', D'' les quotients $\frac{B}{D}, \frac{B}{M}, \frac{D}{M}$; enfin par n le nombre des divisions à tuer, l'auteur démontre les limites suivantes :

$$2^{n-1} < \frac{B}{D}, \quad (1)$$

$$2^{n-2} < B', \quad (2)$$

$$2^{n-1} < B'', \quad (3)$$

$$2^{n-1} < B. \quad (4)$$

Formule Binet : L'exposant entier a de la plus petite puissance 2^a de inférieure à B est une limite supérieure du nombre n des divisions à effe Formule Lamé : Si k désigne le nombre des chiffres du plus petit B des nombres $n < 1 + \frac{10}{3} k$, soit *a fortiori* $n < 5k$.

Formule de l'auteur : $n < 1 + 4k$.

Kœnigs. — Note de Géométrie analytique. (29-31).

Par un calcul aussi simple qu'élégant, l'auteur montre que l'on peut point de l'espace, abaisser six normales sur une surface du second ordre ces six normales sont situées sur un même cône du second degré; la cu gauche qui passe par les six pieds des normales contient le point d'où elles issues (centre du pinceau) et le centre de la surface; elle admet les axes surface pour ses directions asymptotiques. Il aborde ensuite la question de cer sur la surface, par son intersection avec une seconde surface du deu ordre, une courbe du quatrième degré telle qu'il existe sur cette courl groupe de six points dont les normales soient concourantes; il conclut : que sur une courbe du quatrième ordre, tracée sur une surface du second on puisse trouver un groupe de six points, pieds de normales concourant faut et il suffit que par cette courbe on puisse faire passer une surfa second ordre, circonscrite au tétraèdre principal de la surface première.

Kœhler. — Sur les permutations de n lettres. (32-33).

Démonstration élémentaire de la formule donnant le nombre des per

tions pour lesquelles aucune lettre n'occupe le rang indiqué par son indice

$$n!\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Amigues (*E.*). — Note sur les racines multiples de l'équation en s. (33-36).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur soit racine double ou triple, de l'équation en S servant à déterminer les plans principaux est d'annuler tous les mineurs du premier ou du second ordre de l'équation.

G. de Longchamps. — Note de Géométrie analytique. (36-39).

Conditions nécessaires pour que l'équation du second degré à deux variables représente deux cercles. Recherche simple des deux facteurs.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (40-46).

Définitions. — L'équation $ux+vy=1$, suivant que l'on considérera comme données les valeurs u et v, inverses de coordonnées à l'origine de la droite D, et comme variables les coordonnées x et y du point P, ou inversement, exprimera : soit que le point P, variable, est situé sur la droite D, soit que la droite D, mobile, passe par le point P. u et v sont les coordonnées-lignes (Clebsch), coordonnées de la droite D, tandis que x et y sont les coordonnées-points (Clebsch), coordonnées du point P.

La relation $f(u,v)=0$ définit une courbe comme l'enveloppe de la droite $D(u,v)$. Les quantités u, v sont les coordonnées tangentielles de la courbe. L'équation du premier ordre est l'équation du point, enveloppe des droites mobiles qu'elle représente. Coordonnées tangentielles homogènes $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, analogues aux coordonnées homogènes $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$.

Faisceau de droites, rayons mobiles autour d'un centre. Les coordonnées d'un rayon quelconque du faisceau, déterminé par deux rayons (u_0, v_0), (u_1, v_1), ont pour expression générale

$$u=\frac{u_0+\lambda u_1}{1+\lambda},\quad v=\frac{v_0+\lambda v_1}{\lambda+\lambda},$$

λ étant un paramètre variable. Le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ est le rapport anharmonique des quatre rayons $(0, 1, \lambda, \lambda')$. Il est projectif.

Geoffroy (*L.*). — Nouvelle méthode pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre. (49-55).

Prenant pour point de départ l'expression géométrique de l'égalité

$$d\tang\omega=\frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

l'auteur cherche la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$, décomposé en une infinité d'arcs élémen-

taires dont les rayons déterminent des divisions égales sur la tangente à l'origine des arcs sur la circonférence. L'expression ci-dessus donne la valeur des arcs élémentaires successifs dont la somme est le résultat cherché

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right),$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2n}$.

Théorème. — S_p *étant la somme des puissances $p^{ièmes}$ des $(n-1)$ premiers membres, on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

De là

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Marin (*Eug.*). — Note d'Arithmétique. (56-58).

Minine (*A.*). — Sur la somme des nombres premiers à un nombre donné n, inférieurs à p. (58-62).

Posant $p = mn + k$, et désignant par $[\Sigma_n(p)]_0^p$ la somme cherchée, par $[\varphi(n)]$ le nombre qui exprime combien de nombres premiers à n sont compris entre et p, l'auteur recherchant la somme des nombres en question compris entre et mn, puis entre mn et $mn+k$, établit la formule générale

$$[\Sigma_n(p)]_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mn[\varphi(n)]_0^k + [\Sigma_n(p)]_0^k.$$

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (62-66).

1° Relations entre les éléments de figures déduites d'un triangle $S, C, \Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b$ surfaces du triangle et des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits. On a

$$\frac{S}{C} = \frac{2}{\pi}\sin A \sin B \sin C, \quad \frac{S}{\Gamma} = \frac{1}{\pi}\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

$$\frac{S}{\Gamma'} = \frac{1}{\pi}\cot\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}.$$

$r_1, r_2, R_1, R_2, \ldots$ étant les rayons des cercles inscrits et circonscrits aux triangles en lesquels la médiane divise un triangle, on a

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} = \frac{\frac{3}{2}(a+b+c) + (m_a + m_b + m_c)}{2S}.$$

(1) servant d'indices aux éléments du triangle T_1 formé avec les trois segments inégaux détachés sur T par le cercle inscrit

$$pr_1 = 2S_1, \quad 4pS_1R_1 = S_2, \quad 2R_1r_1 = \frac{S^2}{p^2} = r^2.$$

(a) indice du triangle T_a, formé avec les éléments déterminés par le cercle exinscrit a

$$2R_a r_a = \frac{S^2}{(p-a)^2} = r'^2_a.$$

G. de Longchamps. — Sur la série de Taylor. (76-80).

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (80-85).

Équation générale ($\pi + \mu\chi = 0$) des points de la droite unissant les points dont $\pi = 0$ et $\chi = 0$ sont les équations. Le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ des deux paramètres correspondant à deux points de la droite est le rapport anharmonique des quatre points, y compris ceux qui définissent la droite, ou les « points de base » (Clebsch). Celui de quatre points ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) est égal à

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2} \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_3 - \mu_4}.$$

Le point M, ($M_0 + \mu M_1$) de la droite $M_0 M_1$ est dit le correspondant de la droite P, ($P_0 + \lambda P_1$) du faisceau $P_0 P_1$, si l'on a $\mu = \lambda$. Si trois droites d'un faisceau sont en correspondance avec trois points d'une droite, la condition caractéristique de la correspondance d'une quatrième droite quelconque du faisceau, avec un point de la droite, est l'existence, entre les paramètres μ et λ, d'une relation du premier ordre séparément entre les deux paramètres, c'est-à-dire telle que $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$.

Il serait plus simple et plus net de dire : deux figures sont dites en correspondance lorsqu'à une droite, ou à un point, de la première correspond un point et un seul, ou une droite et une seule de la seconde. Les figures présentant la correspondance ainsi définie sont dites *projectives*. Deux figures projectives par rapport à une troisième le sont également entre elles.

Geoffroy (L.). — Nouvelle méthode pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre. (97-103).

L'expression géométrique de la valeur $d\omega = \frac{d \sin\omega}{\cos\omega}$, appliquée à la série des axes élémentaires détachés par des parallèles équidistantes, en nombre infini, donne le développement en série suivant :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} + \ldots.$$

Une autre expression de π résulte de la surface du quart de cercle, considérée comme la somme des aires des trapèzes élémentaires en lesquels se décomposent une infinité (n) d'ordonnées équidistantes. La valeur de l'ordonnée $y_p = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - p^2}$, développée en série, fournit l'expression suivante :

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{11} - \ldots,$$

formule qui n'avait point été remarquée jusqu'ici.

On peut reprocher à cette dernière d'être peu convergente, et, par suite, d'un calcul laborieux ; mais c'est un bon exercice d'élève.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (104-109)

Éléments du triangle formé par les intersections des bissectrices d'un triangle donné avec le cercle circonscrit. — Du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit, en ses sommets $S_1 = \frac{4S^3}{2p.abc}$, aux cercles exinscrits $S_a = \frac{4S^3}{2(p-a)abc}$ d'où le théorème $\frac{1}{S_1} = \Sigma \frac{1}{S_a}$ du triangle formé par les points d'intersection des hauteurs du premier avec son cercle circonscrit

$$a_1 = 2R \sin 2A, \quad S_1 = 2R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Note de Géométrie. — (109-111).

Soient a, b, c les arêtes d'un parallélépipède; α, β, γ les faces ou angles plans opposés dans l'un des sommets trièdres; 2σ la somme $\alpha + \beta + \gamma$; le volume $V = 2abc\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}$.

Questions d'examen. — (111-115).

Parmi les questions d'examens, dont l'étude est des plus immédiatement profitables aux « candidats » sinon aux « mathématiciens de l'avenir », nous ne pouvons, faute de place, signaler que celles, rares d'ailleurs, dont le sujet lui-même ou la solution ordinaire nécessitent une observation critique. A ce point de vue, ingrat sans doute, mais essentiel de notre tâche, nous ne saurions laisser passer la solution du n° 4, dont le type est malheureusement du plus fâcheux exemple. On y résout en effet, au moyen de l'Algèbre mise au service d'un artifice des plus détournés (la médiane du triangle n'ayant rien à faire dans la question), le problème suivant :

4. *On donne un triangle* ABC, *et un point* P, *sur la base* BC; *on demande de mener une parallèle* MN *à* BC, *qui rencontre les côtés* AB *et* BC *aux points* M *et* N, *de telle sorte que l'angle* MPN *soit droit.*

La solution qui nous paraît la seule rationnelle est la suivante : La base BC du triangle et la droite MN ont le sommet A pour centre de similitude. Le point I, correspondant à P, dans le triangle semblable à MNP construit sur BC sera donc à l'intersection du rayon AP avec le cercle lieu des points d'où BC est vu sous un angle droit.

Cette démonstration, qui a l'avantage de simplifier à la fois la figure et le raisonnement, de supprimer un calcul sans intérêt, ne serait-elle pas celle du *Mathematical Visitor,* dont parle l'article? En ce cas, nous ne saurions trop répéter que, « principalement dans un Journal d'élèves », les solutions ou démonstrations déjà connues ne doivent jamais être compliquées à plaisir, mais au contraire rendues plus simples et plus claires, toutes les fois que la chose sera possible.

Question 241. — (115-117).

Bonne solution géométrique, par M. Callon (élève), du problème : « Déterminer le lieu des points dont les tangentes à deux cercles sont dans un rapport donné ». Mais pourquoi la rédaction ajoute-t-elle la remarque naïve d'un autre solutionniste, que les lieux géométriques des points dont les puissances par rapport aux cercles O et O', d'une part, aux cercles O et O



d'autre part, sont dans un même rapport donné, se coupent sur l'axe radical de O' et O''?

Kœnigs. — Sur les maxima et minima. (123-125).

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. — (125-129).

QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — (129-134).

Former l'équation du second degré qui admet pour racines les demi-axes de la conique représentée par l'équation générale, en coordonnées obliques, du second degré à deux variables.

Représentant par Δ le discriminant de l'équation rendue homogène, et par δ celui de l'ensemble des termes du second ordre, l'équation en z est

$$\delta^3 z^2 + \Delta\delta(A + C - 2B\cos\theta)z + \Delta^2\sin^2\theta = 0;$$

les racines en sont, grandeur et signe, les carrés des demi-axes.

Applications. — Aire de l'ellipse : $S = \pi \frac{\Delta \sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}}$. On voit de suite que $S = k\frac{\Delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}$, k étant une constante. Appliquant à l'équation générale du cercle, on a la valeur $k = \pi\sin\theta$ de la constante (cette dernière remarque non faite dans l'article).

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (137-141).

Interprétation géométrique de la projectivité. Quatre éléments de l'une des deux figures projectives ont même rapport anharmonique que les quatre éléments correspondants de l'autre. Homographie, définie par la relation

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

c'est-à-dire la correspondance d'un seul élément (point ou rayon d'une base, ou d'un faisceau) à un élément (point ou rayon) de la première figure. Deux séries de points en projectivité sont homographiques. Figures perspectives, ou division d'une base et faisceau, tels que les rayons du second passent par les points correspondants de la première. Deux divisions sont perspectives si les droites joignant les points homologues concourent en un centre de perspective, ou si les intersections des rayons homologues sont en ligne droite, axe de perspective.

Équation tangentielle d'une courbe. La relation $f(u, v)$ entre les coordonnées tangentielles d'une droite mobile est l'équation tangentielle de la courbe enveloppe de cette droite.

Morel (*A.*). — Note sur la décomposition, en facteurs premiers, du produit $1.2.3\ldots m$. (145-148).

Lorsque $m \geq \alpha + \beta + \gamma + \delta$, la fraction $\frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}$ est un nombre entier.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (Suite). (148-155).

Surface du quadrilatère, en fonction des deux côtés opposés, a, c, et a angles; de trois côtés et des angles. Autres expressions relatives au quadrila

Note de la Rédaction. — Nous ne donnons point ces formules, d'ailleurs faciles à trouver; le défaut de symétrie de la notation demanderait des longueurs d'explication. On pourrait corriger ce défaut, capital dans des formules classiques, en assimilant pour la notation le quadrilatère à un triangle, coupé par une transversale.

Andrieux. — **Solution de la question 277 : « Une circonférence roule sur deux autres de rayon égal au sien, roulant elles-mêmes sur une droite. Quelle est la position respective qui rend maximum le pentagone formé par les trois centres et les points de contact de la droite? (158-159). »**

Bonne solution algébrique; mais combien plus élégante eût été (comme toujours dans les questions de ce genre) la solution géométrique fondée sur la méthode de Fermat, montrant immédiatement que la projection du centre O sur la droite doit être sur les tangentes communes au cercle O et à chacun des autres.

Ibach. — Surface du triangle polaire d'un triangle donné. (16 168).

D étant le déterminant des équations des côtés, P le produit des mineurs correspondant à la colonne des constantes, on a

$$2S = \frac{D^2}{P}.$$

De même, pour le tétraèdre,

$$6V = \frac{D^3}{P}.$$

Σ surface du triangle polaire du premier par rapport à la conique U = Δ discriminant de U. On a

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{P},$$

et pour le volume Θ du tétraèdre polaire de V

$$\Theta = \frac{24V^3\Delta^3}{P}.$$

Haure. — Problème de Géométrie analytique. (168-174).

Lieu des intersections P des polaires, relatives à deux coniques C_1 et C_2, des points p d'une courbe σ d'ordre m. Cette courbe Σ est d'ordre $2m$. Soit $S_1 S_2$ le triangle autopolaire à toutes les coniques du faisceau $(C_1 C_2)$. Il est à même son conjugué, sommet à côté opposé (en disant que P et p sont conjugués).

Ce théorème est le point de départ d'une méthode de transformation intéressante, et le travail de M. Haure, d'une valeur réelle, est de ceux dont l'insertion dans le *Journal* est à recommander. Nous croyons toutefois

voir relever au début une remarque incomplète qui, prise au pied de la lettre, conduirait à des erreurs. Toute droite l a pour correspondante une conique L, circonscrite au triangle autopolaire; mais elle ne constitue pas toute la conjuguée de la conique, à laquelle correspondent en outre les trois côtés dudit triangle. Soient σ_1 et σ_2 les intersections de l avec les côtés S_2S_3 et S_3S_1; le point S_1 de la conique L a pour correspondants tous les points de S_2S_3; l'arc S_1S_2 a pour correspondante la partie $\sigma_1\sigma_2$ de la droite l; le point S_2 pour correspondants les points de S_3S_1, et ainsi de suite, c'est-à-dire un quadrilatère formant un circuit continu.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). — (174-179).

Méthode générale pour passer de l'équation d'une ligne en coordonnées cartésiennes à son équation en coordonnées tangentielles, et réciproquement.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (Suite). (199-211).

Note de la Rédaction. — L'auteur extrait du Recueil allemand de M. Reidt une série d'exemples de maxima et minima, absolument dépourvus d'élégance, et qui ne peuvent servir qu'à maintenir les élèves dans la voie fâcheuse, déjà trop suivie, qui consiste à appliquer automatiquement des formules algébriques, sans chercher à se rendre compte de l'essence même du problème, un résultat à obtenir étant le seul point qui les intéresse dans la solution cherchée.

Dans la patrie de Fermat, on ne saurait donner, à notre avis, à de tels problèmes que des solutions de la nature de celles que nous allons substituer à celles de l'auteur, pour montrer, une fois pour toutes, la supériorité de la méthode géométrique des « valeurs voisines égales », non seulement comme élégance et comme simplicité, mais aussi comme fécondité généralisatrice.

1° *Entre tous les rectangles qui ont la même diagonale, déterminer ceux de périmètre maximum a et de plus grande surface b.*

Soient AB, A'B' deux positions voisines de la droite, égale à la diagonale donnée, glissant sur les côtés de l'angle droit YOX. Soit C le point du plan dont A et B sont les projections sur les côtés de l'angle droit. Soient encore I l'intersection des deux droites AB, A'B', que l'on sait être la projection du point C sur la droite mobile AB. Les triangles infinitésimaux IAA' et IBB' ont leurs surfaces proportionnelles aux carrés $\overline{IA}^2$ et $\overline{IB}^2$ des segments de AB; les rectangles élémentaires construits, d'une part, sur AA' et AC, d'autre part sur BB' et BC', sont donc entre eux dans les rapports de AI à BI. Le maximum de la surface ayant lieu lors de l'égalité de ces deux éléments, parties excédante et déficiente des deux rectangles voisins, correspondra à la valeur AI = IB, pour laquelle le rectangle est le carré construit sur AB. Soient de plus S et R les projections réciproques de A' sur AB, et de B sur A'B': les longueurs AS et RB' seront égales, puisque AB = A'B' et SB = A'R. Mais, le maximum du périmètre correspondant à BB' = AA', les triangles rectangles infinitésimaux BRB' et ASA' seront égaux et isoscèles, et, par suite, aussi le rectangle AOBC sera encore le carré construit sur AB.

2° *Un quadrilatère a deux côtés parallèles,* « *et les deux autres égaux* »; *on en donne une diagonale et la somme des côtés parallèles, et l'on demande*

de trouver, entre tous les quadrilatères qui satisfont à ces conditions, celui dont l'aire est maximum.

Supprimant la condition des « côtés égaux » qui fait de la figure un parallélogramme, il est géométriquement évident que le maximum correspond à la figure dans laquelle la diagonale est hauteur commune des deux triangles, en lesquels elle partage le trapèze, dont les bases ont une somme constante.

3° *Inscrire dans un secteur circulaire un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, un sommet sur l'arc du secteur, et dont la surface soit maxima.*

Soient OXYZ le parallélogramme ayant l'angle O commun avec le secteur AOB, et le sommet Y sur le secteur. Soit U le point de l'arc voisin de Y. Le maximum correspond à l'égalité des surfaces du triangle OYU et du parallélogramme YU.YX. La hauteur du triangle doit donc être double de celle du parallélogramme, eu égard à la base commune YU. Donc, si Z est l'intersection de OY par XZ parallèle à YU, c'est-à-dire, si Z est la projection de X sur OY, ce point doit tomber sur le milieu du rayon OY. Le parallélogramme à surface maxima est donc le losange ayant son sommet au milieu de l'arc AB.

4° *Du centre* C *d'un cercle donné on tire un rayon quelconque* CA, *sur lequel on prend un segment arbitraire* $CB = a$; *trouver le plus grand des angles dont le sommet est sur la courbe, et dont les côtés passent par* B *et* C.

Géométriquement, et remplaçant le cercle par une courbe quelconque, on voit que les angles, maxima et minima, dont les côtés passent par A et B, ont leurs sommets aux points de contact, sur la courbe, des cercles tangents que l'on peut lui mener passant par A et B.

5° *Entre tous les triangles ayant la même base, et pour lesquels la somme des deux autres côtés est constante, quel est celui qui a le plus grand angle au sommet.*

Isoscèle (contact d'une ellipse et d'un cercle passant aux deux foyers).

6° *Partager un arc en deux parties telles que* a *la somme,* b *le produit,* c *la somme des carrés des cordes, soient maximum.*

Quelle que soit la courbe, la solution géométrique est immédiate; a, la variation des deux cordes étant égale, leur inclinaison sur l'élément doit être la même; d'où points de contacts entre la courbe et les ellipses dont les deux extrémités de l'arc sont les foyers; b, le produit xy, étant proportionnel au quotient de la surface du triangle par $\sin M$, son maximum correspondra, pour le cercle, à la position de M sur le point de contact de la tangente parallèle à la corde AB; pour toute autre courbe, au point pour lequel la variation du rapport $\frac{\sin M}{H}$ sera nulle; c la somme des carrés des cordes (x, y), étant égale au carré $(AB)^2$ augmenté du produit $xy \cos M$, sera maximum avec ce dernier produit.

Le maximum b est obtenu, dans le cas le plus général, par le contact de la courbe avec les lemniscates ayant pour foyers les extrémités A et B de l'arc. Les diverses constructions géométriques de la tangente, ou la normale, à la lemniscate donnent d'élégantes conditions géométriques du maximum, entre autres celle-ci : « Le produit des deux cordes AM.BM est maximum au point M de la courbe pour lequel la normale est conjuguée harmonique de la bissectrice

extérieure de l'angle M, par rapport aux directions des bissectrices intérieures des angles A et B du triangle AMB. »

7° *Entre tous les triangles isoscèles inscrits dans un cercle donné, quel est celui dont a le périmètre, b la surface est un maximum.*

Soit A le sommet; le diamètre du point A sera la médiane, axe de symétrie; soient B l'une des extrémités de la base, et P son milieu. Soit B', projeté en P' sur la médiane, le point voisin du cercle. Le sommet A restant fixe, le maximum a a lieu lors de l'égalité des variations de BP et de AP, projections de l'élément BB' sur la base BP et la médiane AP. Donc, pour une courbe quelconque dont AP serait axe de symétrie, le maximum a lieu lorsque le point B est le point de contact d'une tangente, à 45° sur AP.

Maximum b. Soit b l'intersection de AB' avec la parallèle Bb à AP. Le maximum b aura lieu avec Bb = 2PP'; donc, lorsque BP sera bissectrice de l'angle de la tangente en M avec la corde BA (même généralité que pour a).

8° *La hauteur d'une tour est a; sur son sommet est fixé un étendard* BC, *de hauteur b; trouver le point du terrain horizontal d'où l'étendard est vu sous l'angle maximum.*

L'application du principe général donne le point X cherché comme contact de l'horizontale AX avec un cercle passant par A et B. D'une manière générale, c'est-à-dire sur un sol varié quelconque, elle le présenterait comme intersection des deux courbes tracées sur le sol de la manière suivante : 1re courbe, dans chaque méridien passant par AB, construire les points K de contact, de la section du sol par le plan méridien, avec les cercles tangents de corde AB; 2e courbe, dans chaque méridien construire les points V où la normale à la surface du terrain est située dans le plan méridien. Les points X d'intersection des courbes K et V sont ceux où le maximum cherché est obtenu.

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite.). (232-237).

Classe d'une courbe, égale au degré de son équation tangentielle, en général égal à $m(m-1)$; m, degré de la courbe. — Le premier membre de l'équation tangentielle des coniques est la forme adjointe de la forme quadratique ternaire constituant le premier membre de son équation cartésienne homogène, et réciproquement. — Corrélation de dualité entre les principes relatifs aux points des coniques et ceux relatifs à leurs tangentes.

Delpit. — Note sur le quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales. (241-249).

La perpendiculaire abaissée du centre sur un côté est égale à la moitié du côté opposé. — Les quatre quadrilatères, en lesquels ces droites partagent le quadrilatère primitif, sont équivalents. — Le centre de gravité est au tiers de la distance du centre au point d'intersection I des diagonales. Ce point I est également distant des projections des quatre sommets sur deux côtés opposés. Le quadrilatère est circonscrit à une ellipse dont le point I et le centre sont les foyers, et dont les tangentes issues des milieux des côtés sont parallèles aux côtés opposés. — Si les diagonales tournent autour de I, le cercle principal et les cercles directeurs de cette ellipse resteront fixes.

Junck. — Théorème d'Arithmétique. (250-251).

Les fractions irréductibles de même dénominateur ont des quotients périodiques dont le nombre de chiffres ne dépend que du dénominateur.

Bourget. — Note sur le crépuscule. (254-256).

La longueur β de la moitié de la nuit, en fonction de la déclinaison δ du Soleil, de la latitude λ du lieu, et de la distance angulaire $\omega = 18°$, de l'arc crépusculaire au-dessous de l'horizon, est donnée par la formule

$$\cos\beta = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\delta + \frac{\sin\omega}{\cos\lambda\cos\delta} = \frac{\sin\delta\sin\lambda + \sin\omega}{\cos\delta\cos\lambda}.$$

Problème de Géométrie. — (Concours d'agrégation 1879). (259-261).

Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle S, on considère deux points P et P′ de la circonférence et le point M d'intersection de leurs droites de Simpson. Démontrer que le point M décrit un cercle S′, quand le point C, seul mobile, décrit le cercle S; 2° trouver le lieu des centres ω du cercle S′, lorsque la corde PP′, mobile à son tour, conserve une longueur constante.

Note de la Rédaction. — La première Partie est bien démontrée; mais la seconde donne lieu à des longueurs: il valait mieux déduire de la première partie la construction de ω sur la perpendiculaire au milieu D de QQ′, par l'intersection des rayons $Q\omega$ et $Q'\omega$, tels que l'angle $Q\omega Q' = POP'$ (O centre de S). Donc α étant le milieu de AB et Ω celui de PP′, le rapport de ωD à $O\Omega$ est égal à celui de QQ′ à PP′. La distance $\alpha\omega$ est donc égale à $O\Omega$, et par suite constante.

Ibach. — Note sur les déterminants. (269-277).

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (277-281).

Transformation de l'équation tangentielle au moyen de la substitution de la forme adjointe de la substitution linéaire en coordonnées cartésiennes. Applications géométriques. Le lieu des foyers des coniques dont on donne les points de contact sur deux droites est une cubique à point double au point d'intersection des deux droites.

Catalan (*E.*). — Deux problèmes d'Arithmétique. (296-299).

1° De 1 à n, combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés : $a, b, c, \ldots, k, l$?

$$f(n) = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum\left(\frac{n}{abc}\right) + \cdots;$$

2° La somme $S(n)$ des nombres précédents est donnée par

$$2.S(n) = n(n+1) - \sum a\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right)+1\right] + \sum ab\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right)+1\right] - \cdots.$$

Questions d'examens. (299-308).

Sur l'équation des surfaces du second ordre. (315-319).

Boquel (*F.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (319-325).

Équation $(uf'_{u_1}+vf'_{v_1}+wf'_{w_1}=0)$ des points de contact des tangentes (u_1, v_1, w_1) à la courbe $f(u, v, w)=0$. Les coordonnées des tangentes à la courbe en ses points de rencontre avec la droite (u_0, v_0, w_0) sont les solutions communes des deux équations ci-dessus. Une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe est en général du $n(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, sauf les singularités. La condition analytique pour qu'un point $(mu+nv+pw=0)$, soit sur une courbe $[f(u, v, w)]$ est la relation obtenue en éliminant u_1, v_1, w_1 entre l'équation du point et les équations $\frac{f'_{u_1}}{m}=\frac{f'_{v_1}}{n}=\frac{f'_{w_1}}{p}$; déterminant facile d'après la méthode dialytique Sylvester. Tangentes communes à deux coniques.

Delpit. — Propriétés du tétraèdre à arêtes (opposées) orthogonales. (337-343).

Si quatre des six arêtes d'un quadrilatère sont perpendiculaires deux à deux, les deux autres le sont également. Centre ou point de concours des hauteurs, point qui est aussi point de concours des plus courtes distances des arêtes orthogonales. Le volume est égal au produit de deux arêtes orthogonales par leur plus courte distance. Les milieux des arêtes et les pieds des distances sont douze points d'une sphère. Le centre de gravité est milieu de la distance du centre des hauteurs à celui de la sphère circonscrite. Le centre de gravité des faces forme un tétraèdre homothétique inverse, dont le centre de gravité est le même. Ellipsoïde de révolution inscrit, ayant pour foyers le centre des hauteurs et son symétrique au centre d'une deuxième sphère des douze points, passant par les centres de gravité des faces, le centre des hauteurs et divisant dans le rapport 1 à 2 ses distances aux sommets. Sphère polaire, par rapport à laquelle chaque sommet est pôle de la face opposée, et les arêtes opposées conjuguees entre elles. Relation entre les rayons ρ, ρ', R des sphères polaires, première des douze points, et circonscrite $\rho'=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\rho^2}$.

Baudoin (*F.*). — Tout triangle dans lequel les rapports du périmètre aux diamètres des cercles exinscrits sont exprimables en nombres entiers est rectangle. (347-348).

L'auteur fait un élégant usage de quantités et relations auxiliaires, x, y, z étant les distances des sommets A, B, C aux points de contact du cercle inscrit dont le rayon est pris pour unité, d'où $p=(p-a)(p-b)(p-c)$ et par suite $xyz=x+y+z$. Solution $x=1$, $y=2$, $z=3$; $a=5$, $b=4$, $c=3$. (Incomplet.)

Pravaz (*Ch.*). — Conditions de divisibilité d'un polynôme entier par le trinôme du second degré. (357-360).

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (360-365).

Équation générale en coordonnées tangentielles homogènes, ou trilatères, des coniques inscrites dans le même quadrilatère que deux coniques $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ données, $f + \lambda\varphi = 0$. Équation ($f + \lambda MN = 0$) des coniques qui touchent les tangentes menées à ($f = 0$) par les points $M = 0$, $N = 0$. Équation ($MN + \lambda PQ$) des coniques inscrites dans un quadrilatère de sommets M, N, P, Q. ($\lambda PQ + \mu QR + \nu RP = 0$) des coniques inscrites dans un triangle. Des coniques circonscrites au triangle $\Sigma\lambda^2 P^2 - 2\Sigma\lambda\mu PQ = 0$. Des coniques circonscrites à un quadrilatère $\frac{p^2 N^2}{\lambda} + \frac{q^2 P^2}{1-\lambda} - M^2 = 0$; M, N, P étant les équations des points de concours des côtés opposés et des diagonales. Des coniques doublement tangentes à deux coniques f et φ dont P et Q sont les deux points ombilicaux $\mu^2 P^2 + 2\mu(f + \lambda\varphi) + Q^2 = 0$. Les pôles des deux droites de contact sont conjugués harmoniques des points ombilicaux. Des coniques conjuguées par rapport à un triangle $\lambda M^2 + \mu N^2 + \nu P^2 = 0$. Des coniques homofocales de foyers PQ. $PQ + \lambda(u^2 + v^2) = 0$.

Pravaz (*Ch.*). — Somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. (385-388).

$$S^p = \frac{n!}{(n-p)!}\sum_{m=1}^{m=p+1} \frac{S_m^p \times (-1)^{p+1-m}}{m!(p+1-m)!(n-m)}.$$

Morel (*A.*). — Sur le maximum et le minimum de la fraction du second degré. (388-392).

Ibach (*L.*). — Recherches sur une famille de coniques. (408-414).

Le lieu géométrique des points tels que leurs polaires par rapport à deux coniques, U et V, se coupent sous l'angle donné α, est une conique P_α de U, V. Son équation peut s'écrire $P_\alpha = P_0 + \tang\alpha P_{\frac{\pi}{2}} = 0$. Les coniques P_α de U, V sont circonscrites à un même quadrilatère; le lieu de leurs centres est la conique P'_0 des deux coniques P_0 et $P_{\frac{\pi}{2}}$. L'enveloppe des droites dont les pôles sont à une distance angulaire fixe α d'un point donné est une conique dont l'équation tangentielle a la forme $Q_0 + \lambda Q_{\frac{\pi}{2}} = Q_\alpha = 0$. Le lieu des coniques Q est une ligne droite. Les coniques P de deux coniques concentriques passent par le centre de celles-ci.

Systèmes de trois coniques directrices : Les coniques P_α de (U, V), P_β de (V, W) et $P_{\pi-(\alpha+\beta)}$ de (W, U) sont circonscrites au même quadrilatère. Les $\frac{n(n+1)}{1.2} - 2$ conditions de tangence en un même point de n coniques résultent de l'élimination de x, y entre les n équations $U_k = 0$ et les $\frac{n(n-1)}{1.2}$ équations P_0 de $(U_k, U_{k'}) = 0$. Le lieu des points du plan, tels que leurs polaires par

rapport à trois coniques forment un triangle de surface constante Σ, est la courbe du sixième degré ayant pour équation $\Sigma . P_{u,v} . P_{v,w} . P_{w,u} = S^2$, où $P_{u,v}$ désigne P_0 de U, V, et S symbolise le déterminant aux dérivées partielles, surface des polaires de (x, y). Le lieu des points, dont les polaires relatives à n coniques forment un polygone de surface donnée, est une courbe de degré $n(n-1)$. Conditions de l'existence d'un point de plan dont les polaires relatives à n coniques forment un polygone régulier (?). L'inclinaison constante d'un côté sur le précédent donne $\frac{n(n-1)}{1.2} - 3$ conditions, le point devant se trouver sur les courbes $P\pi - \frac{2\pi}{n}$ relatives à tous les groupes de deux des coniques.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite et fin). (414-423).

Les tangentes menées d'un point fixe du plan, à toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère, sont en involution. Les sommets de deux angles circonscrits à une conique, et les quatre points de contact, sont sur une même conique; les quatre côtés et les deux cordes de contact enveloppent une autre conique. Les six sommets de deux triangles conjugués à une conique sont situés sur une même conique, et leurs six côtés en enveloppent également une autre. Analogie entre la méthode des polaires réciproques et celle des coordonnées tangentielles.

La classe d'une courbe est abaissée de $p(p-1)$ unités par l'existence de chaque point multiple d'ordre p; de $2+q$ unités par celle de chaque point de rebroussement, en lequel la courbe et sa première polaire ont un contact d'ordre q.

G. de Longchamps. — Résolution géométrique de deux problèmes du quatrième degré sur la parabole. (433-437).

Le segment intercepté sur une droite, entre un diamètre de la parabole et la tangente au point où il rencontre la courbe, est moyen proportionnel entre les deux segments interceptés entre la tangente et la courbe. On construit d'après ce principe les deux points C et C', où la corde AB, unissant deux points donnés d'une parabole, coupe deux tangentes T et T' également données; le milieu de CC' et l'intersection O de T et T' donnent la direction des diamètres. Après avoir déterminé les points de contact, D et D', de T et T', sur les diamètres passant en C et C', les tangentes en A et B s'obtiennent par leurs sous-tangentes. Donc la construction d'une parabole, dont on donne deux points et deux tangentes, est ramenée à celle d'une parabole dont on connaît quatre tangentes, ou bien deux tangentes et leurs points de contact. Quatre solutions, en associant de toutes les manières possibles les deux points C et les deux points C', donnés par la relation segmentaire.

De même la construction des quatre paraboles passant par trois points A, B, C et tangentes à une droite T se ramène également à quatre problèmes du premier degré. On détermine le point de contact de T par les points, sur les côtés du triangle ABC, du diamètre de contact.

Bourget (*J.*). — Variation de la fraction du second degré. (438-442).

Ocagne (*M. d'*). — Remarques sur les figures homothétiques et les figures inverses. (449-451).

Geoffroy (*L.*). — Construction graphique directe de deux surfaces de révolution du second degré dont les axes ne se rencontrent pas. (452-454).

Le plan vertical sera choisi parallèle aux axes, et le plan horizontal perpendiculaire à l'un d'eux. On inscrit dans l'une des surfaces une sphère fixe, dans l'autre une sphère variable, et l'on considère l'un des cônes circonscrits aux deux sphères. Il coupe chacune des surfaces suivant deux courbes planes, dont les plans s'obtiendront par la rotation de la figure autour de l'axe vertical de manière à ramener le second axe à être parallèle au plan vertical. Les intersections des plans des sections de l'une et l'autre surface avec le cône sont des droites qui percent le cône en des points communs aux deux surfaces.

Bourget (*J.*). — Maxima et minima de la fraction rationnelle du second degré. (481-486).

Chrétien. — Problème de Géométrie. (491-492).

Étant donnés deux cercles qui se coupent en A, mener un cercle, de centre B, dont deux des intersections C et D avec l'un et l'autre cercle O et O' soient en ligne droite avec le point A. Joignant B au point A', symétrique de A par rapport au milieu H de la ligne des centres OO', la droite BA' est un peu détournée; la construction est évidente, H étant sur la perpendiculaire au milieu de AI; car QI = AQ', Q et Q' étant les projections de O et O' sur CD. Lorsque le point B se meut sur la circonférence O, la parallèle menée de ce point mobile à la corde CD enveloppe une conique, dont les foyers sont A' et son symétrique L par rapport à O, et doublement tangente au cercle O.

Tinel. — Solution géométrique de la question : *Construire un triangle connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés.* (497-498).

Les sommets cherchés sont les milieux des droites joignant respectivement l'un des sommets donnés au sommet opposé dans le triangle équilatéral construit sur la base formée par les deux autres sommets donnés.

Braun (*J.*). — Concours de 1879 à l'École Normale supérieure. (503-511).

Un tétraèdre OABCD est défini par l'angle solide O et les longueurs $4a$, $4b$, $4c$ des arêtes. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent en un point ω. L'ellipsoïde dont ces droites sont des diamètres conjugués est tangent aux six arêtes du tétraèdre. Chercher son intersection avec l'hyperboloïde engendré par la droite qui s'appuie constamment sur les directrices parallèles aux arêtes du tétraèdre menées parallèlement à l'arête suivante. Une génératrice HK de cet hyperboloïde perce l'ellipsoïde en deux points par chacun desquels on mène le plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en

l'autre point. Trouver le lieu d'intersection de ces plans, qui passent par le centre de l'ellipsoïde.

1° Soient α, β, γ les milieux de OA, OB, OC, et α', β', γ' leurs symétriques par rapport à ω. L'arête BC, parallèle à $\beta\gamma$, est contenue dans le plan tangent en α', lequel est parallèle au plan $\beta\gamma\omega$.

2° Le plan ABC coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse Σ passant en $\alpha'\beta'\gamma'$ et tangente à BC, CA, AB. La conique Σ', suivant laquelle il coupe l'hyperboloïde, passe aux mêmes points. Sa tangente en α' est dans le plan tangent conduit par les génératrices B' et A', c'est-à-dire le plan OBC. La tangente est donc BC, et Σ' coïncide avec Σ. L'intersection se compose donc de Σ et de sa symétrique par rapport à ω.

3° Le lieu est le cône de sommet ω, ayant Σ pour base.

Morel (*A.*). — Maxima et minima de la fraction du second degré. (529-537).

Bourget (*J.*). — Sur la classification des permutations de n objets. (541-547).

Les P_n arrangements de n objets (chiffres) sont d'abord classés en n groupes, spécifiés par le chiffre inscrit le premier. Dans chaque groupe on distingue $(n-1)$ groupes secondaires par la valeur du second chiffre, et ainsi de suite; on classe tous ces groupes en inscrivant d'abord les chiffres moindres, et ensuite les chiffres croissants.

1° Trouver la permutation de rang donné ρ. Chaque groupe contenant P_{n-1} arrangements, le premier chiffre de la permutation cherchée $(q+1)$ s'obtiendra par la division de ρ par P_{n-1}. Soit $\rho = q.P_{n-1+r}$. Le second chiffre $(q'+1)$ résultera de même de $r = q'P_{n-2}$, et ainsi de suite.

2° Rang d'une permutation donnée

$$\rho = 1 + q^{(n-2)}P_1 + q^{(n-3)}P_2 + \ldots + qP_{n-1};$$

3° Nombre de dérangements d'une permutation donnée $\Delta = \Sigma q$.

Lemoine. — Couper un triangle par une transversale de manière que trois segments non consécutifs soient égaux. (548).

Soit H l'intersection de la médiane de AC et de la bissectrice intérieure de l'angle A; K celle de la médiane de CB et de la bissectrice extérieure de l'angle C; M et N les intersections de AC par le segment capable de $\frac{B}{2}$, décrit sur HK; ils appartiennent chacun à deux des droites cherchées, au nombre de douze. La ligne KC coupant le segment en J, et KJ rencontrant AC en I, on a CI = CB. Le cercle passant en H, K et au centre du cercle exinscrit tangent au côté BC est le symétrique, par rapport à AK, du cercle HKMN.

Le Pont (*H.*). — Sur les courbes $y^m = mpx^n$. (555-557).

Les points de contact des tangentes issues d'un point M sont sur une hyperbole passant à l'origine et au point M; cette hyperbole, indépendante du paramètre p, enveloppe une courbe semblable à celle du point M, lorsque celui-ci se déplace en décrivant une courbe du genre considéré. Si M reste fixe, ainsi

que la différence $(m - n)$, le lieu du centre de l'hyperbole est une droite. L'en-veloppe de cette droite, quand M décrit une courbe étudiée, est une conique semblable.

Surfaces $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p = 0$. Si par un point P on mène les normales aux cônes du second degré de même sommet et d'axes de même direction, les pieds seront sur la sphère de diamètre OP. Si par P on mène les normales aux paraboloïdes de sommet O et d'axe OH, leurs pieds sont sur un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de révolution est parallèle à OH, ayant OP pour un de ses diamètres.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (¹).

Tome VII; 1880.

Heringa (Dr *P.-M.*). — Considérations sur l'application de l'Analyse aux sciences physiques. (1-32).

Van Heulen (*J.*). — Étude mécanique de quelques courbes. (33-58).

L'auteur étudie d'un point de vue mécanique la cycloïde, l'épicycloïde, l'hypocycloïde, la spirale d'Archimède, la développante du cercle, l'ellipse, la parabole et quelques courbes remarquables situées sur un cylindre de révolution; il engendre ces courbes par la composition de deux mouvements simples, par exemple l'ellipse par la composition de deux vibrations rectangulaires de même durée et de même amplitude. Il termine par des considérations théoriques sur les rayures des armes à feu.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (59-77).

Déduction de la solution singulière de l'intégrale générale et de l'équation différentielle; cinq problèmes où il s'agit de trouver des courbes, dont les normales satisfont à des conditions données. (*A suivre.*)

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur deux systèmes de trois cercles situés symétriquement par rapport à un triangle et sur deux systèmes de trois droites qui jouissent de la même propriété. (78-90).

La solution d'une question d'équilibre (²), l'équilibre d'un triangle dont

---

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, 172.
(²) Voir *Bulletin*, IV_2, 172.

dont les sommets s'appuient sur les faces d'un angle trièdre donné, engage l'auteur à étudier deux cas particuliers de la transformation birationnelle par l'analyse en se servant des coordonnées trilinéaires. (Comparez *Bulletin*, t. VI, p. 153).

Janse (*L.-Bx.*). — La navigation suivant un arc de grand cercle. (91-101).

A l'aide d'une nouvelle Table des différences en azimut de la loxodromie et du grand cercle, l'auteur développe une neuvième méthode approximative de la navigation suivant un arc de grand cercle; après avoir donné les déviations journalières pour la route de cap Clear à Saint-John's New-Foundland, il étudie quelques formules trigonométriques, qui lui ont servi de base dans le calcul de la Table en question.

Schäfer (*J.-H.*). — Réduction des formules qui déterminent, dans la question des inondations. la quantité d'eau qui entre, à d'autres qui font connaître en peu de temps le temps nécessaire à l'inondation totale pour le cas où l'eau est affectée par le flux et le reflux (*suite*) (¹). (102-109).

III. Formules pour le cas où la hauteur d'entrée est divisée en cinq ou dix parties. — IV. Application des formules au cas de l'inondation d'un polder déterminé. — V. Examen comparatif de deux séries de formules.

Rasch (*J.-W.*). — La cubature d'un cylindre. (117-149).

L'auteur cherche, au point de vue de l'étalonnage, la méthode la plus exacte pour la détermination de la capacité d'un corps dont la forme est sensiblement celle d'un cylindre droit. Il s'occupe successivement de la mensuration d'une section perpendiculaire à l'axe, d'une section par l'axe en mesurant un nombre pair ou un nombre impair d'ordonnées, de la détermination de la hauteur moyenne, du rapport rationnel des diamètres et des hauteurs mesurées, etc.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (*suite*). (150-163).

Solution de quelques problèmes qui, pour la plupart, se rapportent à la recherche de la première podaire positive ou négative d'une courbe donnée.

Van Geer (*P.*). — Sur le mouvement de systèmes liés à des conditions qui dépendent du temps. (164-206).

I. Littérature (Bernoulli, 1742; Clairaut, Euler, 1746; Ampère, 1830; Vieille, 1849; Resal, 1872; Mischer, 1876). — II. Le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des aires restent intacts, tandis que le théorème des forces vives et le principe de la moindre action dans sa forme originale ne sont

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, 173.

plus applicables. — III. Cependant, le dernier principe reste de rigueur dans sa forme amplifiée donnée par Hamilton; déduction des équations différentielles du mouvement dans la forme donnée par Hamilton pour ce cas exclu par lui; déduction de la fonction caractéristique d'Hamilton au moyen de la seconde forme des équations du mouvement donnée par Lagrange. — IV. Critique d'un travail de M. Grinwis, *Sur une détermination simple de la fonction caractéristique* (¹). — V. Quelques exemples élémentaires. — VI. Mouvement d'un point sur une droite qui se meut d'une manière quelconque dans l'espace. (*A suivre.*)

Krantz (*H.-J.*). — Évaluation d'une intégrale définie. (207-212).

En suivant la route connue frayée par Poisson pour l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

l'auteur trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\sqrt{\cos\varphi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} = \pi;$$

ensuite il détermine la même intégrale au moyen de la théorie des intégrales elliptiques et encore au moyen d'une formule de réduction donnée par Euler.

Van Leeuwen (*J.-H.*). — Division de l'angle en un nombre quelconque de parties égales. (213).

L'auteur donne une solution de cette question à l'aide d'une épicycloïde déterminée.

Landré (*C.-L.*). — Sur la fonction Φ de la méthode des moindres carrés. (214-219).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (110-116 et 220-230).

Tome VIII; 1881.

Van Geer (*P.*). — Sur le mouvement de systèmes liés à des conditions qui dépendent du temps (*suite*) (²). (1-22).

VII. Mouvement d'un point sur la surface d'une sphère dont le centre est fixe, tandis que le rayon varie avec le temps. — VIII. Considération de quelques cas spéciaux du mouvement d'un système.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la

(¹) *Comptes rendus de l'Académie royale d'Amsterdam*, section de Physique, 2ᵉ série, t. XIII.

(²) *Voir* le Tome précédent.

théorie des solutions singulières des équations différentielles du second ordre. (23-56).

Définition des solutions simplement singulières et des solutions doublement singulières; trois méthodes pour la déduction des solutions singulières des équations différentielles du second ordre; quelques problèmes où il s'agit de trouver une courbe dont les coordonnées du centre de courbure satisfont à une relation donnée; recherche de la développante; étude sur le problème indéterminé de la détermination de l'équation différentielle du second ordre, la solution simplement singulière étant donnée.

Michaëlis (Dr *G.-J.*). — Du mouvement des liquides sous l'influence du frottement. (57).

L'auteur étudie l'influence du frottement sur des tourbillons de liquide dans la supposition qu'ils se trouvent sous l'action de forces qui admettent un potentiel. Il termine par le mouvement stationnaire d'un ellipsoïde de révolution qui se meut dans la direction de son axe de révolution.

Legebeke (Dr *G.-J.*). — Sur une propriété des racines d'une équation dérivée. (75-80).

Extension du théorème de Rolle sur le plan (¹).

Mounier (*G.-J.-D.*). — Une propriété particulière des quaternions. (81-88).

Schols (*Ch.-M.*). — Étude des projections des Cartes géographiques. (113-223) (²).

« Parmi les paraboles de même foyer et de même axe dans un plan, celles qui tournent leur sommet vers le même côté sont coupées à angle droit par les autres qui tournent leur sommet vers l'autre côté. On demande si cette propriété peut servir de base à la composition de Cartes géographiques où les méridiens et les parallèles sont des arcs de parabole. »

L'auteur résout de la manière la plus satisfaisante cette question, posée par la Société de Mathématiques hollandaise. Il montre que la propriété énoncée peut servir de base à la représentation plane d'une petite partie de la surface terrestre, mais qu'il y a d'autres méthodes plus excellentes sous plus d'un point de vue. Posant les conditions : 1° qu'il y a conformité absolue des parties infinitésimales; 2° que les variations de l'échelle sont aussi peu considérables que possible, et 3° que les formules pour le calcul des coordonnées rectangulaires des points donnés par la longitude et la latitude sont simples et ne s'opposent pas à une évaluation exacte, il étudie, dans la supposition générale d'une Terre de révolution à méridien quelconque, encore quatre autres manières de représentation, la projection circulaire de Lagrange, une projection où les méridiens

---

(¹) Une traduction française de cette étude est insérée dans les *Archives néerlandaises*, t. XVI.

(²) Sujet de prix proposé par la Société (1880, n° 3).

mathématique ». (69-112).

Tome IX; 1882.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la relation entre les r
équation et celles de l'équation dérivée. (1-14).

Démonstration géométrique et statique du théorème de Roll
plan (¹).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la différence azin
l'arc du grand cercle et la loxodromie entre deux l
de la Terre sphérique au point de départ. (15-31).

Critique du travail de M. Janse (²), *La navigation suivant un*
cercle, par rapport à quelques formules approximatives.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur un problème géomé
théorie des probabilités. (32-59).

L'auteur s'occupe du problème : « Quelle est la probabilité
qui coupe un cercle donné coupe encore un autre cercle donné
plan ? » posé et résolu par M. Schoute (³). Il démontre que ce
même qu'une quantité considérable de problèmes analogues
points de vue différents par rapport à la distribution des droites
ou bien cette distribution ne dépend nullement de la première c
il y a un rapport intime entre la distribution des droites dans l
première courbe. Il fait voir qu'il n'est pas permis d'égaliser
obtenus dans ces suppositions différentes, comme l'a fait M. Sch
sant de trois manières différentes le nombre doublement infini
plan dans un nombre infini de systèmes simplement infini — ma
ractérise par les noms *radiale, parallèle* et *concentrique* — l'
dans la dernière des deux suppositions, trois intégrales défini
montre l'égalité au moyen de leurs dérivées.

Van den Berg (*F.-J.*). — Remarque par rapport

entre les racines d'une équation et celle de l'équation dérivée. (60).

Question de priorité.

Janse (*L.-Bx.*). — Sur le système de distribution de la vapeur des frères Sulzer de Winterthur. (61-86).

Étude de la courbe cordiforme décrite par le point régulateur de l'action des soupapes.

Paraira (Dr *M.-C.*). — Sur la figure qu'on obtient par la description de parallélogrammes sur les côtés d'un triangle. (87-96).

Paraira (Dr *M.-C.*). — Théorème de Stéréométrie analogue au théorème de Pappus. (97).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Quelques théorèmes sur les séries. (98-106).

L'auteur généralise un théorème de M. Frobenius (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIX, p. 242-244) et en démontre l'utilité dans les applications.

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Remarques sur les dérivées d'une fonction à une seule variable. (107-111).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*) — Sur la transformation de la fonction périodique $A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$. (111-116).

Schoute (*P.-H.*). — Sur deux cas particuliers de la transformation birationnelle. (117-140).

Une traduction de ce travail a paru dans le *Bulletin* (¹).

Janse (*L.-Bx.*). — Sur la partie de la surface sphérique du Soleil couverte par la Lune à l'occasion d'une éclipse. (*A suivre*) (²). (141-179).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Sur le caractère du nombre 2 envisagé comme reste quadratique. (193-195).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Démonstration du théorème que chaque fonction rationnelle entière a une racine. (196-197).

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 153.

(²) Sujet de prix proposé par la Société.

Simplification de la troisième démonstration du théorème par Gauss.

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Sur un algorithme pour le moyen géométrique. (198-211).

Démonstration de quelques théorèmes donnés par l'auteur dans une annotation qui se trouve dans un Mémoire inséré par lui dans le *Journal de Borchardt*. (T. LXXXIX, p. 343).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (212-228).

Communications faites aux jours de séances de la Société. (189-192.)

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia real das Sciencias de Lisboa e da Sociedade de Sciencias physicas naturaes de Bordeaux ([1]). Volume IV. — Coimbra, imprenza da Universidade, 1882-1883.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur quelques formules nouvelles relatives aux racines des équations algébriques. (3-38).

Le savant mathématicien portugais a écrit en français l'important Mémoire indiqué dans les deux lignes qui précèdent. Il l'a divisé en quatre parties. Dans la première, il donne « une formule intégrale relative à une des racines imaginaires des équations algébriques ». Dans la seconde, il donne d'autres « formules intégrales relatives à la somme des puissances semblables des racines et au logarithme de la racine imaginaire d'une équation algébrique ». Dans la troisième, il traite de la « formule qui donne une des racines imaginaires de l'équation algébrique ». Enfin, dans la quatrième, il fait voir « comment on détermine les autres racines imaginaires de l'équation algébrique proposée ».

L'auteur a fait précéder son travail d'un rapide aperçu historique de la résolution des équations de degrés supérieurs au quatrième, dans lequel il cite Newton, Waring, Tschirnhaus, Euler, Lagrange, Bézout, Vandermonde, Gauss, Abel, Wantzel, E. Galois, Steiner, Hesse, Kronecker et Hermite.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Sur la division en parties égales de la distance entre deux points et de la circonférence, à l'aide du compas ordinaire. (39-52).

De la question ainsi énoncée : « Étant donnés deux points a et b, déterminer avec le compas ordinaire le point milieu m de la distance qui les sépare »,

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 110.

M. Schiappa Monteiro n'a pas donné moins de quatre solutions distinctes. Puis il a résolu la question plus générale qui suit : « Étant donnés deux points *a* et *b*, diviser en un nombre quelconque de parties égales la distance qui les sépare, en employant le compas ordinaire ». Enfin, passant à la circonférence du cercle, il a résolu ce problème : « Étant donnée une circonférence de cercle, la diviser en quatre, cinq, huit, dix, douze, etc., parties égales, en employant simplement le compas ordinaire ».

Birger Hansted (*M.*). — Généralisation de la fonction X_n de Legendre. (53-61).

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. — Mélanges de Calcul intégral, par Joaquim Gomes da Silva; Leipzig, 1882. (62-64).

Ponte Horta (*F. da*). — Quelques propriétés des coniques. (65-86).

Ce travail contient l'exposé et la démonstration de douze théorèmes, avec figures dans le texte et planches; il se termine par une Note étendue relative au sixième de ces théorèmes. Il a pour but de donner une idée générale d'une étude publiée précédemment dans le *Journal des Sciences mathématiques, physiques et naturelles* de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne, sous le titre « Quelques propriétés des coniques, déduites de leur génération parallélogrammique ».

Leite Pereira da Silva (*Duarte*). — Sur quelques intégrales indéfinies. (87-90).

Les intégrales dont M. Edouard Leite Pereira da Silva s'occupe dans ce Mémoire sont celles qui sont indiquées à la p. 260 du *Cours d'Analyse* de M. Hermite, dont les Ouvrages sont fort goûtés en Portugal.

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. — 1° *E.-N. Legnazzi* : Commemorazione del conte Giusto Bellavitis. — 2° *E.-N. Legnazzi* : Aggiunte illustrative alla commemorazione del prof. conte G. Bellavitis; Padova. — 3° A sommadora *Mesnier*; Porto, 1881. — 4° *R. Mesnier*, O Arithmotechnico; Porto, 1882. — 5° *C. Stephanos*, Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan. (91-94).

1° *L'Éloge du comte Juste Bellavitis* contient le discours que le professeur Legnazzi, de Padoue, prononça, le 6 décembre 1880, pour célébrer les éminentes qualités de Bellavitis. Ce discours éloquent est suivi de cinquante-deux notes remplies de particularités intéressantes sur la vie d'un homme qui fut, comme le dit Gomes Teixeira, tout à la fois grand mathématicien, grand physicien, grand professeur et grand citoyen. Dans les dernières années de sa vie, Bellavitis entretint une correspondance scientifique avec le directeur du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques*, de Coïmbre, et celui-ci, tout natu[illegible]iers à lire l'Éloge prononcé par Legnazzi. Il l'a lu et relu

invention, pour additionner ou sommer les nombres. **M. Gomes T** que l'emploi de cet instrument est simple et commode, et qu' très utile dans les maisons de commerce où l'on a souvent à additions de nombre.

4° *Raoul Mesnier : l'Arithmotechnicien;* Porto, 1882. Da brochure, M. Raoul Mesnier décrit l'instrument qu'il a imagin plus seulement l'addition, mais toutes les opérations arithmé Teixeira fait des vœux pour que cette machine soit promptemen pratique.

5° *Stephanos.* Sur quelques propriétés du système de trois tuées dans un même plan. Cette Note importante de Géomét dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris.*

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note sur la génératio que au moyen du cercle ou d'une autre conique, e études géométriques. (95-108).

M. Schiappa Monteiro a écrit son Mémoire en français et l parties. Après s'être occupé de la génération des coniques, il re de la seconde partie, sur un problème qui avait été proposé (t. nal de M. Gomes Teixeira) dans les termes suivants : « Mener donné dans le plan d'un cercle, une transversale O mn, telle de ce point à ceux d'intersection m et n avec le cercle soient donné $\frac{m}{n}$ ». M. Zeferino Candido en a donné une solution q t. I, p. 84, du Journal de M. Gomes Teixeira, mais M. Schia donne, à son tour, une autre solution qui est très élégante.

Leite Pereira da Silva (*Duarte*). — Dérivées conque de y par rapport à x, quand on a $f(x, y) =$

Étant donnée une fonction implicite à deux variables $f(x,$ mules déduites par Gomes Teixeira ont fait connaître la valeu tion de $y^{(n-1)}, \ldots$ (²), M. Édouard Leite Pereira da Silva en dé une formule qui nous donne la valeur de $y^{(n)}$ directement en

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie : 1° *H.-F. Barros*, Elementos de Trigonometria rectilinea; Lisboa, 1882. 2° *F.-A. de Brito Limpo*, Algumas palavras sobre a necessidade da determinação directa da longitude geographica de um dos nossos observatorios pelos processos electricos; Lisboa, 1882. 3° *Marcus Baker*, Alhazen's problem.

1° Les *Éléments de Trigonométrie rectiligne*, par Barros, sont, au jugement de M. Gomes Teixeira, qui les recommande à tous les professeurs de Mathématiques élémentaires, un excellent livre, écrit avec beaucoup d'ordre et de clarté en faveur des jeunes gens qui fréquentent les établissements d'instruction secondaire.

2° M. de Brito Limpo, bien connu en Portugal par ses travaux sur la Géodésie, a publié récemment un opuscule qu'il a intitulé : *Quelques mots sur la nécessité de déterminer directement, par les procédés électriques, la longitude géographique de l'un de nos observatoires.* Le savant géodésien montre que la longitude des observatoires portugais relativement aux principaux observatoires de l'Europe n'est pas encore connue avec toute la rigueur que la Science moderne exige; il expose les tentatives faites pour résoudre cet important problème, et insiste pour que les astronomes portugais le résolvent, en déterminant par les procédés électriques la différence de longitude entre l'observatoire de Tapada d'Ajuda et celui de Madrid.

3° M. Marcus Baker a publié, dans le quatrième volume de l'*American Journal of Mathematics*, un article qu'il a intitulé : *Alhazen's problem* (le Problème d'Al Hazen), du nom du célèbre mathématicien arabe, auteur d'un Traité d'optique bien connu.

Dans cet article, M. Baker expose d'abord la liste des travaux qui ont été publiés sur cet important problème d'Al Hazen, dont voici l'énoncé :

De deux points placés dans le plan d'un cercle, tirer des lignes droites qui se rencontrent en un même point de la circonférence et fassent des angles égaux avec la tangente qui passe en ce point.

Ensuite il étend ce problème au cas où le cercle est placé sur une sphère, et où il s'agit, par deux points de la sphère, de tracer des arcs de grand cercle qui fassent des angles égaux avec le cercle donné.

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur la formule de Lagrange. (121-176).

Après avoir exposé rapidement les travaux les plus importants de Laplace, Burmann, Wronski, Cauchy, Gomes Teixeira, Rouché sur cette formule de Lagrange qui constitue un théorème fondamental de la théorie générale des fonctions, le jeune sous-lieutenant d'artillerie expose son Mémoire dont l'objet est de généraliser la formule de Lagrange, en donnant le développement en série d'une fonction Fx d'une variable x, définie par l'équation $fx \pm \alpha.\varphi x = 0$, et, comme conséquence immédiate, d'exprimer par des intégrales définies la génération des racines des équations algébriques ou transcendantes.

O'Neil de Medeiros (*J.-C.*). — Sur un problème d'Algèbre élémentaire. (177-184).

Étant donnée entre x et z la relation $z = x^1 + x^{-1}$, il s'agit d'en déduire le développement de $x^m + x^{-m}$.

Gomes Teixeira (*J.*). — Bibliographie : 1° *M. da Terra Pereira Vianna,* Influence des charges en mouvement sur les poutres droites. — 2° *Ch. Hermite,* Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris pendant le 2e semestre de 1881 à 1882; rédigé par M. Andoyer; librairie A. Hermann, 1882. — 3° *H. Brocard,* Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle. — 4° *J. Frenet,* Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal, 4e édition; Paris, 1882. — 5° *P. Mansion,* Introduction à la théorie des déterminants, 2e édition; Gand, 1882. (185-189).

1° La question traitée par M. da Terra Pereira Vianna est importante à cause des applications qu'elle a dans la construction des ponts métalliques; elle fut écrite par l'auteur lors du concours pour l'obtention d'une chaire à l'École Polytechnique de Porto, chaire qu'il occupe aujourd'hui. Notons en passant que, dans le cours de son Mémoire, M. da Terra Pereira Vianna a relevé une erreur commise par MM. Philipps et Renaudot, deux de nos ingénieurs les plus distingués.

2° Dès le début de son article bibliographique, l'éminent professeur de l'Université de Coïmbre rend un éclatant et légitime hommage au travail du professeur de la Sorbonne : « M. Andoyer », dit-il, « rend un grand service à la Science en recueillant les savantes leçons de M. Hermite à la Faculté des Sciences de Paris. Ceux qui n'ont pas le bonheur d'entendre ce grand mathématicien pourront du moins, par la lecture de cet Ouvrage, se faire une idée de la hauteur de l'enseignement de l'illustre professeur. »

3° L'*Etude d'un nouveau cercle du plan d'un triangle*, par M. H. Brocard, est une étude intéressante qui a été publiée dans les *Actes de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, congrès d'Alger.

4° Le *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. J. Frenet est un livre très recommandable, dit Gomes Teixeira, non seulement par l'élégance de la majeure partie des solutions, mais encore par les renseignements précieux qu'il fournit à propos de certaines questions demeurées fameuses.

5° L'*Introduction à la théorie des déterminants* a été écrite par M. Paul Mansion pour servir aux établissements d'instruction secondaire de la Belgique et pour préparer les élèves à comprendre la théorie générale des déterminants. Ce livre est divisé en trois Chapitres : Chap. I, Définitions et propriétés; Chap. II, Calcul des déterminants; Chap. III, Applications. M. Paul Mansion, professeur de Mathématiques à l'Université royale de Gand, vient d'être élu membre correspondant de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Arts de Belgique.

Martins da Silva. — Solution de la question proposée n° 21. (190-191).

L'énoncé de cette question n° 21 est le suivant : « Trouver les solutions entières de l'équation $x^y = y^x$ sans avoir recours aux logarithmes.

QUESTIONS PROPOSÉES, nos 22, 23, 24. (191).

Ces trois questions, nos 22, 23, 24, sont proposées : la première, par M. Schiappa Monteiro ; la seconde, par M. Gomes Teixeira ; la troisième, par M. Birger Hansted, de Copenhague. Voici les énoncés de ces trois questions :

1° Prouver synthétiquement que les surfaces courbes, engendrées par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes, sont du second ordre, et déduire les propriétés principales de ces surfaces, spécialement au point de vue de ce mode de génération.

2° Sommer la série

$$\sum_0^{\infty} \frac{2^i x}{e^{2^i x}+1}.$$

3° Prouver qu'il y a un nombre infini de manières de développer une fraction périodique simple en une série de la forme

$$a\,10^{-b} + ma\,10^{-2b} + m^2 a\,10^{-3b} + m^3 a\,10^{-4b} + \ldots.$$

Ar. M.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS (1).

Tome XCI; 1881.

Stahl (*Wilhelm*). — Le système de rayons de troisième ordre et de deuxième classe. (1-22).

Dans son Mémoire fondamental *Sur les systèmes algébriques de rayons* (*Mémoires de l'Acad. de Berlin*, 1866), M. Kummer a le premier démontré l'existence de sept systèmes essentiellement différents de rayons du second ordre sans courbes focales, et en même temps il y a développé les plus importantes des relations qu'ils ont avec leurs surfaces focales. Plus tard (*Journal*, t. LXXXVI ; *Bulletin*, 2e série, IV_2, p. 41), M. Reye a enseigné à construire, par un procédé de la Géométrie synthétique, les systèmes de la seconde classe, réciproques de ceux qu'a étudiés M. Kummer. Actuellement M. W. Stahl donne une nouvelle construction simple d'un des systèmes de rayons établis par la recherche de M. Kummer, et sa méthode fait ressortir aussi bien la relation où sont entre eux les systèmes de rayons du troisième ordre et de deuxième classe qui touchent une surface focale commune, que la construction des points et plans de la surface focale. Voici cette construction :

Soient donnés dans un plan (01) deux systèmes plans réciproques (0) et (1), tels qu'une droite l_0 corresponde à un point quelconque L_1 et réciproquement : de plus soient donnés dans les plans α et β deux faisceaux projectifs de rayons A et B qui ont un rayon commun (partant la droite qui joint leurs centres coïncide avec la droite, intersection de leurs plans). Eh bien, une droite quelconque l_0 du plan (01) percera les deux plans α et β, et rencontrera donc un rayon de chacun des deux faisceaux ($A\alpha$) et ($B\beta$) : construisons le rayon l^0 qui passe par le point L_1, élément de (01) et réciproque de l_0, et qui rencontre les mêmes deux rayons de ($A\alpha$) et de ($B\beta$) que l_0 : l'ensemble de tous les

rayons $l^{(\bullet)}$ forme un système $\Sigma_{\bullet}$ de rayons de troisième ordre et de deuxième classe.

§ 1. Construction du système de rayons. — § 2. Les points et plans singuliers de $\Sigma_{\bullet}$. — § 3. Le système de rayons Σ_1. — § 4. Les quatre systèmes de rayons Σ_2, Σ_3, Σ_5, Σ_7. — § 5. La surface focale des systèmes de rayons. — § 6. La construction de M. Reye. (Les théorèmes de M. Reye sont complétés). — § 7. Cas particuliers. (Un système particulier qui est d'importance dans la théorie des polaires des complexes du second ordre).

Mangoldt (*Hans von*). — Sur les points situés sur des surfaces à courbure positive, et tels que les lignes géodésiques partant de ces points ne cessent jamais d'être des lignes de longueur minimum. (23-53).

Le Mémoire prend pour point de départ ce passage des *Leçons de Dynamique* de Jacobi :

« Si, à partir d'un point d'une surface, on trace des lignes de longueur minimum, il peut se présenter ces deux cas : ou deux plus courtes lignes, infiniment voisines, continuent à marcher l'une à côté de l'autre sans se couper, ou elles se rencontrent de nouveau, et alors la continuité de tous les points d'intersection en forme l'enveloppe. Dans le premier cas, les plus courtes lignes ne cessent jamais d'être de longueur minimum ; dans le second, elles ne le sont que jusqu'au point de contact avec l'enveloppe.

» Le premier se présente, comme cela s'entend, sur toutes les surfaces développables; car dans le plan les droites issues d'un point ne se coupent point une seconde fois; de plus, j'ai trouvé qu'il a lieu sur toutes les surfaces concavo-convexes, c'est-à-dire sur celles où deux sections normales, perpendiculaires l'une à l'autre, ont leurs rayons de courbure de deux côtés opposés, par exemple. sur l'hyperbole à une nappe et sur le paraboloïde hyperbolique. Cependant cela ne veut pas dire qu'il ne puisse pas y avoir de surfaces concavo-concaves qui appartiennent à cette catégorie; du moins l'impossibilité n'en a-t-elle pas été démontrée. Un exemple de la seconde espèce est fourni par l'ellipsoïde de rotation. »

La question que Jacobi a laissée indécise a donné lieu à plusieurs recherches; nous n'en citerons ici que la dissertation inaugurale de M. A. von Braunmühl, *Ueber geodätische Linien auf Rotationsflächen und jene Einhüllenden derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden;* München, 1878. Un extrait de cette thèse se trouve dans les *Mathematische Annalen*, t. XIV (*Bulletin*, 2e série, IV_2, p. 222).

M. von Mangoldt s'occupe surtout des surfaces à courbure positive pour lesquelles la question n'a pas encore été étudiée assez complètement. D'après ce géomètre il faut distinguer deux sortes de points : 1° des points tels que, parmi toutes les lignes géodésiques partant d'eux, il n'y ait pas deux lignes infiniment voisines qui se coupent; et 2° des points tels que, parmi les lignes géodésiques partant d'eux, il y en ait du moins quelques-unes qui soient coupées par les lignes infiniment voisines. Ces points sont nommés points de *première* et de *seconde espèce*.

Si l'on borne l'étude aux surfaces qui sont dépourvues de singularités, on trouve d'abord qu'une surface à *curvatura integra* ne peut contenir des points de première espèce que lorsque sa *curvatura integra* n'est pas supérieure à la

moitié de la sphère servant d'unité, c'est-à-dire, lorsque la surface est ouverte, comme, par exemple, un paraboloïde elliptique ou l'une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes. Mais, quand même cette condition serait remplie, il est impossible que tous les points soient de la première espèce; tout au rebours, les points de première espèce ne remplissent qu'une partie *finie* de la surface qui peut se composer d'une ou de plusieurs parties contiguës, tandis que le reste ne contient que des points de seconde espèce. Enfin l'auteur étudie en particulier, pour les surfaces respectives du second ordre, la figure de la courbe qui sépare le domaine des points de première et de seconde espèce.

I. Démonstration du théorème de Jacobi pour les surfaces à courbure négative. — II. Étude des surfaces à courbure positive. — III. Domaine des points de première espèce sur l'hyperboloïde de rotation à deux nappes. — IV. Points de première espèce sur le paraboloïde de rotation. (Dans ce paragraphe, M. v. Mangoldt signale une erreur qui s'est glissée dans les publications de M. v. Braunmühl.) — V. Points de première espèce sur l'hyperboloïde à trois axes inégaux.

Hermite (Ch.). — Sur quelques points de la théorie des fonctions. (Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler.). (54-78).

Ce Mémoire, qui a été publié d'abord à Helsingfors dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* et que M. Hermite a enrichi, à l'occasion de la réimpression, de quelques additions importantes, se trouve analysé dans le *Bulletin,* V_2, p. 312-320.

Thomé (L.-W.). — Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires. (Suite, *voir* t. LXXXVII de ce *Journal.*). (79-198).

La recherche des équations différentielles linéaires homogènes, où l'expression différentielle est représentée par un système d'expressions différentielles normales (*voir* le Mémoire, t. LXXXIII de ce Journal, *Bulletin,* 2ᵉ sér., II_2, p. 224), est continuée dans ce travail, et l'intégration de la plupart des équations différentielles de cette sorte se trouve maintenant effectuée. En reprenant le fil des idées du Mémoire, t. LXXXVII (*Bull.*, IV_2, p. 245), M. Thomé gagne la représentation des intégrales de ces équations différentielles dans le domaine d'un point singulier par l'expédient suivant : l'intégrale indéfinie

$$\int (x-a)^r \psi(x-a)\, dx,$$

où r est non entier, $\psi(x-a)$ une série procédant suivant des puissances à exposants entiers posititifs et négatifs, se prête à être représentée par l'intégrale définie $\frac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\int_1^{'} \psi[(x-a)\alpha]\alpha^r\, d\alpha$, où le chemin d'intégration de la variable α est fourni par la circonférence qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon.

L'intégrale définie renferme la même fonction ψ que l'intégrale indéfinie, et cette fonction peut être représentée là dedans sous une autre forme que sous celle d'un développement en série. La chose en est semblable avec les intégrales multiples. La fonction ψ est de la forme $e^w Q(x-a)$, où $w = \Sigma_1^n c(x-a)^{-1}$; ainsi ψ se met sous la forme PQ, où P et Q sont des séries procédant suivant des puissances de $x-a$, la première à exposants entiers négatifs, la seconde à

exposants entiers positifs. Maintenant M. Thomé fait $P = P' + P''$, $Q = Q' - Q$, P' et Q' contenant un nombre fini de termes : donc il s'agit seulement de rendre le module du reste $P'Q'' + P''Q' + P''Q''$ plus petit qu'une quantité quelconque donnée. Cette recherche met à profit les théorèmes sur les séries procédant suivant des puissances et qui satisfont à une équation différentielle à coefficients rationnels; en particulier, l'auteur utilise les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il a construites (t. LXXXVII, n° 7) pour les fonctions qui sont les facteurs des logarithmes dans la représentation générale des intégrales dans le voisinage des points singuliers. En même temps, il a simplifié dans ce Mémoire le procédé qui tend à représenter l'expression différentielle primitive par un système d'expressions différentielles normales, procédé qu'il a développé amplement dans le tome LXXXIII. On voit maintenant que cette représentation dépend principalement de la résolution d'équations algébriques dont les coefficients sont liés algébriquement avec les coefficients de l'équation différentielle et dont les racines déterminent les exposants dans le développement des intégrales dans le voisinage des points singuliers.

Königsberger (L.). — Sur des relations algébriques entre des intégrales de différentes équations différentielles et leurs quotients différentiels. (199-214).

Dans un Mémoire du tome XC (*Remarques générales sur le théorème d'Abel*), M. Königsberger a développé un théorème très général sur les relations mentionnées dans le titre de ce nouveau travail. Bornons-nous à citer le cas de deux équations différentielles : une relation algébrique entre une intégrale particulière d'une équation différentielle quelconque et une intégrale particulière d'une autre équation différentielle, mais qui est irréductible, subsiste encore quand on substitue dans elle une autre intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle irréductible et une autre intégrale correspondante de la première équation différentielle. Dans le travail du tome XC, l'auteur a fait l'application de ce théorème à l'établissement du théorème d'Abel pour des intégrales d'équations différentielles, à la recherche de l'irréductibilité d'équations différentielles et à la détermination de la forme des intégrales algébriques et logarithmiques d'équations différentielles linéaires.

C'est une recherche concernant l'expressibilité algébrique de l'intégrale générale d'une équation différentielle par des intégrales particulières qui a porté M. Königsberger à généraliser le théorème cité; cette généralisation se rapporte à la conservation de la forme d'une relation algébrique qui a lieu entre des intégrales particulières de différentes équations différentielles et de leurs quotients différentiels. L'extension de la proposition dans ce sens et quelques applications du théorème démontré antérieurement font le sujet du nouveau Mémoire. Voici le théorème dans sa nouvelle forme :

S'il existe une relation algébrique entre une intégrale particulière d'une équation différentielle quelconque et d'une suite des dérivées de l'intégrale et entre une intégrale particulière d'une équation différentielle irréductible et d'un nombre de ses dérivées, cette relation subsistera encore quand l'intégrale de l'équation irréductible est remplacée par une autre intégrale particulière quelconque, pourvu que l'intégrale de l'autre équation différentielle soit remplacée par une certaine autre.

Gundelfinger (*S.*). — Sur des intégrales multiples qui ne changent pas de forme par une transformation des variables. (215-220).

Supposons qu'il existe entre m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ une équation homogène du second degré et $m - 2$ équations homogènes linéaires

$$(1)\qquad \mathfrak{f} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{mm}x_m^2 = 0,$$

$$(1^a)\qquad \begin{cases} v = v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_mx_m = 0, \\ w \equiv w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_mx_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t \equiv t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_mx_m = 0; \end{cases}$$

que dans $m - 2$ quelconques de ces relations les coefficients $a_{ik}, v_k, \ldots, t_k$ soient des fonctions homogènes de premier degré, dans la $(m-1)^{\text{ième}}$ des fonctions homogènes de second degré, de m autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$; ainsi que les équations (1) et (1^a), arrangées convenablement et ordonnées suivant les puissances des y_k, puissent être mises sous cette forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{v}_1y_1 + \mathfrak{v}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{v}_my_m = 0, \\ \mathfrak{w}_1y_1 + \mathfrak{w}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{w}_my_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{t}_1y_1 + \mathfrak{t}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{t}_my_m = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}y_2^1 + \mathfrak{a}_{22}y_1y_2 + \ldots + \mathfrak{a}_{mm}y_m^2 = 0. \end{cases}$$

Qu'on introduise, en outre, entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de même que entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deux relations arbitraires

$$(3)\qquad \mathfrak{p}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad \mathfrak{p}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,$$

telles que $\mu \mathrm{P} + 1$ (respectivement $\nu \mathfrak{p} + 1$) représente une fonction homogène de $\mu^{\text{ième}}$ (resp. $\nu^{\text{ième}}$) degré des $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (resp. $x_1, x_2, \ldots, x_m$). Enfin posons, pour abréger,

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & v_1 & \ldots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & v_2 & \ldots & t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & v_m & \ldots & t_m \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \\ \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \ldots & \mathfrak{a}_{1m} & \mathfrak{v}_1 & \ldots & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \ldots & \mathfrak{a}_{2m} & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{t}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{a}_{m1} & \mathfrak{a}_{m2} & \ldots & \mathfrak{a}_{mm} & \mathfrak{v}_m & \ldots & \mathfrak{t}_m \\ \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{v}_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_1 & \ldots & \mathfrak{t}_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Cela étant, pour une fonction quelconque U des variables d'intégration, l'intégrale $(m-1)^{\text{-uple}}$

$$(4^a)\qquad \mathrm{J} = \int\int\ldots\int \frac{\mathrm{U}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{m-1}}{\mathfrak{p}'(y_m)\sqrt{\mathfrak{A}}},$$

sera transformée par les relations (1) à (3), en

$$(4^*) \qquad J = \int\int\cdots\int \frac{U\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m)\sqrt{A}}.$$

Gundelfinger (*S.*). — **Sur la transformation, en somme de carrés, d'une forme quadratique. (221-237).**

La réduction en somme de carrés, d'une forme quadratique, nécessaire dans presque toutes les disciplines des Mathématiques, a été étudiée depuis Lagrange par bien des géomètres, et la transformation de Lagrange a encore suggéré à Jacobi l'idée d'une investigation profonde théorique. M. Gundelfinger croit qu'une autre représentation de la réduction en question, indiquée par Plücker (t. XXIV du Journal, p. 297) n'est guère connue, quoiqu'elle l'emporte, dans plusieurs points essentiels, sur celle de Jacobi, qu'elle ait la même portée que celle-ci et qu'elle enseigne à exprimer d'une manière directe les variables primitives x_k par les transformées. Tout en poursuivant l'idée fondamentale de Plücker, l'auteur entre dans une recherche qui s'étend à toutes les particularités du sujet, et il discute notamment le cas où il subsiste des relations linéaires entre les variables x_k.

Hazzidakis (*J.-N.*). — **Sur une propriété des déterminants mineurs d'un déterminant symétrique. (238-247).**

Soit $\Delta = |a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}|$ un déterminant symétrique où $a_{ik} = a_{ki}$; supposons que les a_{ik} soient des fonctions entières d'une variable ω à coefficients réels; désignons par Δ_{11} le coefficient de a_{11} dans Δ, par $\Delta_{11.22}$ celui de a_{22} dans Δ_{11}, par $\Delta_{11.22.33}$ celui de a_{33} dans $\Delta_{11.22}$, etc. : alors la suite des déterminants symétriques

$$(1) \qquad \Delta_{11},\quad \Delta_{11.22},\quad \Delta_{11.22.33},\quad \ldots,\quad \Delta_{11.22.33\ldots nn}$$

sera une suite de Sturm pour l'équation $\Delta = 0$ et pour l'intervalle de $\omega = a$ à $\omega = b$ sous ces conditions : 1° aucune des fonctions (1) ne doit s'évanouir identiquement, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ω; 2° la somme

$$(2) \qquad \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu}\Delta_{1\mu}\Delta_{1\nu} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, 3, \ldots, n\\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, n\end{pmatrix}$$

ne doit pas s'évanouir dans l'intervalle $a\ldots b$. Les fonctions (1) conservent leur propriété quand on remplace la seconde condition par celle-ci : La forme quadratique

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les coefficients dépendent de ω, doit être définie pour toutes les valeurs de ω situées dans l'intervalle $a\ldots b$, et ne doit s'évanouir que lorsque toutes les variables deviennent égales à zéro.

Hunyady (*Eugen*). — **Sur un critère de Steiner dans la théorie des sections coniques. (248-253).**

Démonstration analytique d'une proposition de Steiner.

Matthiessen (*Ludwig*). — Sur le soi-disant problème des restes dans les Ouvrages chinois Swan-king de Sun-tsze et Tayenlei-schu de Yih-hing. (254-261).

Dans les Ouvrages cités des Chinois on trouve une méthode servant à résoudre certains problèmes de la théorie des nombres. L'auteur a déjà démontré, en 1874, que cette méthode Tayen (grande extension) des Chinois est identique à la méthode des congruences de Gauss.

La méthode généralisée Tayen de Yih-hing ne se trouve, sous sa forme particulière, dans aucun Ouvrage moderne. L'explication de cette méthode généralisée et l'établissement du théorème qui lui sert de base font le sujet de cette Note.

Gräfe. — Intégrales de quelques équations différentielles linéaires. (262-264).

Königsberger (*L.*). — Sur la liaison entre l'intégrale générale et les intégrales particulières des équations différentielles. (265-300).

Le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles linéaires homogènes en fournit l'intégrale générale comme aggrégat additif d'intégrales particulières multipliées par des constantes arbitraires, et c'est sur ce théorème que s'appuie la possibilité de la discussion des intégrales d'équations différentielles linéaires. Demander la relation qui lie l'intégrale générale aux intégrales particulières pour des équations différentielles algébriques quelconques, ou plutôt demander les conditions pour l'existence d'une telle relation, voilà en effet une question importante et inévitable pour le développement de la théorie des équations différentielles générales, question dont la réponse pouvait être abordée au moyen des recherches et propositions que M. Königsberger avait récemment publiées sur l'extension du théorème d'Abel à des équations différentielles quelconques et sur les intégrales algébriquement logarithmiques d'équations différentielles linéaires non homogènes.

Le problème général peut s'énoncer sous cette forme :

Caractériser toutes les équations différentielles algébriques d'ordre m qui ont la propriété que leur intégrale générale puisse être exprimée comme fonction algébrique de la variable indépendante, d'un nombre déterminé d'intégrales particulières et de m constantes arbitraires, et préciser la forme de cette fonction algébrique elle-même.

Après avoir résumé quelques propositions tirées de ses études antérieures sur les équations différentielles, M. Königsberger applique ces principes généraux à la discussion des équations différentielles algébriques du premier ordre, et déjà dans cette étude spéciale il utilise les différentes méthodes dont il se sert pour les équations différentielles d'ordres supérieurs. Cependant il n'est pas possible d'ébaucher une esquisse légère des propositions intéressantes qu'il fait ressortir de son analyse détaillée. Bornons-nous à signaler ce théorème général, qui fait conclusion à son travail :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ soit telle que son intégrale générale soit une fonction algébrique d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire consiste dans l'équation $f(x, y) = \mu(x).\lambda(y)$, où $\mu(x)$ est une fonction algébrique arbitraire de x et $\lambda(y)$ une fonction algébrique de y telle que $\frac{dy}{\lambda(y)}$ soit une différentielle de première espèce de rang 1.

Kronecker (*L.*). — Sur le discriminant de fonctions algébriques d'une variable. (301-334).

La publication de M. Kronecker forme la première partie d'un travail qui a été communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin, dans la séance du 16 janvier 1862, sans avoir été inséré aux Mémoires de cette savante Société. Un ample Mémoire, de MM. Weber et Dedekind, présenté à la rédaction du *Journal* et publié dans le tome XCII, détermina M. Kronecker à le faire précéder d'un travail dont la conception est antérieure à ce nouveau Mémoire de presque vingt années. Comme il est difficile de développer, dans un résumé, la richesse des points de vue et idées de l'auteur, nous empruntons à l'Introduction ce passage, qui nous semble le mieux révéler les idées générales qui ont présidé à la naissance des notions nouvelles :

« Le principe qui sert de base aux développements suivants m'a été suggéré en 1857 par des recherches générales concernant les théories de nombres complexes. La généralité des recherches amena immédiatement la notion des nombres entiers algébriques comme racines d'équations $F(x) = 0$ à coefficients entiers, c'est-à-dire d'équations où le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité et où les autres coefficients sont des nombres entiers; ce fut d'abord l'étude de théories spéciales de nombres complexes qui les fit concevoir comme fonctions entières à coefficients entiers d'un nombre entier algébrique déterminé. Mais il surgit alors certaines difficultés : elles se rapportaient cependant uniquement à la détermination des facteurs complexes du discriminant et ne se présentaient que lorsque les nombres complexes spéciaux dont il s'agissait montraient une propriété particulière : c'est que des nombres algébriques entiers pouvaient affecter la forme de nombres complexes fractionnaires, c'est-à-dire de fonctions entières du nombre algébrique pris pour base, à coefficients numériques fractionnaires. Après quelques réflexions, ces difficultés me portèrent à comprendre, dans cette année-là, que c'est une restriction aussi utile que nuisible que de représenter les fonctions rationnelles d'une grandeur x, définie par une équation algébrique, uniquement sous la forme de fonctions entières de x, c'est-à-dire, n dénotant le degré de l'équation, comme fonctions linéaires homogènes des n grandeurs $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$; que, tout au contraire, le caractère propre de la question exige leur représentation plus générale par des formes linéaires homogènes de n fonctions rationnelles quelconques de x, linéairement indépendantes les unes des autres. Cela donne la possibilité d'établir des formes de nombres complexes où chaque nombre algébrique entier se présente aussi comme entier, et d'enlever ainsi les difficultés signalées ci-dessus. Les travaux de M. Kummer sur les nombres complexes formés des périodes de racines de l'unité avaient déjà fait voir combien de telles formes sont convenables au but, et en même temps il avait fait aussi paraître ce Tableau des coefficients déterminants qui s'ensuit de la condition que la multiplication de formes linéaires de n éléments à coefficients entiers fasse résulter une forme de même nature. Cette

condition détermine immédiatement les éléments comme nombres entiers algébriques et tels que tous sont exprimables rationnellement par un d'entre eux, qu'ils appartiennent donc à un même genre. »

Rausenberger (*Otto*). — Contribution à la transformation linéaire des fonctions elliptiques. (335-340).

Pour effectuer la transformation $\vartheta_3(\tau, w)$ par la substitution $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, l'auteur se propose de déterminer le quotient $\dfrac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right)}{\vartheta_3(\tau, \tau w)}$. Posant

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\tau, \frac{1}{2}\tau\right)} = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)}{\vartheta_3(\tau, 0)} \quad \text{et} \quad f(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\tau}},$$

il développe ces équations fonctionnelles

$$f(2\tau) = f(\tau), \quad f(9\tau) = f(\tau), \quad f(2^r 9^s \tau) = f(\tau),$$

d'où il conclut $2^r 9^s = 1 + \delta$, δ étant indéfiniment petit, et enfin par une analyse facile

$$\psi(\tau) = \sqrt{i\tau}, \quad \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{i\tau}\, e^{\pi i \tau w^2} \vartheta_3(\tau, \tau w).$$

Thomé (*L.-W.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (341-346).

Addition au Mémoire, p. 79 du même Tome, avec une Note où l'auteur défend son travail du Tome LXXXVII contre une critique contenue dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1879.

Schellbach (*K.-H.*). — Une représentation géométrique de la substitution de Landen. (347-348).

Le triangle sphérique rectangle est propre à représenter cette substitution.

Pasch. — Démonstration d'un théorème sur des séries ponctuelles projectives. (349-351).

E. LAMPE.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement (1).

XLIXe Cahier. — Tome XXX, 1881.

Phillips. — Du spiral réglant conique des chronomètres et de divers autres spiraux. (1-46).

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 275.

L'auteur traite d'abord avec détail du spiral réglant conique; il calcule les éléments les plus favorables à l'application et montre, en particulier, l'utilité qu'il y a à munir le spiral de deux courbes terminales théoriques, situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe du cône, afin de satisfaire à la condition si importante que le centre de gravité du spiral entier soit aussi près que possible de l'axe du balancier; il étudie ensuite divers types dérivés : le spiral cylindrique, le spiral plat sans courbes terminales ou muni d'une ou deux courbes terminales théoriques, le spiral formé de deux spirales coniques égales situées respectivement sur deux cônes égaux adossés suivant leur base, les deux spirales étant d'ailleurs dans le prolongement l'une de l'autre. M. Phillips montre que, pour les types à deux courbes terminales théoriques qu'il examine, la distance du centre de gravité du spiral à l'axe est du premier ordre de petitesse, c'est-à-dire que son terme le plus important est proportionnel au pas λ. Dans le spiral plat à une seule courbe terminale théorique, cette distance peut être rendue aussi très petite; dans le spiral cylindrique, le terme principal de cette distance est proportionnel à λ^2; tout ceci suppose d'ailleurs expressément que l'axe du spiral coïncide avec l'axe du balancier.

La propriété qu'on vient de mentionner pour le spiral cylindre ne lui est pas particulière; M. Phillips l'avait déjà rencontrée pour le spiral sphérique (*Comptes rendus*, 9 et 16 juin 1879); il montre que cette propriété subsiste pour un grand nombre de types de spiraux, obtenus en considérant des spirales à pas constant enroulées sur une surface de révolution admettant un plan de symétrie; la courbe se termine à des distances égales de ce plan et le spiral est muni de deux courbes terminales théoriques, situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe; leurs projections sur le plan de l'équateur sont symétriques par rapport au méridien moyen; en disposant convenablement des données, on peut faire que la distance du centre de gravité du spiral à l'axe soit comparable à λ^2. M. Phillips retrouve ainsi les résultats déjà signalés pour le spiral cylindrique et le spiral sphérique. Il étudie ensuite le spiral en tonneau.

Badoureau. — Mémoire sur les figures isoscèles. (47-172).

L'auteur commence par rappeler les travaux analogues de Gergonne et de M. Catalan. Le Mémoire de M. Catalan, inséré en 1865 dans le XLIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, est relatif aux polyèdres semi-réguliers du premier et du second genre. Un polyèdre semi-régulier au premier genre est celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles polyèdres sont égaux ou symétriques et un polyèdre semi-régulier du second genre est celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont réguliers. M. Catalan a énuméré et décrit les quinze types possibles de polyèdres semi-réguliers du premier genre.

M. Badoureau a cherché quels étaient tous les polyèdres que l'on pouvait construire en assemblant des polygones réguliers convexes ou étoilés, de façon que tous les angles solides fussent égaux ou symétriques. Il établit d'abord qu'il n'existait que quinze polyèdres convexes jouissant de cette propriété, et cela par des raisonnements différents de ceux de M. Catalan; l'application des méthodes cristallographiques de Bravais lui fournit ensuite, pour la construction de ces polyèdres, des procédés également différents de ceux de M. Catalan. M. Badoureau étudie aussi toutes les manières possibles de découper un plan indéfini en polygones convexes réguliers sans vide ni duplicature et de façon qu'on puisse superposer la figure à elle-même en plaçant un sommet sur

n'importe quel autre; outre les trois assemblages réguliers et les trois assemblages semi-réguliers de Gergonne, il trouve sept nouvelles solutions.

Il procède ensuite à l'examen des polyèdres étoilés qui se rattachent aux solides d'Archimède à peu près de la même manière que les polyèdres de Poinsot se rattachent aux polyèdres réguliers classiques. M. Bertrand a indiqué, pour construire les polyèdres de Poinsot, une méthode que M. Badoureau applique avec de légères modifications. Il détermine l'espèce des polyèdres étoilés au moyen d'une formule analogue, à l'aide de laquelle MM. Rouché et de Comberousse ont pu signaler et corriger l'inexactitude des résultats de Poinsot relativement à l'espèce de ces polyèdres.

Enfin il étudie les figures qu'on peut former en recouvrant un plan par des polygones convexes ou étoilés, de telle sorte qu'on puisse superposer la figure elle-même en plaçant un sommet sur un autre sommet quelconque. Voici, au surplus, la Table des matières du Mémoire de M. Badoureau.

Première partie. — *Polyèdres et assemblages réguliers convexes.*

Il existe quinze types de polyèdres isoscèles convexes : Symétrie des polyèdres isoscèles convexes. — Polyèdres prismatiques. — Polyèdres tétraédriques. — Polyèdres cubiques. — Polyèdres pentagonaux. — Angles dièdres des polyèdres isoscèles convexes. — Propriétés générales des polyèdres isoscèles convexes. — Il existe huit assemblages isoscèles convexes. — Construction des assemblages isoscèles convexes. — Symétrie des assemblages isoscèles convexes. — Tableau des figures isoscèles convexes.

Seconde partie. — *Polyèdres et assemblages isoscèles étoilés.*

Mode de recherche des polyèdres isoscèles étoilés. — Espèce des polyèdres isoscèles étoilés. — Polyèdres inscrits dans les polyèdres réguliers convexes. — Polyèdres isoscèles prismatiques étoilés. — Il n'existe pas de polyèdre tétraédrique étoilé. — Polyèdres inscrits dans les polyèdres isoscèles cubiques convexes. — Polyèdres inscrits dans les polyèdres isoscèles pentagonaux convexes. — Autres polyèdres isoscèles étoilés. — Résumé. — Assemblages isoscèles étoilés. — Tableau des figures isoscèles étoilées.

Mathieu. — Mémoire sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle. (173-196).

Lamé, dans la douzième de ses Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité, examine l'équilibre d'élasticité d'un parallélépipède rectangle dont il suppose les six faces soumises à des forces normales données; en outre, il suppose les forces disposées symétriquement par rapport aux trois plans menés à égale distance de deux faces parallèles; il n'a pu résoudre ce problème difficile que dans des cas fort simples.

M. Mathieu réduisant, en quelque sorte, le problème de Lamé à deux dimensions, traite la question suivante :

« Un prisme rectangle homogène a ses deux bases appuyées contre deux parois parallèles et fixes; des pressions normales données sont exercées dans toute l'étendue des quatre faces latérales de ce prisme. Les pressions sont les mêmes sur une même face tout le long d'une ligne parallèle aux quatre arêtes latérales; de plus, ces pressions sont disposées symétriquement sur des faces

latérales opposées. On demande de déterminer toutes les circonstances à déformation du prisme et la résistance que devront opposer les deux paro les bases de cette poutre. »

Le problème dépend des équations suivantes :

$$(1)\qquad \frac{d\theta}{dx} + \varepsilon\Delta u = 0, \quad \frac{d\theta}{dy} + \varepsilon\Delta v = 0,$$

où u, v sont les composantes du déplacement d'un point x, y, z, où θ est la dilat cubique $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, où ε est mis à la place de $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, λ et μ étant les deux stantes d'élasticité, où enfin le symbole Δ désigne l'opération $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Les conditions à la limite sont de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} N_1 = f_1(y),\ T_2 = 0, & \text{pour } x = \pm\frac{a}{2}, \\ N_2 = f_2(x),\ T_3 = 0, & \text{pour } y = \pm\frac{b}{2}, \end{cases}$$

en désignant par N_1, T_2, T_3 les composantes de la force élastique rapport l'unité de surface et exercée en un point quelconque (x, y, z) sur un élém plan parallèle au plan des yz, et en employant des notations analogues p les éléments plans parallèles aux plans des zx et des xy ; ces forces sont do par les formules

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, \quad N_3 = \lambda\theta,$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \theta, \quad T_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

les fonctions f sont paires.

Si les quantités u, v ont été calculées au moyen des équations différenti on en conclura θ et l'équation $N_3 = \lambda\theta$ donnera la pression normale qu'il dra exercer en chacun des points des bases $z = \pm\frac{e}{2}$ du prisme pour que l' d'équilibre soit possible ; on aura ainsi la solution de ce problème : « Tro les déplacements moléculaires d'un prisme rectangle dont les deux bases au contact de deux parois parallèles et fixes quand les faces latérales sont mises à des pressions normales données suivant ce qui vient d'être indiqu déterminer les pressions normales que doivent exercer les deux parois en les points des bases de ce prisme. »

M. Mathieu montre comment on peut satisfaire aux équations (1), pre pour θ la série suivante :

$$\theta = \Sigma\,\mathfrak{A}_m E(my)\cos mx + \Sigma B_n E(nx)\cos ny,$$

où E désigne un cosinus hyperbolique et où l'on suppose

$$m = \frac{2p\pi}{a}, \quad n = \frac{2q\pi}{b},$$

p et q étant des entiers non négatifs et le signe sommatoire Σ s'étend à toutes les valeurs de p et de q. Les quantités $\mathfrak{A}_m$ et B_m sont elles-mêmes



nées au moyen de séries infinies dont M. Mathieu démontre avec soin la convergence; une application numérique termine son travail. Il annonce enfin que les mêmes considérations paraissent conduire à la solution du problème de Lamé; toutefois, les calculs et les formules se compliquent singulièrement.

Callandreau (*O.*). — Contribution à la théorie du mouvement elliptique et parabolique. (197-204).

Étude des questions suivantes qui ont un grand intérêt pour la théorie du mouvement des planètes et des comètes :

Soit
$$u - u_0 - l(\sin u - \sin u_0) = n(t - t_0),$$

et supposons qu'on développe la différence $u - u_0$ suivant les puissances de $t - t_0$, entre quelles limites le développement sera-t-il convergent?

Soit de même, dans le cas des orbites paraboliques,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v - \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v_0\right) = h(t - t_0),$$

entre quelles limites le développement de $v - v_0$, suivant les puissances de $t - t_0$, subsistera-t-il?

M. Callandreau donne un Tableau qui permet de s'assurer, dans un cas donné, si l'on est dans les limites de convergence; les limites peuvent se trouver assez étendues pour qu'on puisse tirer parti d'observations qui ne sont pas aussi rapprochées qu'on le suppose d'ordinaire.

Le cas où le mouvement héliocentrique d'une comète est assez considérable pour que l'anomalie vraie soit voisine de 180° offre un intérêt particulier, et l'on doit recourir à des modes particuliers de développement indiqués par Bessel et Le Verrier; en posant $v' = 180 - v$, l'équation

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v'} + \frac{1}{2\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v'} = ht$$

admet, pour de grandes valeurs de ht, trois déterminations, en adoptant la détermination
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v' = (3ht)^{-\frac{1}{3}};$$

on peut développer v', suivant les puissances de $\frac{1}{(3ht)^{\frac{1}{3}}}$, en partant de l'équation

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v'}{\sqrt{1 + 3\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}v'}} = \frac{1}{(3ht)^{\frac{1}{3}}}$$

et cela tant que le premier membre de cette équation est plus petit que $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lecornu (*L.*). — Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. (205-228).

Étant donnée une relation

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

entre n variables imaginaires $z_1, z_2, \ldots, z_n$, à chaque système de solutions correspondra un polygone dont les sommets seront les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ce polygone est dit *générateur*, par M. Lecornu. L'auteur étudie comment on peut déplacer et déformer ce polygone, en supposant la fonction f holomorphe. Il existe, en général, pour chaque polygone générateur un centre instantané de rotation dont l'affixe est donnée par la formule

$$Z = \frac{\Sigma p z}{P};$$

les p sont les dérivées partielles de la fonction f et $P = \Sigma p$; le polygone peut ainsi se déplacer sans déformation. En partant d'un polygone générateur quelconque, on peut considérer deux familles de courbes décrites par les sommets: les unes sont les trajectoires (du *premier genre*) correspondant à un mouvement de déplacement sans déformation; les autres sont les trajectoires (du *second genre*) correspondant à une variation de longueur des côtés sans changement de leurs directions ni de leurs rapports. Les deux espèces de courbes sont orthogonales; pour chaque sommet, les trajectoires de chaque genre forment un système isotherme dont le paramètre différentiel est, en chaque point, égal à l'inverse du rayon vecteur issu du centre instantané; l'auteur introduit aussi un système de forces q liées simplement aux dérivées partielles p qui le conduisent à quelques propositions qui s'énoncent élégamment dans le langage de la Statique. Enfin il étudie quelques-unes des singularités les plus simples.

L^e cahier. — Tome XXXI, 1881.

Léauté (*H.*). — Théorie générale des transmissions par câbles métalliques. Règles pratiques. (1-198).

Les câbles métalliques destinés à transmettre le mouvement d'un arbre à un autre, lorsque la portée est trop forte pour permettre l'emploi des courroies, ont été imaginés, en 1856, par M. Hirn; depuis lors, ces transmissions sont entrées de plus en plus dans la pratique; M. Léauté cite les travaux suivants dont les câbles métalliques ont été l'objet: Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321; t. III, p. 271. Reuleaux, *Le Constructeur*, traduction Debize, p. 88. Achard, *Annales des Mines*, 7e série, t. VI, VII, VIII (*De la transmission et de la distribution des forces motrices à de grandes distances*). Vigreux, *Annales du Génie civil*, mars, avril, mai 1876; enfin les leçons de M. Callon à l'École des Mines.

Toutefois, jusqu'ici, les câbles télédynamiques n'ont pas été l'objet d'une étude rationnelle au point de vue pratique. Les règles admises pour les établir ne permettent pas d'obtenir, dans tous les cas, une transmission fonctionnant d'une manière satisfaisante. On se contente, en effet, de déterminer la section du câble à employer et le nombre de fils qui doivent le former, par cette double condition que le glissement sur les poulies ne puisse se produire et que le câble soit capable, *à l'état statique*, de résister à la tension qu'il supporte. Si l'on suppose, pour faire ce calcul, que la longueur de ce câble ne change pas et que la résistance à vaincre est constante.

Ces hypothèses s'éloignent de la réalité : les câbles, en effet, sont animés d'une vitesse considérable et la force centrifuge n'est pas négligeable; en outre, ils ne conservent pas, d'un moment à l'autre, la même longueur : ils sont très sensibles aux variations de température et surtout d'humidité; de plus, s'ils n'ont pas été préalablement étirés, ils subissent, par l'emploi, des allongements relativement considérables qui se continuent au fur et à mesure de leur service.

Enfin, l'effort à vaincre n'est jamais rigoureusement constant et ses variations acquièrent une grande importance, depuis que, l'emploi des câbles s'étant généralisé, on leur a fait commander directement des appareils isolés. Une transmission télédynamique, installée pour transmettre un effort donné, peut ne plus fonctionner du tout s'il se produit dans la résistance à vaincre des oscillations atteignant certaines limites.

Le problème à traiter consiste à rechercher de quelle manière un câble s'enroulant sur deux poulies transmet le mouvement de l'une à l'autre, dans le cas général d'une puissance et d'une résistance variables. Pour le résoudre, il faut trouver, en fonction des éléments de la transmission, la relation qui existe entre les efforts qu'exerce un câble à ses deux extrémités et le déplacement relatif qu'elles peuvent éprouver. Le rapport de l'accroissement de tension au déplacement relatif des extrémités joue un rôle capital; il doit être maintenu entre certaines limites et peut être pris comme le *coefficient* de régularité de la transmission.

« La méthode suivie dans ce travail », dit l'auteur, « est la suivante :

» Nous examinons, en premier lieu, le cas du mouvement permanent, c'est-à-dire celui où, la puissance étant constamment égale à la résistance, les poulies ont la même vitesse.

» C'est ensuite à ce mouvement idéal que nous rapportons le mouvement réel, de manière à mettre en évidence les variations de vitesse et de tension, éléments principaux à considérer.

» Nous obtenons de la sorte les équations qui lient ces deux éléments et nous pouvons ainsi déterminer le coefficient de régularité.

» Cette manière d'opérer nous conduit tout d'abord à étudier la forme prise par une corde inextensible en mouvement permanent, sous l'action de forces indépendantes du temps, et à montrer que cette forme est identique avec celle de l'équilibre au repos sous l'action des mêmes forces, ce qui constitue une généralisation d'un théorème dû à M. Resal. Elle nous amène ensuite à trouver les équations générales des petites oscillations de cette corde écartée de sa position de repos apparent et à prouver que, dans le cas où la figure permanente est plane, ce qui est le cas des câbles, les oscillations perpendiculaires au plan de la corde n'altèrent pas les tensions. Elle nous permet enfin de calculer les tensions moyennes développées aux extrémités d'une transmission télédynamique par un déplacement relatif des poulies et de montrer que le coefficient de régularité est proportionnel au poids du câble, à la portée et à la somme des inverses des cubes des deux flèches.

» Ces résultats une fois établis et l'importance de la considération des flèches mise ainsi en lumière, nous remarquons que, s'il y a intérêt, au point de vue de la régularité, à diminuer les flèches, il est nécessaire cependant de ne pas les réduire outre mesure, d'une part, afin d'éviter que, cette régularité étant trop grande, les variations du travail résistant ne donnent lieu à des secousses trop brusques et, d'autre part, afin que, sous l'influence des raccourcissements acci-

dentels que peut subir le câble, il ne se produise pas des efforts dangereux pour le mécanisme.

» Nous déterminons alors, en nous appuyant sur les résultats de l'expérience, les limites entre lesquelles il convient de maintenir la flèche relative au repos pour éviter ces divers inconvénients. Ces limites, une fois fixées, nous permettent de calculer un câble convenable dans un cas quelconque.

» Nous arrivons ainsi à former des Tableaux numériques fournissant, selon la valeur de la portée et du travail à transmettre, le poids du câble par mètre courant, le diamètre des fils qui le forment, celui des poulies à employer, Tableaux dans lesquels il a été tenu compte à la fois de tous les éléments du problème, c'est-à-dire : 1° des conditions de résistance et d'adhérence, ainsi que du mouvement propre du câble qui les modifie; 2° de la régularité relative au coefficient du fonctionnement que l'on veut atteindre; 3° des variations de longueur accidentelles ou permanentes auxquelles le câble est exposé. »

Poincaré. — Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires (199-253).

Le but de l'auteur est d'étendre aux formes homogènes de degré supérieur les belles recherches arithmétiques de M. Hermite relatives aux formes quadratiques. Ce premier Mémoire est consacré à l'étude algébrique des formes cubiques ternaires et quaternaires; l'étude des formes ternaires est faite d'une façon approfondie, les résultats obtenus s'étendent facilement, avec les indications de l'auteur, aux formes quaternaires et sont d'ailleurs susceptibles d'une généralisation plus large.

M. Poincaré classe comme il suit les substitutions et les formes :

Étant donnée une substitution

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix},$$

elle appartiendra à la première, à la deuxième, à la troisième ou à la quatrième catégorie, suivant les cas.

Si l'équation en λ obtenue en retranchant λ des éléments de la diagonale principale du Tableau précédent et égalant à zéro le déterminant ainsi formé a ses racines distinctes, ainsi que les $m^{ièmes}$ puissances de ses racines, T est de la première catégorie; si les racines sont distinctes, mais non les puissances $m^{ièmes}$, T est de la deuxième catégorie; T est de la troisième catégorie si les racines ne sont pas distinctes, mais si la substitution T peut être regardée comme une puissance entière d'une substitution de la première catégorie; enfin dans le cas qui reste, T est de la quatrième catégorie.

Si T appartient à l'une des trois premières catégories, il existe une substitution Σ, telle que la substitution

$$\Sigma^{-1} T \Sigma$$

soit canonique, c'est-à-dire ait tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale.

L'auteur traite ensuite la question suivante qu'il discute en détail pour les transformations ternaires : en donnant aux variables le sens de coordonnées



quels sont les points, les droites, les plans que reproduit la substitution T?

Les formes cubiques ternaires se divisent en sept familles;

Les quatre premières familles comprennent les formes non décomposables.

Les deux premières familles comprennent les formes à discriminant non nul; elles peuvent s'écrire

$$\alpha xyz + x^3 + y^3 + z^3,$$

ou être ramenées à cette forme par une substitution réelle.

Les formes de la première famille sont décomposables en une somme de trois cubes, les formes de la seconde famille ne le sont point.

Les formes de la troisième famille sont algébriquement équivalentes à l'une des formes

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3).$$

Les formes de la quatrième famille ont tous leurs invariants nuls; elles représentent des courbes à point de rebroussement; elles peuvent être ramenées par une substitution réelle à la forme

$$z^3 + xy^2.$$

Les formes de la cinquième famille représentent une conique et une droite non tangentes entre elles; elles sont algébriquement équivalentes à la forme

$$\beta z^3 + \alpha 6 xyz.$$

Les formes de la sixième famille représentent une conique et une droite tangentes entre elles; elles peuvent être ramenées, par une substitution réelle, au type

$$3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2.$$

Enfin la septième famille, étudiée déjà par M. Hermite, comprend les formes décomposables en facteurs linéaires.

Ajoutons que M. Poincaré est amené à considérer, dans les diverses catégories de substitutions, des sous-groupes plus particuliers; de même aussi certaines familles de formes doivent être décomposées, si l'on veut avoir un Tableau complet de formes *canoniques*, tel qu'une forme cubique ternaire quelconque à coefficients réels puisse être ramenée à l'une de ces formes canoniques au moyen d'une substitution réelle.

Ce Tableau formé, l'auteur calcule, pour chaque forme canonique, le discriminant et les invariants S et T d'Aronhold; il résout ensuite la question suivante : « Étant donnée une transformation linéaire, trouver les formes qu'elle reproduit. » Il construit le Tableau des formes cubiques binaires, ternaires et quaternaires reproduisibles par une transformation canonique réelle de la première catégorie, comme aussi le Tableau des formes cubiques quaternaires reproductibles par deux transformations canoniques; les problèmes analogues sont traités avec détail pour les diverses catégories de substitutions et les diverses familles de formes cubiques ternaires. Enfin M. Poincaré termine ce travail en étudiant la reproduction simultanée d'une forme cubique quaternaire au moyen de deux substitutions, de la première ou de la troisième catégorie, dont l'une est canonique; la possibilité de cette double reproduction entraîne la simultanéité de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, d'où l'on peut, par un mécanisme bien connu, déduire d'autres équations aux dérivées partielles qui doivent être vérifiées en même temps, et qui, d'ailleurs, fournissent de nouvelles transformations qui reproduisent la forme donnée.

Une discussion approfondie de ces équations conduit l'auteur au Tableau de formes cubiques quaternaires qui sont ainsi reproductibles par deux transformations. Le problème analogue, pour les formes cubiques ternaires, se résout aisément au moyen de quelques considérations géométriques.

IIe Cahier. — Tome XXXII, 1881.

Jordan (C.). — Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques. (1-43).

M. Jordan traite les deux questions suivantes :

1° Étant données deux formes quadratiques F et G à n variables et à coefficients entiers complexes de la forme $a + bi$, reconnaître si F contient G, et déterminer, s'il y a lieu, les substitutions à coefficients entiers qui transforment F en G.

2° Trouver les représentations d'un entier complexe, ou plus généralement d'une forme G à moins de n variables, par une forme F à n variables.

Le premier problème a été traité par M. Hermite pour les formes ternaires à coefficients réels; c'est d'ailleurs en s'appuyant sur les résultats obtenus par M. Hermite et en les complétant au besoin que M. Jordan parvient à la solution complète.

L'auteur montre tout d'abord que le problème de la transformation d'une forme quadratique en une autre se ramène au cas où la substitution transformante a l'unité pour déterminant. La solution du problème dépend alors de la considération des formes bilinéaires de M. Hermite :

$$\varphi = \mathrm{N}(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + \mathrm{N}(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n)$$

où $\mathrm{N}(x)$ désigne la norme de x.

M. Jordan rappelle sous quelles conditions une telle forme φ est réduite et l'étude qu'il a faite lui-même de ces formes et de leurs transformations (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVIIIe Cahier).

Une substitution *réduite* est telle que la forme φ correspondante soit elle-même réduite; enfin une forme G est réduite par rapport à une autre forme F, si l'on a

$$\mathrm{FS} = \mathrm{G},$$

S étant une substitution réduite; M. Jordan est amené à distinguer deux espèces de formes G réduites par rapport à la forme F : les unes, les réduites ordinaires, ont leurs coefficients limités : elles sont donc en nombre fini; les autres, les réduites singulières, sont en nombre illimité; toutefois elles sont équivalentes à des formes à coefficients limités. Comme conclusion de cette discussion, on parvient à ce théorème :

Les formes de discriminants Δ et à coefficients entiers se répartissent en un nombre de classes limité.

L'auteur établit ensuite que toute substitution de déterminant 1 et à coefficients entiers qui transforme F en G est un produit de substitutions partielles de déterminant 1, à coefficients entiers et limités, dont la première transforme F en G, chacune des suivantes transformant G en elle-même.

Relativement au second problème, la représentation d'une forme quadratique F à moins de n variables par une forme f à n variables, M. Jordan montre



qu'il se ramène au problème de l'équivalence des formes et de leurs transformations en elles-mêmes; il apprend à former un système de réduites R, à coefficients limités, équivalentes à F; il faut que f contienne une de ces réduites; s'il en est ainsi, on pourra former les transformations de f en ces diverses réduites : à chacune de ces transformations correspondra une représentation de F par f. Enfin M. Jordan termine en montrant comment on peut faire rentrer dans son analyse les formes de discriminant nul.

Poincaré (*H.*). — Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. (46-91).

Dans le Mémoire, publié sous le même titre dont nous avons précédemment rendu compte, M. Poincaré avait complètement préparé l'étude arithmétique des formes cubiques ternaires; c'est cette étude qu'il fait dans le Mémoire actuel où il résout les trois questions suivantes : 1° reconnaître si deux formes données sont équivalentes; 2° distribuer les formes en classes, en genres et en ordres; 3° trouver les transformations à coefficients entiers qui reproduisent une forme donnée.

La méthode suivie par l'auteur appartient à M. Hermite. Pour que deux formes soit arithmétiquement équivalentes, il faut d'abord qu'elles soient algébriquement équivalentes; si F et F' sont deux formes telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution réelle pour reconnaître si elles sont arithmétiquement équivalentes, il est nécessaire de définir des formes *réduites* qui jouent, par rapport aux formes F et F', le rôle des réduites par rapport aux formes quadratiques.

Admettant la notion de formes quadratiques réduites et, en particulier, la définition donnée par MM. Korkine et Zolotaref (*Mathematische Annalen*, t. VI), on en tire la notion de substitution réduite; puis, les formes réduites dérivées de la forme canonique H seront celles que l'on peut tirer de H par une substitution réduite.

On peut trouver toutes les formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme F qui est elle-même réellement équivalente à la canonique H. Si H n'est pas reproductible par aucune substitution, il y aura, en général, une seule forme équivalente à F; si H est reproductible par différentes substitutions, il y aura un nombre fini ou infini de réduites équivalentes F. Pour que deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que le système des réduites de l'une soit identique au système des réduites de l'autre; enfin la même méthode permet de trouver toutes les substitutions entières qui reproduisent F.

Avant d'appliquer cette méthode aux différents cas qui peuvent se présenter, M. Poincaré établit une proposition importante due à M. Jordan (*Comptes rendus*, 5 mai 1879), à savoir que les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre limité de classes, pourvu que le discriminant ne soit pas nul. Il passe ensuite à l'examen des différentes familles de formes cubiques ternaires. Les résultats sont très différents suivant les cas; ainsi, dans la première et la deuxième famille, il y a un nombre fini de réduites, un nombre fini de classes et, en général, une seule réduite par chaque classe; dans la quatrième famille, il y a un nombre infini de classes; chaque classe contient une réduite principale et un nombre fini de réduites secondaires, se disposant en une chaîne limitée de réduites contiguës. La cinquième famille, avec des points doubles imaginaires, donne un nombre fini de classes; chacune contient un nombre fini de réduites formant une chaîne in-

définie où elles se reproduisent périodiquement, comme dans le cas des formes quadratiques, binaires, indéfinies, etc.

Autonne (*L.*). — Recherche sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (93-176).

On doit à M. Jordan le théorème suivant obtenu précédemment par M. Fuchs dans le second ordre : « Si une équation différentielle linéaire d'ordre p a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'expriment linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de la variable et des racines d'une équation auxiliaire $\chi = 0$; le degré de $\chi = 0$ est inférieur à une limite fixe, qui ne dépend que de la valeur numérique de p. »

Ceci rappelé, voici le problème que M. Autonne se propose de résoudre : « Une équation différentielle linéaire Y, dit-il, d'ordre p et à coefficients rationnels, admet un système fondamental d'intégrales dont tous les termes sont des racines d'une équation algébrique irréductible H de degré $m = p + n$ et à coefficients rationnels. Puisque toutes les m racines de H sont des intégrales de Y et que Y ne peut avoir plus de p intégrales linéairement indépendantes, il existe entre les m racines n équations linéaires, homogènes, à coefficients constants. Je me propose d'étudier les conséquences qu'entraîne, tant pour la forme de l'équation algébrique H que pour la nature des intégrales de Y, l'existence de ce système de n équations linéaires, homogènes, à coefficients constants.

» Ce travail se divise en quatre Parties ;

» Dans la première, j'examine le cas où $n = 1$. Si le degré m est un nombre premier et si le coefficient du terme de degré $m - 1$ dans l'équation H n'est pas nul, l'équation est abélienne et toutes les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de l'une quelconque d'entre elles. L'équation différentielle Y possède un système fondamental d'intégrales dont l'une est rationnelle et les $p - 1 = m - 2$ autres racines $m^{\text{ièmes}}$ de fonctions rationnelles. Dans ce cas, l'équation auxiliaire $\chi = 0$, de M. Jordan, est du premier degré.

» Dans la deuxième Partie, j'étudie le cas de $n = 2$. Si m est un nombre premier et si le terme du degré $m - 1$ ne manque pas dans l'équation H, H peut encore être une équation abélienne et l'équation différentielle admet un système fondamental pareil à celui qui a été défini dans la première Partie. Mais, de plus, H peut être telle que toutes les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de deux d'entre elles. L'équation différentielle admet alors un système fondamental, dont une intégrale est rationnelle et dont les $p - 1 = m - 3$ autres sont de la forme $\sqrt[m]{\psi(u)}$, où ψ désigne une fonction rationnelle de la variable et d'une racine u d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

» L'équation auxiliaire $\chi = 0$ de M. Jordan est du second degré, et les diverses équations binômes sont toutes du degré m.

» La troisième Partie traite du cas $n = 3$. Le degré m est encore un nombre premier et le terme du degré $m - 1$ existe dans l'équation H. Après avoir donné un certain nombre de propositions générales, je suis forcé, pour traiter complètement la question, de me restreindre aux degrés premiers inférieurs à 20. J'énonce, dans ce dernier cas, deux théorèmes :

» 1° Si $p - 1 = m - 4$ est un multiple de 3, l'équation H est telle que toutes

les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de deux quelconques d'entre elles. L'équation différentielle possède un système fondamental dont une intégrale est rationnelle et les $p - 1 = m - 4$ autres sont de le forme $\sqrt[m]{\psi(u,x)}$, où ψ désigne une fonction rationnelle, x la variable, u une racine d'une équation abélienne du troisième degré à coefficients rationnels. »

» L'équation auxiliaire de M. Jordan est une équation abélienne du troisième degré.

» Si $p - 1 = m - n$ n'est pas un multiple de 3, les résultats ne diffèrent en rien de ceux de la première Partie.

» Dans la quatrième Partie, je me borne à indiquer la marche à suivre, si l'on voulait réellement appliquer la méthode à l'intégration d'une équation différentielle donnée. »

Mathieu (É.). — Mémoire sur le mouvement vibratoire des cloches. (177-247).

L'auteur établit d'abord la théorie du mouvement vibratoire des lames courbes.

Relativement aux cloches, il suppose l'épaisseur variable, le long d'un même méridien.

Dans une cloche, contrairement à ce qui a lieu pour les plaques planes, le mouvement tangentiel et le mouvement normal sont fournis par trois équations non indépendantes. La hauteur des sons d'une cloche ne varie pas quand son épaisseur varie partout dans un même rapport.

On ne peut pas choisir le méridien et la variation de l'épaisseur de façon qu'une cloche ne vibre que normalement.

Étant donnée une cloche, on peut, en frottant le bord, développer un mouvement vibratoire tournant que l'auteur apprend à calculer.

Il n'y a que les cloches sphériques d'épaisseur constante auxquelles on puisse communiquer un mouvement vibratoire purement tangentiel, sans être tournant.

M. Mathieu intègre les équations différentielles du mouvement vibratoire le plus général d'une cloche sphérique, équations qui sont fort compliquées.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE ([1]). — 3e série.

Tome I; 1882, 2e semestre.

Resal (H.). — Sur la courbe synchrone de la cycloïde. (289-295).

La courbe synchrone de cycloïdes ayant leurs bases horizontales et un point de départ commun est représentée par une équation très compliquée; cette courbe est une trajectoire orthogonale des cycloïdes; c'est cette dernière pro-

---

([1]) Voir *Bulletin*, VII_2, 18.

priété que M. Resal établit en partie par le calcul, en partie géométriquement; il donne aussi de nombreuses propriétés de la courbe. Bernoulli (*Acta Erud.*, 1697) et Euler (*Mech.*, t. II) se sont aussi occupés de ce problème.

Halphen. — Sur la théorie du déplacement. (296-299).

Trois positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.

Chaque axe de symétrie est la perpendiculaire commune aux axes de deux des déplacements hélicoïdaux qui amènent les figures données les unes sur les autres.

Ces propositions généralisent un théorème intéressant de M. C. Stephanos sur le déplacement des figures planes (*Bulletin de la Soc. Philom.*, VI_7, 13).

Liguine (V.). — Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point. (300-306).

Nouvelle démonstration d'une propriété due à M. d'Ocagne (*Nouv. Ann.*, même Tome, p. 44). M. Liguine considère la courbe qui décrit l'extrémité V de la vitesse, dans le mouvement d'un point, et il applique à cette étude la notion si féconde des quantités géométriques. Rapprocher de cette Note les travaux si remarquables de Sourof sur les questions de Cinématique.

De Saint-Germain (A.). — Sur les équations de l'équilibre astatique. (306-311).

L'auteur ramène le cas général à celui des forces parallèles; et cette réduction lui fournit un moyen des plus faciles pour obtenir les douze équations de l'équilibre astatique.

Orlof (G.). — Sur une intégrale double. (311-318).

Il s'agit de l'intégrale double suivante, étudiée par Didon (*Ann. de l'École Norm. sup.*, t. VII, 1870) :

$$\iint (1 - x^2 - y^2)^{\frac{\mu}{2}-1} (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{\mu}{2}} dx\, dy.$$

Si $x^2 + y^2 \leq$, si $a < 1$, $b < 1$, et si μ est un entier positif, la valeur de l'intégrale ne dépend que de ab. L'auteur étend cette propriété au cas de μ fractionnaire positif; il donne quelques autres résultats intéressants.

Brassinne (E.). — Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal. (318-319).

Extension à des polygones de $2n$ côtés, circonscrits ou inscrits à une conique.

Brassinne (E.). — Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier. (320-321).

Démonstration intéressante, mais qui nous semble plus nouvelle dans la forme que dans le fond.

Hoffmann (*F.*). — Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques. (321-324).

Voici l'énoncé de la propriété dont il s'agit : Soient trois droites A, B, C, un point S et une conique K_3, de foyer S, et touchant A, B, en α_3, β_3; si D est une tangente mobile à K_3 et si K_1, K_2 sont des coniques, de foyer S, telles que

$$K_1 \text{ touche } B, C, D \text{ en } \beta_1, \gamma_1, \delta_1,$$
$$K_2 \text{ touche } A, C, D \text{ en } \alpha_2, \gamma_2\, \delta_2,$$

la distance $\delta_1 \delta_2$ est toujours vue sous le même angle du point S.

Rouché (*E.*). — Sur la méthode des isopérimètres. (325-329).

L'auteur, tirant parti de deux propriétés nouvelles des apothèmes et des rayons, dues à M. Désiré André, perfectionna notablement la méthode des isopérimètres. Au lieu de prendre a_k et r_k, dans la suite de Schwab,

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ \ldots$$

pour valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, il prend $r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k)$, $a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1})$. L'avantage qui en résulte est considérable.

Correspondance. — *G. Barrone :* Les perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés $a, a', \ldots$ d'un polygone plan déterminant les segments $p, p_1, p', p'_1, \ldots$, on a

$$ap + a'p' + \ldots = ap_1 + a'p'_1 + \ldots.$$

— *P.-V. Schaewen :* Propriété du quadrilatère inscriptible et circonscriptible à un cercle. — *J.-B. Pomey :* Sur l'aire d'une certaine roulette. (330-332).

Bibliographie. — Introduction à la méthode des Quaternions, par C.-A. Laisant, député, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique; Paris, 1881, 1 vol. in-8°. Compte rendu par M. *H. Brocard.* (332-335).

Questions proposées. — **1404** à **1410**. (335-336).

Resal (*H.*). — Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule. (337-343).

Dans cette étude, l'auteur, comme il l'annonce lui-même, a cherché à pousser plus loin l'approximation qu'on ne le fait d'habitude, et à tenir compte de la composante de la rotation de la Terre, estimée suivant le rayon parallèle à la méridienne.

Realis (*S.*). — Sur quelques intégrales indéfinies. (343-351).

Conséquences, obtenues par voie de substitution, au moyen de la formule

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \text{arc tang}\, y + \text{const.}$$

Parmi les intégrales qu'obtient ainsi M. Realis, il est intéressant de ... les suivantes :

$$\int \frac{(qn+1)x \mp 1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x\pm 1)(x^2-1)^n - 1}}, \quad \int \frac{(n+2)x \mp n}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x\pm 1)^n - \dots}}$$

$$\int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4}}.$$

On intègre donc par les procédés ordinaires des expressions qui sembleraient au premier abord rentrer dans les intégrales elliptiques.

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1882. Solution géométrique. (351-356).

Propriétés d'une conique passant par les points d'intersections de deux circonférences et tangentes à ces circonférences.

Moret-Blanc. — Démonstration des propositions de M. Lionnet, énoncées t. XX_2, p. 514. (357-365).

Sur les nombres triangulaires 1 et 10; propriétés des nombres 1 et 5; sur les propriétés de plusieurs nombres impairs consécutifs.

Concours d'admission à l'École Centrale en 1881; seconde session. — Géométrie analytique; Trigonométrie; Physique et Chimie; Épure. (365-368).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1367**. (368-371).

Propriétés d'équations algébriques.

Pisani (*F.*). — Solution de la question **1368**. (371-373).

Formules relatives aux projections de trois points sur un certain plan.

Choudadov. — Solution de la question **1375**. (374-376).

Volumes engendrés par certaines figures tournantes.

Borletti (*F.*). — Solution de la question **1377**. (376-377).

Intégration de

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

et de

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}}.$$

Borletti (*F.*). — Solution de la question **1379**. (377-379).

Propriété du triangle ayant pour côtés 15, 26, 37.

Leblond (*A.*). — Solution de la question **1380**. (379-380).

Sur une tangente commune à deux circonférences qui se coupent.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1386**. (380-381).

Propriété de l'hyperbole équilatère.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1397**. (382).

Sur une conique inscrite dans un triangle.

Questions proposées. — **1411** à **1417**. (382-384).

Mannheim (*A.*). — Premiers éléments de la Géométrie descriptive. (385-400, 433-450).

Excellente introduction à l'étude de la Géométrie descriptive, dans laquelle l'auteur a introduit les modifications qui lui ont été suggérées par une longue pratique de l'enseignement.

Avant d'essayer une analyse sommaire de ces deux articles, indiquons les divisions principales :

Lignes droites et plans en projections orthogonales. — Représentations d'un corps en projections orthogonales. — Problèmes descriptifs. — Problèmes métriques.

La modification essentielle qu'introduit M. Mannheim consiste dans la suppression de la ligne de terre. Il n'y a plus ainsi de points derrière le plan vertical ni au-dessous du plan horizontal. Une épure n'est plus considérée comme résultant nécessairement du rabattement du plan vertical. C'est tout aussi bien le plan horizontal qu'on peut supposer rabattu sur un tableau vertical.

Les problèmes élémentaires ne sont pas compliqués par cette modification; et l'exposé de ces problèmes est éclairci par des applications pratiques dont le choix est très heureux. Il serait à désirer que cette nouvelle méthode d'enseignement vînt à prendre faveur. M. Charles Brisse, de son côté, en avait, paraît-il, pris l'initiative dans son *Cours*, publié en novembre 1881.

Walecki. — Équation en s de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés. (401-409, 556-560).

Étude intéressante sur la généralisation de l'équation en s qu'on rencontre dans la théorie des surfaces du second ordre. Soient : D_1 un déterminant de degré m, à éléments réels, et symétrique; D ce qu'il devient quand on diminue de S_4 les éléments de sa diagonale principale. L'équation $D = 0$ est celle qu'examine M. Walecki, et il en donne de nombreuses propriétés.

Ley (*H.*). — Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1881; solution de la question proposée. (410-413).

Section elliptique d'un cône de révolution.



Ce très intéressant article débute par le lemme suivant, q
dent, mais qui n'a cependant pas, à notre connaissance, ét
on a

$$\int_{\mu}^{\mu_1} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\mu_1} f(\mu + \mu_1 - x)\,dx,$$

l'intégrale étant finie et déterminée.

En partant de cette très simple remarque, M. Marchand a
rieuse généralisation des formules de Maclaurin et de Taylo

L'auteur donne en outre la forme du reste R_n^a. Il étend ensuite ces formules au cas de plusieurs variables indépendantes.

Habich (*E.*). — Théorème de Cinématique. (458-462).

Ce théorème est relatif au mouvement d'une figure plane dans son plan.

Antomari (*X.*). — Relation entre les distances mutuelles : 1° de quatre points situés sur un même cercle ; 2° de cinq points situés sur une même sphère. (462-464).

Démonstration nouvelle de ces relations, données dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse.

Compositions données aux examens de licence dans les différentes Facultés de France, en 1880. Énoncés des Facultés de Bordeaux, Caen, Grenoble, Lyon, Montpellier, Nancy, Toulouse, Rennes, Clermont, Lille. (465-472, 516-519).

Correspondance : M. *H. Faure :* à propos de la question 1414 et d'une propriété de deux sphères. (472-473).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1337. (473-475).

Problème sur la cissoïde.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1404. (475-476).

$At^3 + Bu^3 + C$ peut toujours être rendu divisible par 7, A, B, C étant entiers, positifs ou négatifs, et non divisibles par 7.

Lionnet. — Solution de la question 1408. (476-478).

Problème sur la partition des nombres.

Bénezech (*E.*). — Solution de la question 1409. (478-479).

Problème sur le triangle isoscèle.

Questions proposées. — 1423 à 1426. (479-480).

Resal (*H.*). — Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate. (481-490).

Après avoir sommairement rappelé les propriétés géométriques principales de la lemniscate, l'auteur démontre par l'analyse le théorème de Saladini, et celui de M. O. Bonnet. Il donne aussi une démonstration géométrique de ce dernier théorème.

Collignon (*E.*). — Note sur la résolution, au moyen de ta-

bleaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie. (490-508).

Ce très intéressant article fait suite, en quelque sorte, à une Note précédente, publiée dans le même Recueil, sur un Tableau graphique donnant les heures du lever et du coucher du Soleil. Ici, l'auteur montre comment ce Tableau peut fournir l'heure du passage du Soleil dans le plan vertical est-ouest, et comment on peut tenir compte de la durée du crépuscule. Ce travail porte l'empreinte de la netteté et de l'originalité qui caractérisent l'esprit de M. Collignon.

Gambey. — Solution d'une question de Mécanique proposée au Concours d'agrégation en 1879. (508-515).

Mouvement d'un point pesant sur la surface d'un cône vertical de révolution, ce point étant attiré par le sommet.

CORRESPONDANCE. — *H. Resal:* Sur la chaînette. (515-516).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1882. — Mathématiques spéciales; énoncé de la Composition. (519).

Catalan (*E.*). — Notes diverses. (519-521).

Isopérimètres; propriétés des nombres; propriété du pentagone inscrit.

UN ANONYME. — Solution de la question **1412**. (522-523).

Propriété du triangle.

UN ANONYME. — Solution de la question **1414**. (523-526).

Sur deux circonférences dans deux plans rectangulaires.

H.-B. D. — Solution de la question **1415**. (526-527).

Intégration de $\int \frac{2x+3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp (2x+\beta)^2}}$.

QUESTIONS PROPOSÉES. — **1427** à **1429**. (527-528).

Biehler (*C.*). — Sur l'élimination. (529-542).

Ce Mémoire renferme d'assez nombreuses propositions, dans lesquelles il est fait grand usage des déterminants.

Laguerre. — Transformation par semi-droites réciproques. (542-556).

M. Laguerre donne ici un intéressant résumé et des applications de sa théorie des *cycles;* un cycle est une circonférence parcourue dans un sens déterminé. Une *semi-droite* est la figure décrite sur une droite par un point mobile, également dans un sens déterminé. Après avoir établi quelques propriétés générales, l'auteur étudie cette transformation spéciale qu'il appelle *par semi-droites réciproques,* et qui donne naissance à d'assez curieuses applications.

Laquière. — Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore. (561-565).

Ces élégantes constructions sont obtenues par M. Laquière en considérant le tore comme l'enveloppe d'une sphère de rayon constant.

A. L.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (¹).

6ᵉ série. — Tome V. — 1ᵉʳ semestre 1883.

Fortet (D.). — Calcul et tracé des panneaux des voûtes biaises. (26-33; 1 pl.).

Description d'une méthode permettant d'obtenir facilement les panneaux des voussoirs d'une voûte biaise. On ne s'occupe que des appareils ayant leurs lits engendrés par des droites parallèles aux têtes.

Les quatre relations trigonométriques obtenues s'appliquent à tous les appareils de ce genre, et notamment à l'appareil hélicoïdal et à l'appareil orthogonal, avec de grandes simplifications dans ce dernier cas.

La détermination des angles qui résulteraient de ces relations peut se faire très commodément au moyen de constructions graphiques.

Les rayons de courbure possèdent également des relations très simples avec les lignes trigonométriques des angles considérés.

Bazaine. — Influence des irrigations sur l'altitude d'une nappe souterraine. (34-60; 3 fig., 1 pl.).

La Ville de Paris s'est trouvée engagée, pendant plusieurs années, dans une série de procès pour dommages de diverses natures attribués aux irrigations de la plaine de Gennevilliers au moyen des eaux d'égout, procès dans lesquels certains réclamants ont demandé des indemnités considérables. D'autre part, de nombreux et importants projets d'irrigation sont aujourd'hui à l'étude, et les circonstances qui se sont produites à Gennevilliers se présenteront très probablement dans plusieurs localités placées dans des conditions analogues. Bien qu'il soit fort difficile de déterminer d'une manière exacte la part incombant aux irrigations dans la surélévation d'une nappe souterraine, il peut néanmoins être utile d'établir certaines bases bien précises, susceptibles d'éclairer la pratique ou la réglementation des arrosages, et de guider, en cas de procès, les experts chargés d'apprécier les réclamations produites.

L'auteur divise son étude en trois Parties :

1° Théorie mathématique de quelques cas particuliers du mouvement des eaux à travers un sol perméable. Mouvement vertical de filtration; mouvement de l'eau après qu'elle a remonté une surface imperméable sensiblement horizontale. Mouvement parabolique de la masse.

2° Application de cette théorie à quelques exemples, tirés de la pratique des irrigations à Gennevilliers. Détermination des données.

tion.

Lagrené (H. de). — Mesure des vitesses et des (
cours d'eau rapide et profond. (219-246; 12 fig.,

Description des procédés et des appareils employés pour m
du moulinet, les vitesses de l'Elbe, du Danube et d'autres c
tants de l'Autriche. Analyse abrégée de l'Ouvrage publié
M. Harlacher, professeur à l'École Polytechnique de Prague et
hydrométriques de la Bohême.

Resal. — Effets des charges roulantes sur les pont
(277-299).

Dans un premier Mémoire (voir *Bulletin*, VII_2, p. 116), l'aut
formule permettant de déterminer l'effet d'une charge roula
métallique. Cette formule, qui repose sur plusieurs hypothè
admissibles, lui a paru, malgré l'incertitude de son point de (
assez bien aux divers faits d'expériences. Les conséquences qu
des calculs fort simples, dans ce nouveau travail, pourront êtr
mises au contrôle expérimental, afin de décider le degré de
méritent.

Guibal. — Marche des bateaux à vapeur en courl
1 pl.).

L'auteur a été conduit à étudier cette question avec assez d
des formes et des dimensions exceptionnelles des bateaux à va
fréquenter un canal de grande navigation du Rhône au port
teaux, que l'on ne rencontre guère que sur le Rhône et la S
mieux être définis qu'en les comparant à de longues aiguille
de longueur pour lesquelles les canaux ordinaires, tels qu'il
seraient pas accessibles.

Durand-Claye (L.). — Sur l'évaluation des surface
de remblai. (402-404; 2 fig.).

Les expériences sur la portée des sons ne sont pas nombreuses et offrent certaines difficultés. Les expériences discutées dans ce Mémoire ont été faites en 1861-1862 à Boulogne-sur-Mer; à Douvres, en 1873; aux environs de New-York, en 1874-1875, et à l'embouchure de l'Elbe, en 1880. Elles ont porté sur des cloches, des trompettes et des sifflets à vapeur et sur des cornets de brouillard.

Influence du vent sur la portée. Formule de la portée des sons. Conséquences de cette formule. Travail nécessaire pour obtenir différentes portées.

Caractères des signaux sonores. Signaux à un ou deux sons égaux ou inégaux.

Lavollée. — Ouvrages mobiles des barrages de la haute Seine. (622-649; 2 fig., 2 pl.).

Résistance et stabilité des mécanismes. Vannes-pavillons. H. B.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

N° 14; 2 octobre.

Dumas. — Passage de Vénus sur le Soleil. (573).

Resal. — Sur le choc des corps imparfaitement élastiques. (578).

Perte de force vive résultant du choc de deux corps, considéré au point de vue le plus général. De l'effet d'un coup de queue horizontal sur une bille de billard.

S. M. l'Empereur du Brésil. — Dépêche relative à une comète observée par M. *Cruls* à l'Observatoire de Rio de Janeiro. (593).

André (*C.*). — Observations des comètes Barnard et Common (1882) à l'Observatoire de Lyon. (593).

Picard (*E.*). — Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. (594).

M. Poincaré a établi que toute fonction fuchsienne pouvait être obtenue par l'inversion du quotient de deux intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques.

M. Picard a montré dans une Communication précédente comment ce point de vue pouvait être étendu au cas de deux variables; si l'on considère les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles

$$s = ap + bq + cz, \quad r = a_1 p + b_1 q + c_1 z,$$

(¹) Voir *Bulletin*, VII₂, 94.

où les coefficients sont fonctions algébriques des variables x et y, si l'on suppose que ces équations aient trois solutions communes ω_1, ω_2, ω_3, linéairement indépendantes, si enfin les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et de v, on sera parvenu à des fonctions de deux variables entièrement analogues aux fonctions fuchsiennes.

Ces circonstances se présentent pour les équations

$$3(x-y)s = p - q,$$
$$qx(x-1)(x-y)r + (5x^2 - 4xy - 3x - 2y)3p$$
$$+ 3y(1-y)q - (x-y)z = 0,$$

qui admettent les trois solutions communes, linéairement indépendantes,

$$\int_0^g \frac{du}{v},$$

où

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y),$$

g désignant successivement x, y et l'unité; M. Picard développe cet exemple et parvient ainsi à des fonctions uniformes de deux variables indépendantes, définies seulement pour des valeurs de ces variables qui satisfont à une condition d'inégalité et qui se reproduisent pour un groupe de substitutions linéaires. Se plaçant ensuite à un point de vue différent, il considère le groupe

$$(1) \qquad \left(u, v, \frac{A_3 + B_3 v + C_3 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u}, \frac{A_2 + B_2 v + C_2 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u}\right),$$

où les A, B, C satisfont aux relations

$$C_1 \gamma_2 + C_2 \gamma_1 + C_3 \gamma_3 = A_1 \beta_2 + A_2 \beta_1 + A_3 \beta_3 = 1,$$
$$A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1 + A_3 \alpha_3 = 0,$$
$$B_1 \beta_2 + B_2 \beta_1 + B_3 \beta_3 = 0,$$
$$C_1 \alpha_2 + C_2 \alpha_1 + C_3 \alpha_3 = 0,$$
$$C_1 \beta_2 + C_2 \beta_1 + C_3 \beta_3 = 0,$$

les lettres grecques étant les conjuguées des grandes lettres correspondantes et les A, B, C étant des entiers complexes formés avec les racines cubiques de l'unité; M. Picard a déjà étudié ce groupe au point de vue arithmétique; si l'on fait

$$u = \frac{U}{V+1}, \quad v = \frac{1}{2}\frac{V-1}{V+1},$$

au groupe (1) correspond le groupe

$$(2) \qquad \left(U, V, \frac{M_3 + P_3 V + R_3 U}{M_1 + P_1 V + R_1 U}, \frac{M_2 + P_2 V + R_2 U}{M_1 + P_1 V + R_1 U}\right).$$

Soit maintenant H(U, V) une fonction rationnelle de U et V restant continue pour tout système de valeurs de U et V telles que la somme des carrés de leurs

modules soit inférieure à 1, la série

$$\sum H\left(\frac{M_3+P_3V+R_3U}{M_1+P_1V+R_1U}, \frac{M_2+P_2V+R_2U}{M_1+P_1V+R_1U}\right)\frac{1}{(M_1+P_1V+R_1U)^{3m}},$$

où m est un entier supérieur à deux, étendue à toutes les substitutions du groupe (2), est convergente et représente une fonction uniforme et continue de U et V définie seulement pour les valeurs de U et V qui satisfont à la condition précédemment énoncée.

Cette fonction jouit de la propriété

$$F\left(\frac{M_3+P_3V+R_3U}{M_1+P_1V+R_1U}, \frac{M_2+P_2V+R_2U}{M_1+P_1V+R_1U}\right)$$
$$= (M_1+P_1V+R_1U)^{3m}F(U, V);$$

ainsi le quotient de deux telles fonctions restera inaltéré par les substitutions du groupe (2).

N° 15; 9 octobre.

Dumas. — Résultats des travaux du Comité international des Poids et Mesures, pendant sa session de 1882. (611).

Faye. — Sur une nouvelle théorie du Soleil, par M. *C.-W. Siemens*. (612).

Resal. — Du choc de deux sphères en ayant égard à leur degré d'élasticité et au frottement développé au contact. (615).

Borrelly. — Observations de la grande comète Cruls, faites à l'Observatoire de Marseille. (624).

Appell. — Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique. (624).

Soit $F(x,y)=0$ une équation algébrique entre x et y et $Z(\xi,\eta)$ l'intégrale abélienne normale de seconde espèce qui a pour pôle le point analytique (ξ,η). Considérons la surface de Riemann correspondante et, sur l'un des feuillets, traçons une courbe fermée limite complète C qui ne comprenne dans son intérieur aucun point de ramification. La surface de Riemann est de cette façon séparée en deux parties : la première constituée par les points intérieurs, la seconde par les points extérieurs à cette courbe.

Soit $f(x,y)$ une fonction du point analytique (x,y) uniforme à l'extérieur de la courbe C et régulière en tous les points de la surface de Riemann situés en dehors de cette courbe.

Soient (x,y), (x_0,y_0) deux points analytiques situés en dehors de la courbe C, le point (x_0,y_0) étant la limite inférieure de l'intégrale $Z(\xi,\eta)$: on a la relation fondamentale

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C Z(\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Si la courbe (C) est un cercle dont le centre se trouve au point analytique (a, b), on aura

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu)}(a, b);$$

$Z^\nu(a, b)$ étant ce que devient

$$\frac{d^\nu Z(\xi, \eta)}{d\xi^\nu},$$

pour $\xi = a$, $\eta = b$, et les A étant indépendants de x, y.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (626).

M. Poincaré, dans l'étude des fonctions fuchsiennes, a eu à considérer des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \theta(z),$$

où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle, où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i + \delta_i}\right)$ sont les différentes substitutions du groupe fuchsien considéré et où m est un entier plus grand que 1. Le quotient de deux telles séries, pour une même valeur de m, est une fonction fuchsienne, ainsi que l'a prouvé l'auteur; il démontre dans la Communication dont nous rendons compte que toute fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental peut être, et d'une infinité de façons, regardée comme le quotient de deux séries (1); pour cela, après avoir rappelé que toute série (1) pouvait être mise sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y),$$

où x et y sont deux fonctions fuchsiennes ayant le groupe considéré, liées par une équation algébrique et où $F(x, y)$ désigne une fonction rationnelle, il examine sous quelles conditions une expression de la forme (2) peut être mise sous la forme (1).

Halphen. — Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. (629).

Il s'agit de la série

$$(1) \qquad A_1 + A_2 P_1\left(\frac{x}{2\beta}\right) + \dots + A_n P_{n-1}\left(\frac{x}{n\beta}\right) + \dots,$$

où

$$P_n(x) = \frac{e^x}{1.2\dots n} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

où β est une arbitraire, où enfin les A sont indépendants de x; pour que cette série représente $f(x)$, on devra prendre

$$(2) \qquad A_n = \frac{1}{1.2\dots n}\int_0^\infty f(n\beta x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\,dx;$$

il faut et il suffit alors qu'il existe des nombres α rendant infiniment petit le produit $1.2.3\dots m\,\alpha^n f^{(m)}(x)$ pour m infiniment grand; si α peut être pris au

delà de toute limite, β est arbitraire; sinon, β doit être pris entre certaines limites : la série (1), où les A sont définis par l'égalité (2), présente cette singularité qu'elle est très fréquemment convergente sans représenter $f(x)$.

N° 16; 16 octobre.

Resal. — Du choc de deux billes posées sur un tapis de billard. (635).

Examen des circonstances qu'entraîne la différence des diamètres et des masses des billes, ainsi que leur hétérogénéité.

Faye. — Sur le Catalogue des six cents tornados observés aux États-Unis dans le cours de ce siècle. (660).

Brioschi. — Sur les fonctions de sept lettres. (665).

M. Kronecker et M. Hermite ont mis en évidence l'existence de fonctions de sept lettres ayant seulement trente valeurs. Dans deux Communications successives M. Brioschi étudie ces fonctions; il les met sous la forme d'une somme de huit quantités qui, dans un cas particulier, sont les racines d'une équation du huitième degré, résoluble par les fonctions elliptiques.

Cruls. — Missions brésiliennes pour l'observation du passage de Vénus. (674).

Faye. — Observations relatives à la Communication précédente. (675).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète 1812 (Pons) et sur son prochain retour. (675).

Stephanos. — Sur les propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués. (677).

Deux systèmes de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 forment deux quadrangles conjugués, lorsque, de quelque manière qu'on les place sur un même plan, sans changement de leurs dimensions respectives, leurs points correspondants (A_i, B_i) constituent quatre couples de points conjugués par rapport à un cercle; chacun des angles $\widehat{A_i A_j A_k}$ mesuré dans un sens déterminé est égal, à un multiple près de π, à l'angle $\widehat{B_i B_j B_k}$.

On peut déterminer une droite telle que la figure symétrique du second quadrangle par rapport à cette droite ait ses côtés respectivement parallèles aux côtés du premier quadrangle. M. Stephanos signale diverses propriétés des quadrangles conjugués parmi lesquelles la plus saillante est la suivante : toutes les fois que les sommets A_1, A_2, A_3 du quadrangle (A) tombent respectivement sur des cercles arbitraires ayant pour centres les points B_1, B_2, B_3, le quatrième sommet A_4 de A vient tomber sur un quatrième cercle ayant pour centre le point B_4. Cette proposition est une généralisation d'un théorème donné récem-

ment par M. Tchebychef dans son Mémoire *Sur les plus simples systèmes articulés qui fournissent un mouvement rectiligne approximatif au quatrième et au cinquième ordre* (*Mémoires scientifiques de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1881).

N° 17; 23 octobre.

Resal. — De l'effet d'un coup de queue incliné sur une bille. (700).

Borrelly. — Observations de la grande comète (Cruls), faites à l'Observatoire de Marseille. (712).

Thollon et *Gouy.* — Observations spectroscopiques sur la grande comète (Cruls).

Appell. — Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique (x, y) qui se reproduit multipliée par une constante, quand le point (x, y) décrit un cycle. (714).

Soit $\Phi(x, y)$ une telle fonction du point analytique (x, y) sans points singuliers essentiels et admettant $2p$ multiplicateurs correspondant aux $2p$ cycles normaux; l'auteur montre qu'il y a en général $p-1$ relations entre les résidus de la fonction et les pôles correspondants, supposés simples.

Goursat. — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. (717).

La fonction de M. Appell

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha.m+n)(\beta.m)(\beta.n)}{(\gamma.m+n)(1.m)(1.n)} x^m y^n,$$

où

$$(\lambda, k) = \lambda.(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1),$$

vérifie, comme on sait, les équations

$$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0,$$
$$x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p + \beta\gamma q - \alpha\beta z = 0.$$

M. Goursat montre que ces équations admettent en général *soixante* intégrales communes qui s'expriment par des produits tels que

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

λ, μ, μ', ν étant liés simplement à α, β, β', γ, et les variables t, t' étant des fonctions rationnelles et du premier degré de x et de y. On obtient ces soixante intégrales par une méthode semblable à celle employée par Jacobi pour les séries hypergéométriques ordinaires, en partant des dix intégrales définies considérées par M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 1881) et en observant qu'il y a cinq changements de variables qui n'altèrent pas la forme de ces intégrales définies.

Lemoine. — Décomposition d'un nombre entier N en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima. (719).

Supposant $N = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n$, l'auteur dit que N est décomposé en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima, si, en général, a_j est la racine $n^{\text{ième}}$ à une unité près par défaut de $a_j^n + a_{j+1}^n + \ldots + a_p^n$; il donne divers théorèmes relatifs à cette décomposition.

Quet. — Induction binaire et ses périodes. (722).

N° 18; 30 octobre.

Resal. — Remarques sur la théorie des chocs. (745).

Picard. — Sur certaines formes quadratiques et sur quelques groupes discontinus. (763).

En employant un procédé dû à M. Hermite, on peut généraliser la théorie des formes quadratiques ternaires en considérant la forme

$$\begin{aligned} &A x x_0 + A' y y_0 + A'' z z_0 + B y z_0 + B_0 y_0 z \\ &+ B' z x_0 + B'_0 z_0 x + B'' x y_0 + B''_0 x_0 y, \end{aligned}$$

où x et y sont deux variables complexes, dont x_0 et y_0 sont les conjugués; de même les coefficients B affectés d'indices sont les conjugués des coefficients B sans indices; les coefficients A sont réels. En effectuant une substitution convenable sur x, y, z et la substitution à coefficients conjugués sur x_0, y_0, z_0, on ramènera la forme considérée à l'une des formes

$$\begin{aligned} &\pm (UU_0 + VV_0 + WW_0), \\ &\pm (UU_0 + VV_0 - WW_0); \end{aligned}$$

on voit par là ces formes se distinguer en formes définies et en formes indéfinies. Si l'on considère une forme indéfinie à coefficients entiers, il existera un groupe d'une infinité de substitutions linéaires à coefficients entiers (1) qui changent la forme en elle-même; si l'on met maintenant celle-ci sous la forme réduite

$$\pm (UU_0 + VV_0 - WW_0),$$

au groupe (1) correspondra un groupe (2)

$$\begin{aligned} U &= A_3 u + B_3 v + C_3 w, \\ V &= A_2 u + B_2 v + C_2 w, \\ W &= A_1 u + B_1 v + C_1 w, \end{aligned}$$

et le groupe de substitutions relatives aux variables α et β

$$\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{A_3\alpha + B_3\beta + C_3}{A_1\alpha + B_1\beta + C_1},\ \frac{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}\right)$$

est un groupe discontinu qui contient comme cas particulier le groupe discontinu considéré précédemment par l'auteur (Communication du 2 octobre). Cette substitution n'altère pas la somme des carrés des modules des variables.

Poincaré. — Sur les séries trigonométriques. (766).

Soit

$$\varphi(t) = \Sigma A_p \sin \alpha_p t,$$

où les A et les a sont des nombres positifs tels que $\frac{1}{A_p}$ et a_p aient, pour p infini, la limite de zéro. Le module de $\varphi(t)$ peut devenir aussi grand qu'on le veut.

Siemens. — Réponse aux objections présentées par M. *Faye* sur la théorie du Soleil de M. *C.-W. Siemens.* (769).

Lévy (M.). — Sur une extension du principe des aires et du mouvement du centre de gravité. (772).

Soient n points matériels libres soumis uniquement à leurs actions mutuelles, ces actions dérivant d'un potentiel Π qui contienne non seulement les coordonnées x_i, y_i, z_i, mais les composantes x'_i, y'_i, z'_i de leurs vitesses; les équations du mouvement sont

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{d \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i}}{dt}, \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

elles admettent, comme on sait, l'intégrale des forces vives, mais non les six intégrales qui correspondent aux principes des aires et du mouvement du centre de gravité. Toutefois, on peut trouver six intégrales qui jouent le même rôle; il suffit de former les combinaisons exprimées par les équations

$$\frac{d}{dt}\sum\left(m_i x_i + \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i}\right) = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

$$\frac{d}{dt}\sum\left[m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) + y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y'_i}\right]$$

$$= \sum\left(y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial \Pi}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i}\right);$$

or, dans ces deux équations, les deux seconds membres sont nuls, en raison de la nature même du potentiel : le premier parce que le potentiel ne doit pas changer par une translation des axes, le second parce que le potentiel ne doit pas changer par une rotation des axes. On voit maintenant apparaître les six intégrales de M. Lévy, qui s'interprètent d'ailleurs facilement.

Sébert et Hugoniot. — Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant à son extrémité une tige additionnelle. (775).

N° 19; 6 novembre.

Brioschi. — Sur les fonctions de sept lettres. (814).

Voir plus haut.

De Bernardières. — Sur la comète observée au Chili dans le mois de septembre. (823).

Gonnessiat. — Observations de la grande comète Cruls, faites à l'Observatoire de Lyon. (824).

Cruls. — Sur la grande comète australe, observée à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (825).

Laguerre. — Sur les fonctions du genre zéro et du genre 1. (828).

Soit

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$$

un polynôme entier en x dans lequel les coefficients sont des fonctions de n et supposons que, n croissant indéfiniment, $\Phi(x)$ ait pour limite une série toujours convergente $E(x)$; si l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et de même signe, $F(x)$ est égale au produit d'une fonction entière du genre zéro par une exponentielle de la forme e^{ax+b}.

Si $\Phi(x) = 0$ a, quel que soit n, toutes ses racines réelles, $E(x)$ est égale au produit d'une fonction entière de genre un par une exponentielle de la forme e^{ax^2+bx+c}.

Mac-Mahon (P.-A.). — Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret. (831).

Lévy (M.). — Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine dynamo-électrique et sa vitesse de rotation. (832).

Janssen. — Rapport au Bureau des Longitudes sur la prochaine éclipse du 6 mai 1883. (881).

N° 20; 13 novembre.

Sur les avantages que l'étude de cette éclipse, d'une longue durée, peut présenter pour l'étude de la constitution du Soleil et pour reconnaître l'existence de planètes circumsolaires; sur l'utilité d'envoyer une expédition à l'île Flint et aux îles Carolines.

Tacchini. — Observations faites pendant l'éclipse totale de Soleil du 17 mai 1882. (896).

Picard. — Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de la réduction du nombre des périodes. (898).

Soit donnée une relation algébrique du genre p

$$f(x, y) = 0,$$

et supposons que, parmi les p intégrales correspondantes de première espèce, il y en ait q

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F_i(x, y)}{f'_y(x, y)}\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

ayant seulement $2q$ périodes distantes, et cela de telle manière que

$$\begin{array}{llll} \Omega_{1,1}, & \Omega_{1,2}, & \ldots, & \Omega_{1,2q}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_{q,1}, & \Omega_{q,2}, & \ldots, & \Omega_{q,2q} \end{array}$$

désignant ces $2q$ systèmes de périodes correspondantes, tout autre système de périodes correspondantes soit de la forme

$$m_1\Omega_{i,1} + m_2\Omega_{i,2} + \ldots + m_{2q}\Omega_{i,2q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les m sont des entiers.

Considérons le système des équations

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{F_i\,dx}{f'_y} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{F_i\,dx}{f'_y} + \cdots \\ \displaystyle + \int_{x_0}^{x_r} \frac{F_i\,dx}{f'_y} = u_i + h_i \end{array}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les h sont des constantes.

L'auteur montre que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions uniformes de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ avec $2q$ systèmes de périodes; de plus ces fonctions périodiques peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions Θ de q variables indépendantes.

Stieltjes. — **Sur un théorème de M. Tisserand. (901).**

Goursat. — **Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. (903).**

L'auteur consacre deux Communications à ce sujet (p. 903 et 1044).

Le problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques a été étendu par M. Picard à certaines fonctions de deux variables : M. Picard a ainsi retrouvé la fonction $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ de M. Appell : les fonctions F_2 et F_3 de M. Appell sont aussi susceptibles d'une définition analogue. Pour y parvenir, M. Goursat définit une fonction par ces conditions : entre cinq déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, dans le voisinage de tout système de valeurs (a, b) de (x, y) dont ne font partie aucun des points $0, 1, \infty$, et telles que l'on n'ait pas $ab = a - b$. Chaque branche de la fonction est holomorphe par rapport à x et par rapport à y ; enfin, dans le voisinage des valeurs singulières, on a quatre déterminations linéairement indépendantes, d'une nature particulière que précise l'auteur. Dans ces conditions, M. Goursat établit que la fonction considérée z doit vérifier deux équations linéaires du quatrième ordre, ne contenant chacune que les dérivées de z par rapport à l'une des variables et dont les coefficients ne renferment aucun paramètre arbitraire : pour les former, M. Goursat est amené à généraliser l'une des propositions fondamentales de M. Fuchs.

Ces équations sont vérifiées par toute intégrale commune aux deux équations simultanées aux dérivées partielles considérées par M. Appell,

$$(x - x^2)r + ys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]p - \alpha\beta z = 0,$$
$$(y - y^2)t + xs + [\gamma - (\alpha' + \beta' + 1)x]q - \alpha'\beta' z = 0.$$

Inversement les deux équations linéaires du quatrième ordre de M. Goursat n'admettent pas d'autre intégrale commune que les intégrales communes aux équations linéaires aux dérivées partielles de M. Appell.

Hugoniot. — Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. (907).

Soit $\varphi(x)$ une fonction dont les valeurs sont données entre α et β. Soient $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ $n+1$ fonctions de x telles que

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'}\, dx = 0 \qquad (k \gtrless k'),$$

et soit enfin

$$B_p = \int_\alpha^\beta Z_p^2\, dx;$$

on peut se proposer de déterminer les coefficients numériques $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de façon que le carré moyen de la différence

$$\varepsilon = \varphi(x) - (A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots + A_n Z_n),$$

c'est-à-dire l'intégrale

$$S = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta \varepsilon^2\, dx,$$

ait la moindre valeur possible; on trouve

$$A_k = \frac{1}{B_k}\int_\alpha^\beta Z_k \varphi(x)\, dx;$$

il est à remarquer que ces valeurs sont indépendantes les unes des autres; en prenant pour les A_k ces valeurs, on trouve

$$(\beta - \alpha)S = \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\, dx - B_0 A_0^2 - B_1 A_1^2 - \ldots - B_n A_n^2.$$

Si l'on suppose que l'entier n croisse au delà de toute limite, on observera que S va nécessairement en diminuant avec $\frac{1}{n}$, que la série à termes positifs

$$B_0 A_0^2 + B_1 A_1^2 + \ldots$$

est essentiellement convergente et que sa somme est au plus égale à

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2,$$

que la série

$$A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots,$$

d'ailleurs convergente entre α et β, représentera ou non $\varphi(x)$ selon que la sé

$$B_0 A_0^2 + B_1 A_1^2 + \ldots$$

a ou non pour somme la quantité

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2.$$

Relativement aux quantités Z satisfaisant aux conditions

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'}\, dx = 0 \qquad (k \gtrless k'),$$

on observera que, étant données les quantités $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$, on peut en dé l'expression *indéfinie* de Z_n, pourvu que celle-ci renferme n constantes ar traires distinctes, indépendamment d'un facteur constant; on peut prendre particulier

$$Z_n = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x),$$

et supposer que Z_0 ne contienne que $f_0(x)$; que Z_1 contienne

$$f_0(x) \text{ et } f_1(x), \ldots.$$

Si maintenant $\varphi(x)$ est une fonction donnée entre α et β et qu'on for comme précédemment la série

$$A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots,$$

cette série représentera $\varphi(x)$ sous la condition

$$\sum_0^\infty B_n A_n^2 = \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\, dx;$$

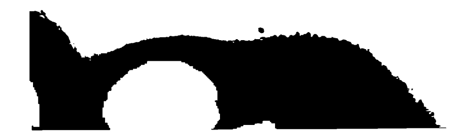
les $(n+1)$ premiers termes de cette série forment une combinaison linéaire $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ telle que, entre les limites α et β, le carré moyen la différence avec $\varphi(x)$ soit moindre que pour toutes les autres combinais linéaires des mêmes fonctions. C'est la généralisation d'une propriété b connue des polynômes de Legendre.

N° 21; 21 novembre.

Hatt. — Sur le rapport de l'action lunaire à l'action solaire d le phénomène des marées. (960).

Wolf. — Sur deux étalons de l'aune et du pied-de-roi, récemm retrouvés. (977).

Bigourdan. — Observations de la planète (216) Cléopâtre et la grande comète de 1882, faites à l'Observatoire de Pa (978).



Trépied. — Observations de la grande comète de 1882, faites à l'Observatoire d'Alger. (979).

Jaubert. — Sur la grande comète de 1882. (982).

Rey de Morande. — Sur l'énergie solaire. (980).

Veth. — Sur les travaux de Frédéric Houtman. (982).

Hugoniot. — Sur les fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre. (983).

Voir plus haut.

Lévy (*M.*). — Sur le mouvement d'un système de deux particules de matière pondérable électrisées et sur l'intégration d'une classe d'équations à dérivées partielles. (988).

L'auteur applique les principes qu'il a fait connaître dans une Communication antérieure (30 octobre), et traite le problème énoncé en prenant pour le potentiel une fonction des points et de leurs vitesses qui comprend comme cas particuliers les lois de Weber, de Riemann et de Clausius : il ramène le problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, pour laquelle les six intégrales dont il a expliqué antérieurement la formation lui fournissent quatre intégrales en involution (telles que les *crochets* formés avec deux d'entre elles soient identiquement nuls).

Le problème est ainsi, en général, ramené à l'intégration d'une équation à deux variables. En supposant les masses égales, l'intégration s'achève.

N° **22**; 27 novembre.

Mouchez. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1882. (1017).

Siemens (*C.-W.*). — Sur la conservation de l'énergie solaire. (1037).

Stieltjes. — Sur un théorème de M. Tisserand. (1043).

Goursat. — Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. (1044).

Voir plus haut.

Abdank-Abakanowicz. — Sur un nouvel intégromètre. (1047).

Vaneček. — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1049).

Suite de l'étude du mode de transformation défini dans une Communication du 12 juin 1882.

Boussinesq. — Équilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan. (1052).

L'auteur a traité de ce problème dans les *Comptes rendus* pour l'année 1878; depuis il a été repris à un autre point de vue par M. Cerruti (*Accad. de Lincei*, 1882). M. Cerruti a retrouvé la solution de M. Boussinesq et développé divers cas dont ce dernier ne s'était pas occupé; M. Boussinesq montre que les principes qu'il avait posés dans ses Communications de l'année 1878 suffisent à établir les conclusions nouvelles obtenues par M. Cerruti.

N° 23; 4 décembre.

Faye. — Sur une lettre de M. Spörer relative à une particularité de la Mécanique solaire. (1110).

Lœwy et *Tresca*. — Notice sur un nouvel appareil optique propre à l'étude de la flexion. (1114).

Lipschitz. — Sur le pendule. (1141).

θ désignant l'angle de rotation, l'auteur considère simultanément les deux mouvements pour lesquels les valeurs maxima de θ sont supplémentaires et il établit une relation remarquable entre les durées des oscillations et les forces vives accumulées pendant une oscillation dans les deux mouvements.

Jonquières (*de*). — Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. (1144).

Vaneček (*MM.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1146).

Boussinesq (*J.*). — Sur la transmission d'une pression oblique de la surface à l'intérieur dans un solide isotrope et homogène en équilibre. (1149).

Quet. — Sur l'induction terrestre des planètes et en particulier sur celle de Jupiter. (1155).

N° 24; 11 décembre.

Mouchez. — Observation du passage de Vénus dans la République Argentine. (1182).

Tisserand. — Installation et opérations préliminaires de la mission pour l'observation du passage de Vénus, à Fort-de-France. (118[illegible]

Stéphan. — Observations du passage de Vénus sur le Soleil, faites à l'Observatoire de Marseille le 6 décembre 1882. (1185).

Hirn (G.-A.). — Sur la conservation de l'énergie solaire. Réponse à la Note critique de M. C.-W. Siemens. (1195).

Lescarbault. — Observation du passage de Vénus faite à Châteaudun. (1208).

Tacchini. — Observations du passage de Vénus à l'Observatoire Royal du Collège Romain. (1209).

Tacchini. — Observations de taches et de facules solaires, faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain pendant le troisième trimestre de 1882. (1221).

Tacchini. — Sur la grande tache solaire de novembre 1882 et sur les perturbations magnétiques qui en ont accompagné l'apparition. (1212).

Jacquet (L.). — Observations de la grande Comète australe. (1215).

Halphen. — Sur la série de Fourier. (1217).

Soit une fonction $f(x)$ susceptible d'intégration dont on veuille étudier le développement en série trigonométrique dans un intervalle donné. Les termes de la série se calculent suivant la formule de Fourier; mais le développement n'est pas toujours possible. Comme première condition nécessaire, il faut que les termes calculés tendent vers zéro. C'est à ce sujet que M. Halphen démontre la proposition suivante :

Les termes de la série trigonométrique tendent vers zéro si l'intégrale de $f(x)^2$ est fixée dans l'intervalle considéré.

Léauté (H.). — Sur les solides d'égale résistance. (1219).

Lévy (M.). — Sur une Communication de M. Marcel Deprez relative au transport de la force. (1220).

N° 25; 18 décembre.

Faye. — Sur un récent Mémoire de M. *R. Wolf,* de Zurich, au sujet de la périodicité des taches du Soleil. (1245).

Brioschi (F.). — Sur les fonctions de sept lettres. (1254).

Trépied. — Observations faites pendant le passage de Vénus à l'Observatoire d'Alger. (1267).

Millosevich (*E.*). — Sur le passage de Vénus du 6 décembre 1882 observé à Rome. (1269).

Cruls (*L.*). — Sur la grande Comète australe observée à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (1270).

N° 26; 26 décembre.

Mouchez. — Observation du passage de Vénus, à l'Observatoire de la Marine de Toulon. (1309).

Faye. — Sur deux objections de M. le professeur Young, de New-Jersey, à la théorie cyclonique des taches du Soleil. (1310).

Villarceau (*Y.*). — De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la Mécanique et d'en bannir certains problèmes, par exemple le mouvement du corps solide des géomètres. (1321).

Ledieu. — Considérations sur la théorie générale des unités. (1328).

Michaud. — Observation du passage de Vénus à l'Observatoire de Nice. (1339).

Thollon. — Observation du passage de Vénus à Avila (Espagne). (1340).

Gill (*D.*). — Photographies de la grande Comète de 1882, faites à l'Observatoire du cap de Bonne-Espérance. (1342).

Jonquières (*de*). — Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. (1343).

Lipschitz (*R.*). — Sur une Communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers. (1344).

Tome XCVI; 1883.

N° 1; 2 janvier.

Siemens. — Réponse aux objections présentées à la théorie de l'énergie solaire, par MM. Faye et Hirn. (43).

Huggins (*W.*). — Sur une méthode pour photographier la couronne dans une éclipse de Soleil. (51).

Darboux. — Sur les cercles géodésiques. (54).

Le *cercle géodésique* sur une surface quelconque est la courbe (à courbure géodésique constante) à périmètre minimum et qui limite, sur la surface, une aire donnée; M. Darboux montre comment on peut appliquer à l'étude de l'équation différentielle des cercles géodésiques, équation qui est du second ordre, la méthode employée par Jacobi pour la détermination des lignes géodésiques. Supposons que sur une surface l'élément linéaire ds soit donné par la formule

$$dS^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2;$$

si l'on forme l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial u} - k\theta\right)^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial v} - k\sigma\right)^2}{B^2} = 1,$$

où k est une constante arbitraire, et où θ et σ désignent deux fonctions quelconques de u, v, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\sigma}{\partial u} = AC,$$

si enfin on connaît une solution quelconque V de l'équation aux dérivées partielles en V, qui contienne une constante arbitraire α, l'équation finie des cercles géodésiques sera

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta,$$

β étant une autre constante arbitraire.

En outre, la tangente en chaque point du cercle géodésique sera définie par les deux équations

$$A^2 \frac{du}{ds} = k\theta + \frac{\partial v}{\partial u},$$

$$C^2 \frac{dv}{ds} = k\sigma + \frac{\partial V}{\partial v}.$$

L'auteur applique ces résultats aux surfaces de révolution et à un autre type de surfaces étudiées par M. Maurice Lévy.

Autonne. — Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (56).

L'auteur s'est occupé, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII[e] Cahier, Mémoire dont il a été rendu compte dans le *Bulletin*, des équations différentielles linéaires d'ordre p, admettant un système fondamental d'intégrales qui soient racines d'une équation algébrique d'ordre $m > p$; dans ce Mémoire, le nombre m était supposé premier; dans le même ordre d'idées, il communique divers résultats relatifs au cas où m est un nombre composé.



tions) s'exprime par l'égalité

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{3}\right) - \left(\frac{n}{5}\right) = \left(\frac{n}{6}\right) + \ldots = 1$$

Si l'on divise les nombres premiers contenus dans la suite deux parties, dont l'une comprendra les nombres $a, b, c, \ldots$ sent pas $\sqrt{n}$, dont l'autre comprendra les nombres $p, q, \ldots,$ nombres premiers dont on désigne le nombre par $L(n)$, le tl tion conduit à l'égalité suivante :

$$\left[\left(\frac{n}{1}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{3}\right) - \ldots\right]_{abc\ldots f} = 1 + L$$

où, dans le premier membre, on suppose que toutes les comb sans répétition des quantités $a, b, c, \ldots, f$ figurent en dé égalité est l'expression de la règle de M. de Jonquières. Les rèmes donnés par M. Lipschitz, en 1879, et qui concernent tro métiques introduites par Lejeune-Dirichlet, sont susceptible analogues; dans ces diverses conséquences, on voit toujour membre des fonctions numériques qui ne dépendent que des inférieurs à $\sqrt{n}$ et, dans l'autre, des fonctions numériques qui des nombres premiers supérieurs à $\sqrt{n}$. M. Lipschitz montre, e ces conséquences elles-mêmes sont susceptibles d'être général

Bois-Reymond (P. du). — Remarques au sujet M. Hugoniot sur le développement des foncti d'autres fonctions. (81).

Inexactitude d'un critérium de convergence indiqué par M. I p. 907).

N° 2 : 8 janvier.

Faye. — Observations relatives à la dernière Com M. Siemens, concernant la théorie de l'énergie sol

pendant l'hiver de 1882 : le but qu'il poursuit dans ses leçons est, d'une part, une classification des nombres et fonctions algébriques; de l'autre, une étude de leurs propriétés qui permette de prolonger, en quelque sorte, et de développer les résultats de la théorie élémentaire des nombres dans une arithmétique supérieure, la plus générale possible, dont les *données* seraient, non seulement les nombres rationnels, mais encore les fonctions rationnelles, à coefficients entiers, d'un nombre fini quelconque de variables, et les fonctions rationnelles d'un nombre fini quelconque de fonctions algébriques, les coefficients étant toujours supposés entiers.

Les Communications de M. Kronecker développent et éclairent diverses Notes concises de Lejeune-Dirichlet (*Comptes rendus*, 1840, t. X, p. 285; *Monatsberichte*, octobre 1841, avril 1842, mars 1846); ce sont particulièrement les idées contenues dans la Note de 1842 : *Généralisation d'un théorème concernant les fractions continues et applications à la théorie des nombres*, dont M. Kronecker montre la portée considérable et par le développement desquelles il a été conduit à une démonstration nouvelle de la proposition fondamentale indiquée par Lejeune-Dirichlet, en 1846, à savoir que, « si les valeurs absolues différentes des racines de l'équation fondamentale sont en nombre h, on peut trouver $(h - 1)$ unités fondamentales ».

Dans le courant de sa démonstration, l'auteur résout complètement une question qui avait été tranchée par M. Liouville dans un cas particulier (*Journal de Mathématiques*, t. XVI, p. 133) et qui concerne la réduction approximative des équations irréductibles; il est intéressant de noter que l'ordre de la réduction approximative auquel on parvient ainsi dépend du degré de l'équation *réduite*, tandis que la *limite* de l'ordre d'une réduction approximative quelconque dépend du degré de l'équation à *réduire*.

Finalement, M. Kronecker établit la proposition suivante :

Dans chaque espèce de nombres algébriques, il y a un nombre infini d'unités ayant chacune, en valeur absolue, toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies.

En utilisant ensuite les considérations développées dans sa thèse (*De unitatibus complexi*), il déduit de cette proposition le théorème de Lejeune-Dirichlet qui a été énoncé plus haut.

Jordan. — Rapport sur un Mémoire de M. de Salvert sur les ombilics coniques. (105).

M. de Salvert a étudié la courbure des sections faites sur une surface, en un point singulier, par des plans passant par l'axe du cône lieu des tangentes et les génératrices de ce cône. Les ombilics coniques sont des points tels que le cône soit de révolution et que les branches de courbe qui correspondent à ces diverses génératrices aient toutes la même courbure.

Zenger (*V.*). — La périodicité des comètes. (110).

D'après M. Zenger, les époques des périhélies des diverses comètes admettraient une période égale à douze jours et demi environ : cette période ne différerait que de $\frac{1}{1000}$ de jours de la durée d'une demi-rotation du Soleil.

Lipschitz. — Addition à une Note sur les nombres premiers. (115).



Chancourtois (*de*). — Observations au sujet de gouvernement des États-Unis, concernant l'ado ridien initial commun et d'une heure universelle

Goursat. — Sur les fonctions hypergéométrique rieur. (185).

Extension à ces fonctions du problème de Riemann. Forn différentielle analogue à l'équation de Gauss, à laquelle sa d'ordre n, et cela en partant de la nature des déterminatioı aux environs des points 0, 1, ∞ ; représentation de ces foncti tégrales définies multiples, analogue à l'intégrale définie l'équation de Gauss.

Halphen. — Sur la série de Fourier. (188).

N° 4; 22 janvier.

Kronecker. — Sur les nombres complexes. (214).

Perrin. — Observation du passage de Vénus faite à l

Leveau. — Note sur le prochain retour de la con de d'Arrest. (229).

Jonquières (*E. de*). — Addition à une Note su premiers. (231).

Stephanos. — Sur les relations qui existent entre et les invariants de caractère pair d'une forn sixième ordre. (233).

Le système de ces covariants et invariants (non gauches)

Sur les conditions immédiates que doit remplir une fonction analytique de plusieurs variables imaginaires, conditions analogues à celles qu'expriment les égalités

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

où l'on suppose

$$f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Poincaré. — Sur les fonctions de deux variables. (238).

Indication de la marche à suivre pour établir cette proposition : « Une fonction de deux variables, méromorphe dans toute l'étendue du plan double qui permet de représenter les variables, est le quotient de deux fonctions entières. » On sait que cette proposition fondamentale n'a pas encore été démontrée rigoureusement. M. Poincaré énonce, en outre, le théorème suivant : « Si Y est une fonction quelconque de X, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de X, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres, elle pourra être considérée comme la solution d'une équation

$$G(X, Y) = 0,$$

où G est une fonction entière. »

Gruey. — Sur les courbes du sextant. (240).

Ces courbes sont les courbes décrites dans le champ de la vision par l'image doublement réfléchie d'un point, lorsqu'on *balance* ou qu'on fait tourner l'instrument autour de la ligne de visée directe, c'est-à-dire autour de l'axe optique, soit de la *lunette*, soit de la *pinnule* que les marins emploient suivant les cas. M. Gruey expose quelques propriétés élégantes de ces courbes.

Boussinesq. — Comment se répartit, entre les divers points de sa petite base d'appui, le poids d'un corps dur, à surface polie et convexe, posé sur un sol horizontal élastique. (245).

N° 5; 29 janvier.

Janssen. — Note sur l'observation du passage de la planète Vénus sur le Soleil. (288).

Faye. — Sur la constitution mécanique et physique du Soleil. (292).

Picard (E.). — Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. (320).

L'auteur a déjà donné des exemples de fonctions de deux variables u, v, qui restent invariables quand on effectue sur u et v les substitutions en nombre in-

fini d'un groupe linéaire discontinu. En général, si l'on considère un groupe discontinu pour tout point (u, v), c'est-à-dire pour tout système des valeurs u, v situé à l'intérieur du domaine D défini par l'inégalité

$$u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 < 1,$$

où

$$u = u' + u''i, \quad v = v' + v''i,$$

et si l'on suppose que toute substitution du groupe transforme chaque point de la limite de D en un point de cette même limite, il existe des fonctions $F(u, v)$ qui restent inaltérées par toute substitution du groupe.

Trois fonctions $x = F_1$, $y = F_2$, $z = F_3$ jouissant de cette propriété sont liées par une relation algébrique $f(x, y, z) = 0$; l'auteur étudie le résultat de la substitution des variables u, v aux variables x, y, z dans les intégrales

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{Q(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z(x,y,z)},$$

où Q est un polynôme convenable d'ordre $m - L$, m étant le degré de f, intégrales qui sont l'analogue des intégrales abéliennes de première espèce; le double signe $\int$ porte alors sur une fonction $G(u, v)$ uniforme dans le domaine D. Les intégrales

$$\int_{u_0}^{U_0}\int_{v_0}^{V_0} G(u,v)\,du\,dv,$$

où

$$U_0 = \frac{M_1 u_0 + P_1 v_0 + R}{M_3 u_0 + P_3 v_0 + R_3 v_0}, \quad V_0 = \frac{M_2 u_0 + P_2 v_0 + R_1}{M_3 u_0 + P_3 v_0 + R_3},$$

(M, P, R) étant une substitution du groupe, constituent les analogues des périodes intégrales simples.

L'auteur considère aussi des fonctions de *seconde espèce* qui, par une substitution du groupe considéré, se reproduisent multipliées par une constante; ces fonctions satisfont à une équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

où f est un polynôme.

Goursat. — Sur l'intégration algébrique d'une classe d'équations linéaires. (323).

Ce problème : « Former l'ensemble des substitutions que subit un système fondamental d'intégrales d'une équation donnée correspondant aux divers contours fermés que l'on peut faire décrire à la variable », se résout complètement pour les équations différentielles linéaires, déjà étudiées par l'auteur, auxquelles satisfont les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. M. Goursat traite du cas de l'équation du troisième ordre; son raisonnement est d'ailleurs général. M. Jordan ayant d'ailleurs montré comment on peut énumérer les divers groupes de substitutions d'ordre fini contenues dans le groupe linéaire à p variables, on peut, pour ces équations, résoudre complètement le problème de l'intégration algébrique. Dans le cas étudié, il y a au plus huit types qui s'in-

tègrent algébriquement; ils correspondent aux huit groupes finis de substitutions contenus dans le groupe linéaire à trois variables.

Korkine. — Sur un théorème de M. Tchebychef. (326).

Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions de x qui croissent simultanément ou décroissent simultanément quand x varie de 0 à 1; on a

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_0^1 \varphi(x)\,dx \times \int_0^1 \psi(x)\,dx.$$

Si l'une des fonctions croît et l'autre décroît, l'inégalité est renversée.

Ce théorème de M. Tchebychef résulte de l'identité

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{n}$$
$$= \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\,\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} + \frac{1}{n^2}\,\Sigma(x_i - x_k)(y_i - y_k).$$

Lipschitz. — Application d'une méthode donnée par Legendre. (327).

N° 6; 5 février.

Faye. — Sur la constitution physique et mécanique du Soleil. (355).

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (366).

Considérons la surface enveloppe des plans dont l'équation est

$$(x+y)X + (1-xy)Y + i(1+xy)Z - P = 0;$$

x, y sont les variables de M. Bonnet. Soient p, q, r, s, t les dérivées partielles de P, du premier et du second ordre, par rapport à x, y; l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface est

$$dp\,dx - dq\,dy = 0$$

ou

(1) $$r\,dx^2 - t\,dy^2 = 0.$$

Si α, β sont les paramètres des lignes de courbure, on aura, en faisant $\lambda = \sqrt{\frac{t}{r}}$,

(2) $$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\lambda\frac{\partial y}{\partial \beta},$$

(3) $$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial p}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial q}{\partial \beta} = -\lambda\frac{\partial p}{\partial \beta};$$

les équations supposées vérifiées, p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction.

S'il s'agit de trouver les surfaces ayant une représentation sphérique donnée, x et y devront être regardées comme des fonctions données de α et de β:

les équations (2) fourniront la valeur de λ; pour déterminer P, c'est-à-dire la surface, on aura à résoudre les équations (3); les valeurs de p, q connues, on aura P par une quadrature.

L'intégration du système (3) se ramène à celle de l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial^2(\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

et, Z étant une solution de cette équation, on aura

$$p = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}}.$$

De l'étude faite par M. Moutard de l'équation (4), il résulte que :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis.

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.

Appell. — Sur les fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$. (368).

Soit F une fonction réelle des variables réelles x, y, z vérifiant l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

continue, admettant des dérivées en tous les points intérieurs à une surface fermée S, excepté en quelques points *singuliers* isolés.

Un tel point (a, b, c) sera dit un pôle d'ordre n, s'il existe une fonction ρ de la forme

$$\rho = \frac{V_0}{r} + \frac{V_1}{r^3} = \ldots + \frac{V_{n-1}}{r^{2n-1}},$$

telle que la différence $F - \rho$ soit continue au point (a, b, c).

Dans l'expression de ρ, on suppose

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

quant aux V, ce sont des polynômes homogènes en $x - a$, $y - b$, $z - c$ vérifiant l'équation

$$\Delta V = 0;$$

un point singulier qui n'est pas un pôle est un point singulier essentiel.

M. Appell étudie les fonctions F qui existent dans tout l'espace. A ces fonctions on peut étendre les propositions de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler, les théorèmes indiqués par M. Appell pour les fonctions d'une variable imaginaire (1er mai 1882).

M. Appell forme l'expression générale des fonctions F qui n'ont que des pôles et qui vérifient l'équation

$$F(x+m, y+n, z+p) = F(x, y, z),$$

m, n, p étant des entiers quelconques.

Thollon et *Gouy*. — Sur le déplacement des raies du sodium, observé dans le spectre de la grande comète de 1882. (371).

N° 7; 12 février.

Sylvester. — Sur les nombres de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné. (409).

Soient x un nombre positif quelconque, $E(x)$ sa partie entière. M. Sylvester désigne par $I(x)$ une fonction arithmétique de x définie par l'égalité

$$I(x) = \Sigma\varphi(n),$$

où n est un entier positif, où φ est le nombre de nombres premiers à n et inférieurs à n, où la sommation enfin s'étend à tous les entiers n non supérieurs à $E(x)$.

On peut trouver une limite supérieure L et une limite inférieure Λ de $I(x)$, à savoir :

$$L = \left(\frac{3}{\pi^2} + \eta\right) x^2 - Ax + R(\log x),$$

$$\Lambda = \left(\frac{3}{\pi^2} - \eta'\right) x^2 - A'x + R'(\log x),$$

ε étant une quantité positive donnée aussi petite qu'on le veut; η et η' peuvent être pris plus petits que ε, R et R' désignent des fonctions rationnelles et entières de $\log x$, d'un degré fini, dont les coefficients, ainsi que A et A', restent toujours finis.

La probabilité pour que deux entiers dont la limite supérieure x est très grande soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$.

Dans une Communication postérieure (19 février), M. Sylvester annonce qu'il a calculé $I(n)$ pour toutes les valeurs entières de n inférieures à 500; il a toujours trouvé que $I(n)$ était compris entre $\frac{3}{\pi^2}n^2$ et $\frac{3}{\pi^2}(n+1)^2$.

Hirn. — Réfutation d'une seconde critique de M. Zeuner concernant les travaux des ingénieurs alsaciens sur la machine à vapeur (413).

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants des formes binaires. (426).

Soit donné un système composé d'autant de formes binaires indépendantes et de tel ordre qu'on voudra, de tous leurs invariants et covariants. Soit

$$U = Ax^n + nBx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}Cx^{n-2}y^2 + \ldots$$

une quelconque des formes du système. Si l'on effectue la substitution

$$x = X - BY, \quad y = AY,$$

tous les coefficients, dans toutes les formes du système, deviendront des *pénin-variants*.

N° 8; 19 février.

Mouchez. — Observation des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1882. (455).

Sylvester. — Note sur le théorème de Legendre. (463).

Le théorème cité par MM. de Jonquières et Lipschitz est une conséquence immédiate d'un théorème logique qui, mis sous forme sensible, équivaut à dire que si A, B, C, ... sont des corps ayant la faculté de s'entrecouper, contenus dans un vase d'eau, et si *a, ab, abc*, ... représentent symboliquement les volumes de A, de la partie commune à A et à C, de la partie commune à A, B, C,..., alors le volume du liquide déplacé par la totalité des corps sera

$$\Sigma a - \Sigma ab + \Sigma abc - \ldots.$$

Bigourdan. — Observations de la nouvelle planète (232) Palisa, faites à l'Observatoire de Paris. (473).

Baillaud. — Observations de la grande comète de 1882, faites à l'équatorial Brünner de l'Observatoire de Toulouse. (474).

Oliveira-Lacaille (de). — Sur une curieuse modification du noyau de la grande comète. (475).

Partition du noyau en quatre nébulosités. M. Baillaud en avait observé le dédoublement deux mois auparavant.

Todd. — Sur l'observation du passage de Vénus en 1882, faite à l'observatoire de Lick, au mont Hamilton (Californie). (476).

Picard. — Sur les fonctions uniformes d'une variable liée par une relation algébrique. (476).

Démonstration de ce théorème :

« Soient

$$x = \mathrm{P}(z), \quad y = \mathrm{Q}(z)$$

deux fonctions de z, uniformes dans tout le plan et ayant seulement un nombre fini de points singuliers essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_n$; s'il existe entre ces fonctions une relation algébrique, le genre de cette relation doit être zéro ou l'unité. »

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du cinquième ordre. (479).

Au moyen du théorème cité plus haut, M. Perrin, dans deux Communications successives, donne le tableau de ces relations.

Combescure. — Sur les fonctions de plusieurs variables imaginaires. (483).

Polignac (C. de). — Sur une question de divisibilité. (483).

Observations sur les théorèmes d'Arithmétique de M. Mathieu Weill (19 décembre 1881) et de M. Désiré André (13 février 1882).

Schiff. — Sur l'équilibre du cylindre élastique. (487).

Trouver l'état d'équilibre d'un cylindre limité par des bases pleines et soumis à des forces normales, appliquées à sa surface latérale et à des forces normales et tangentielles appliquées à ces bases, ces forces-ci étant symétriques par rapport à l'axe.

N° 9; 26 février.

Janssen. — Note sur divers points de Physique céleste. (527).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (546).

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du cinquième ordre. (563).

Goursat. — Sur la théorie des fonctions uniformes. (565).

Si l'on comprend sous le nom de ***singularités*** les points singuliers, les coupures et les espaces lacunaires, on est conduit au résultat suivant : toute fonction uniforme qui a un nombre limité n de singularités est la somme de n fonctions dont chacune possède une seule singularité. Dans le cas où la fonction possède un nombre infini de singularités, on pourra les partager en deux classes : les unes sont telles que l'on peut trouver un contour fermé, ne renfermant à son intérieur que cette seule singularité; les autres ne jouissent pas de cette propriété. En désignant les premières par S, les secondes par S′, les S′ sont ce qu'on peut appeler les limites des S, suivant l'expression adoptée dans le cas des points singuliers. Ceci posé, on peut généraliser comme il suit le théorème de M. Mittag-Leffler :

« 1° Étant donnée une suite de singularités

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_i,\ \ldots,$$

ayant pour limites d'autres singularités S′ et une suite de fonctions uniformes

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_i(x),\ \ldots,$$

telles que la fonction $f_i(x)$ admette la seule singularité S_i, il existe une fonction uniforme $F(x)$ n'admettant pas d'autres singularités que S et S′, telles que la différence

$$F(x) - f_i(x)$$

soit finie et continue à l'intérieur d'un contour infiniment petit renfermant S_i.

» 2° La forme la plus générale d'une fonction $F(x)$ admettant les singularités

S et S' est

$$F(x) = \sum_i^{\infty} f_i(x) + F_1(x),$$

où $f_i(x)$ admet la seule singularité S_i et où $F_1(x)$ n'admet d'autres singularités que S'. »

Jonquières (*E. de*). — Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. (368).

Dans une suite de Communications (26 février, 12 mars, 9 avril, 16 avril, 25 avril, 7 mai, 14 mai, etc.), M. de Jonquières fait une étude intéressante et approfondie des lois qui concernent les périodes des fractions continues qui proviennent de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier E; il donne à cet égard un très grand nombre de théorèmes, dont nous résumons ci-dessous quelques-uns, afin de faire connaître, non la totalité des résultats obtenus par l'auteur, mais la nature et l'esprit de ses recherches.

Soient a la racine carrée du plan carré contenu dans E, $d = E - a^2$, $b = +1$, $e = b^2 - E$.

Toutes les fois que d divise exactement $2a$, en sorte que $\frac{2a}{d} = f$, la période, qui commence toujours après le premier terme a, se compose de deux nombres seulement, f et $2a$.

Si e divise exactement $2b$, en sorte que $\frac{2b}{e} = g$, la période se compose de quatre termes et a pour expression générale

$$[1, (g-2), 1, 2a].$$

La longueur et la composition de la période dépendent principalement de la valeur du rapport $\frac{2a}{d}$. Si d ne divise pas $2a$, on peut supposer E de la forme $\overline{an}^2 + dn$, a et d étant les premiers entre eux.

Pour les nombres de la forme

$$E = \overline{an}^2 + 4n,$$

la période a huit termes ou dix termes, savoir :

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right), 1, 1, \left(\frac{an}{2} - 1\right), 1, 1, \left(\frac{a-1}{2}\right), 2an\right]$$

ou

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right), 1, 1, \left(\frac{an-1}{2}\right), 2a, \left(\frac{an-1}{2}\right), 1, 1, \frac{a-1}{2}, 2an\right],$$

selon que n est pair ou impair.

Si la fraction irréductible égale à $\frac{2a}{d}$ a son dénominateur plus grand que 2, tous les nombres composant la famille $E = \overline{an}^2 + dn$ ont des périodes dont la longueur et la composition varient avec n, bien que a et d demeurent constants. Mais, sauf quelques exceptions, relatives à quelques valeurs consécutives de n à partir de 1, le premier terme de la période et plusieurs de ceux qui le suivent immédiatement sont communs aux périodes de tous les nombres de la famille.

quel que soit n. Ces mêmes termes se reproduisent dans l'ordre inverse à la fin de la période :

1° Dans toute famille de nombres $(\mathrm{E}) = \overline{an}^2 + dn$, il existe $d+1$ groupes réguliers, où les périodes sont uniformes et de même longueur respectivement. L'un de ces groupes (E_1) résulte directement des valeurs de n qui satisfont à la congruence $2an \equiv 2id \pmod{q^2}$, i variant de 1 à l'infini, et les d autres (E_d) de celles qui satisfont à l'équation $n = i'd + \mathrm{K}d^2$, i' et K étant deux nombres entiers variant l'un, i', de 0 à $d-1$, l'autre, K, de 1 à l'infini.

2° La famille (E) contient $d(d-1)$ autres groupes semi-réguliers $(\mathrm{E}_{d'})$ déterminés par les valeurs $n = j + \mathrm{K}d^2$, j prenant toutes les valeurs entières de 1 à $d(d-1)$, à l'exception de celles qui sont égales à $i'd$, ces multiples de d étant déjà tous affectés aux groupes réguliers (E_d).

Dans les groupes $(\mathrm{E}_{d'})$, les périodes ne sont pas uniformes, mais le nombre des termes qu'elles ont en commun croît de quelques unités, dans chaque groupe, chaque fois que K atteint une des valeurs résultant de l'expression de $\mathrm{K} = ld^{2r}$ où l et r sont des entiers quelconques. Chaque groupe $(\mathrm{E}_{d'})$ donne ainsi naissance à une infinité de sous-groupes, dans chacun desquels le nombre des termes communs à la branche initiale et à la branche finale de la période est constant et croît, sans limites, d'un sous-groupe à celui qui le suit dans la série ascendante.

3° Enfin, pour toutes les autres valeurs de n, les périodes n'ont en commun que les termes (trois au moins) dont il a été question au théorème précédent et qui se rencontrent aussi dans les groupes (E_1), (E_d), $(\mathrm{E}_{d'})$ aux mêmes places par rapport aux termes extrêmes. Pour tout le reste, elles sont indépendantes les unes des autres.

Ce théorème se double d'un théorème analogue concernant les périodes des familles

$$(\mathrm{E}) = \overline{bn}^2 - en.$$

M. de Jonquières développe aussi la loi de formation des réduites des nombres du type

$$\mathrm{E} = an^2 + dn;$$

il montre, en particulier, comment les termes communs à chacune des deux branches des périodes des nombres E ne sont autres que les quotients obtenus en faisant l'opération du plus grand commun diviseur sur les nombres $2a$ et d.

Dans les théorèmes précédents on a supposé qu'on avait affaire aux fractions continues arithmétiques, mais les fractions de la forme

$$x = a + \cfrac{1}{\left(\frac{2a}{d}\right) + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\left(\frac{2a}{d}\right) + \cfrac{1}{2a + \ldots}}}},$$

$$x = b - \cfrac{1}{\left(\frac{2b}{e}\right) - \cfrac{1}{2b - \cfrac{1}{\left(\frac{2b}{e}\right) - \cfrac{u}{2b - \ldots}}}},$$

jouent le plus grand rôle dans cette théorie; elles donnent d'ailleurs immédiate-

ment la clef de quelques-uns des théorèmes précédents; M. de Jonquières montre, en outre, le parti qu'on peut en tirer dans le calcul numérique et étudie en détail la façon dont les réduites calculées au moyen de ces fractions se trouvent coïncider avec certaines des réduites calculées au moyen des fractions ordinaires.

N° 10; 5 mars.

Mouchez. — Observations des satellites de Saturne, d'Uranus et de Neptune, faites à l'équatorial de la tour de l'Est de l'observatoire de Paris, par MM. Paul et Prosper Henry. (607).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'observatoire de Marseille. (609).

Gaillot. — Sur les perturbations de Saturne, dues à l'action de Jupiter. (626).

Bigourdan. — Observations de la grande comète de septembre 1882 (II, 1883), faites à l'Observatoire de la mission du passage de Vénus à la Martinique. (629).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète (Brooks et Swift), faites à l'Observatoire de Paris. (632).

Gonnessiat. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites à l'Observatoire de Lyon. (683).

Halphen. — Sur l'approximation des sommes des fonctions numériques. (634).

L'auteur indique une méthode pour déterminer les valeurs asymptotiques de ces sommes; cette méthode repose sur la considération de l'intégrale

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{x^z}{z} f(z)\,dz,$$

où x est une quantité réelle et positive, où la variable d'intégration z suit une ligne A n'entourant pas le point zéro et dont les extrémités sont $a + i\infty$, $a' + i\infty$, a et a' étant positifs. L'intervention de cette intégrale dans ce genre de questions tient à la propriété suivante.

Soit

$$f(z) = \frac{\lambda(1)}{1} + \frac{\lambda(2)}{2^z} + \frac{\lambda(3)}{3^z} + \ldots.$$

Si la ligne (A) est prise dans la région où vaut ce développement, on aura

$$F(x) = \lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda(n),$$

n étant l'entier contenu dans x.

M. Halphen retrouve ainsi, en particulier, un résultat récemment communiqué par M. Sylvester.

Poincaré (H.). — Sur les séries des polynômes. (637).

L'auteur indique une méthode pour déterminer les régions de convergence des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots,$$

où les α sont des constantes, où P_n est un polynôme de degré n, lié aux polynômes précédents par une relation de la forme

$$Q_0 P_n + Q_1 P_{n-1} + Q_2 P_{n-2} + \ldots + Q_k P_{n-k} = 0,$$

relation où Q_i est un polynôme entier donné en x et en n, de degré i en x.

Léauté. — Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement. (640).

N° 11; 12 mars.

Sylvester. — Sur le produit indéfini

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

(674).

Application d'une méthode graphique exposée par l'auteur dans le *Johns Hopkins Circular* de février, pour convertir en série un produit indéfini.

Sylvester. — Sur un théorème de partitions. (674).

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_i$ des suites de nombres consécutifs, telles que le plus petit terme dans aucune d'elles n'excède pas de plus de l'unité le plus grand terme dans la suite qui précède. On peut envisager ce système de suites comme une partition de la somme des nombres contenus dans leur totalité; on a alors le théorème suivant :

Le nombre de systèmes de i suites de nombres consécutifs dont la somme est N *est le même que le nombre de partitions de* N *qu'on peut former avec les répétitions de i nombres impairs.*

Appell. — Réduction à la forme canonique des équations d'un fil flexible et inextensible. (688).

Poincaré. — Sur les groupes des équations linéaires. (691).

M. Fuchs a donné, dans le *Journal de Crelle*, t. LXXV, une méthode pour déterminer les coefficients du groupe d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, avec telle approximation que l'on voudra, M. Poincaré indique, pour arriver au même résultat, deux méthodes, en considérant, mais seulement pour fixer le langage, l'équation particulière

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_i}{x-a_i}\right],$$

où

$$\Sigma B_i = 0.$$

Voici l'un de ces moyens: soient a_1 et a_2 deux points singuliers, C_1 et C_2 deux

cercles ayant pour centres les points a_1 et a_2, n'enfermant pas d'autres points singuliers empiétant l'un sur l'autre dans une région P; on aura quatre intégrales

$$y_1 = (x - a_1)^{\lambda_1} \mathfrak{P}_1(x - a_1),$$
$$y_2 = (x - a_1)^{\lambda_2} \mathfrak{P}_2(x - a_1),$$
$$y_3 = (x - a_2)^{\mu_1} \mathfrak{Q}_1(x - a_2),$$
$$y_4 = (x - a_2)^{\mu_2} \mathfrak{Q}_2(x - a_2),$$

et dans le domaine P des relations de la forme

$$y_1 = \alpha y_3 + \beta y_4, \quad \frac{dy_1}{dx} = \alpha \frac{dy_3}{dx} + \beta \frac{dy_4}{dx},$$
$$y_2 = \gamma y_3 + \delta y_4, \quad \frac{dy_2}{dx} = \gamma \frac{dy_3}{dx} + \delta \frac{dy_4}{dx}.$$

Si l'on avait les valeurs de α, β, γ, δ pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, le groupe cherché serait déterminé; il est clair qu'au moyen des équations précédentes on peut avoir les α, β, γ, δ sous forme de séries procédant suivant les puissances des A, des B, de $x_0 - a_1$, et de $x_0 - a_2$.

Dans une Communication postérieure (30 avril), l'auteur montre comment on peut toujours ramener le problème au cas où l'on peut tracer deux cercles C_1, C_2 satisfaisant aux conditions énoncées; il montre aussi comment les résultats précédents s'étendent au cas des intégrales irrégulières et le lien intime qu'il y a entre ce dernier cas et divers problèmes de Mécanique céleste, relatifs à l'étude des variations séculaires des excentricités.

***Jonquières* (*E. de*). — Sur la composition des périodes des fonctions continues périodiques. (694).**

N° 12; 19 mars.

Lœwy. — Description sommaire d'un nouveau système d'équatoriaux et de son installation à l'Observatoire de Paris. (785).

Ces équatoriaux sont plus stables que les équatoriaux ordinaires et rendent possible la mesure de grandes distances angulaires; l'observateur peut explorer le ciel tout entier et règle lui-même, sans se déranger, tous les mouvements de son appareil; enfin les équatoriaux permettent d'éviter l'emploi de coupoles monumentales.

Sylvester. — Preuve graphique du théorème d'Euler sur la partition des nombres pentagonaux. (743).

Démonstration, par la décomposition d'une *assemblée* régulière de points limitée par deux lignes droites en un carré et deux groupes supplémentaires, de l'identité

$$(1 + xa)(1 + x^2a)(1 + x^3a)\ldots$$
$$= 1 + \frac{1 + ax^2}{1 - x} xa + \frac{1 + ax}{1 - x} \frac{1 + ax^4}{1 - x^2} x^5a^2$$
$$+ \frac{1 + ax}{1 - x} \frac{1 + ax^2}{1 - x^2} \frac{1 + ax^6}{1 - x^3} x^{12}a^3 + \ldots.$$

De Bernardières. — Détermination de longitudes, effectuées au Chili, par la mission du passage de Vénus. (762).

Stieltjes. — Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier. (764).

Si $f(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n, on a

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n} - \log n\right] = \lambda$$
$$= 1 - 2\Gamma'(1) = 0,154431329803, \;\ldots.$$

Darboux (G.). — Sur les équations aux dérivées partielles. (766).

Considérons une équation quelconque aux dérivées partielles définissant une fonction z de plusieurs variables indépendantes. Si l'on y remplace z par $z+\varepsilon z'$, que l'on développe suivant les puissances de ε et que l'on égale à zéro le coefficient de ε, on obtiendra une équation linéaire aux dérivées partielles en z', à laquelle M. Darboux donne le nom d'*équation auxiliaire*. Il montre le parti qu'on peut tirer de la considération de cette équation dans diverses questions :

Chercher les surfaces infiniment voisines d'une surface Σ qui forment avec Σ un système triple orthogonal; ou bien, trouver les surfaces admettant la même représentation sphérique que la surface Σ; ou bien, trouver tous les cercles normaux à une famille de surfaces dont fait partie la surface Σ.

Rechercher les surfaces applicables sur une surface Σ et infiniment voisines de Σ.

Ce dernier problème revient à la transformation par orthogonalité des éléments, problème posé par M. Moutard.

Laguerre. — Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques à la théorie des courbes unicursales. (769).

Si l'on considère une courbe unicursale comme enveloppe de la droite

$$x f(t) + y\varphi(t) + \theta(t),$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ sont des polynômes, l'expression de la distance d'un point quelconque du plan à la tangente au point (t) contiendra le radical

$$\sqrt{[f(t)]^2 + [\varphi(t)]^2} = P(t)\sqrt{F(t)},$$

en mettant en évidence, s'il y a lieu, la partie rationnelle $P(t)$. Si $F(t)$ n'est pas une constante, la courbe, d'après la terminologie de M. Laguerre, doit être regardée comme double; en chaque point on peut mener deux semi-droites opposées qui lui sont tangentes : tel est le cas des coniques. $F(t)$ est alors du quatrième degré; les coniques, regardées comme enveloppes de semi-droites, sont du genre un.

Une tangente étant donnée, en position et direction, il lui correspond une valeur de t et un signe déterminé du radical.

Si l'on détermine chaque tangente à la conique H par l'argument d'une fonction elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre tangentes

touchant au même cycle consiste en ce que la somme des [illegible]
grue à zéro, suivant les deux périodes de la fonction.

M. Laguerre, dans le même ordre d'idées, [illegible]
étend les mêmes considérations aux intégrales ultra-elliptiques.

Walecki. — Démonstration du théorème fondamental [illegible]
rie des équations algébriques. (772).

Voici le nœud de la démonstration proposée par M. Walecki.

Soit $f(x) = 0$ une équation de degré $2p$, p étant impair, [illegible]
pour prouver qu'elle admet une racine, on met d'abord $f(x)$ [illegible]

$$f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2)$$

par la substitution $x = y + z$; le résultant des deux équations

$$\varphi(z^2) = 0, \quad \psi(z^2) = 0,$$

est du degré impair $p(2p-1)$, par rapport à y; ce résultant [illegible]
réelle, en la substituant dans les équations précédentes, $\psi(z^2)$ [illegible]
identiquement nul; alors $\varphi(z^2)$ étant de degré impair p en z^2 [illegible]
réelle en z^2. Si ψ n'est pas identiquement nul φ et ψ ont un [illegible]
et $f(x)$ est décomposable en un produit de deux facteurs, [illegible]
teurs sera de degré impair, ou bien l'un de ces facteurs sera de [illegible]
ment pair $2p'$, p' étant inférieur à p, etc.

Si le degré m de $f(x)$ est égal à $2^r p$, p étant impair, on fera la [illegible]
formation

$$f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2),$$

et l'on verra que le résultant de φ et de ψ est de degré [illegible]
parité est en quelque sorte diminuée d'une unité; en admettant l'[illegible]
racine pour une telle parité, on complétera sans difficulté la démo[illegible]

Charve. — Table des formes quadratiques quaternai[illegible]
tives réduites dont le déterminant est égal ou infé[illegible]
(773).

La méthode employée pour la réduction est celle que l'auteur a [illegible]
à l'Académie en 1881 et qui constitue une généralisation de la [illegible]
M. Selling pour les formes ternaires.

Aoust. — Méthode pour obtenir la formule donnant l[illegible]
générale de l'équation différentielle

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = f(x),$$

(775).

L'auteur suppose que les A sont des constantes; il parvient à un [illegible]
la forme

$$y = M_1 x^{\alpha_1} + M_2 x^{\alpha_2} + \ldots + M_n x^{\alpha_n}$$

$$+ \frac{1}{\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_n} \int^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_{n-1} \int_0^1 d\alpha_{n-2} \cdots \int_0^1 [illegible]$$

Faye. — Sur une objection de M. Tacchini, relative à la théorie du Soleil, dans les *Memorie dei Spettroscopisti italiani*. (811).

Resal. — Sur le mouvement et la déformation d'une bulle liquide qui s'élève dans une masse liquide d'une densité plus grande. (822).

De Jonquières. — Addition aux Communications précédentes sur les fractions continues périodiques. (832).

Weichold. — Caractère auquel on peut reconnaître si l'opération indiquée par

$$\sqrt[2m+1]{a\sqrt{v} \pm b\sqrt{w}\,i},$$

ou par

$$\sqrt[2m]{a \pm b\sqrt{vw}\,i},$$

peut être effectuée sous la forme

$$\alpha\sqrt{v} \pm \beta\sqrt{w}\,i,$$

m désignant un nombre entier positif, v et w des nombres rationnels positifs, et a et b, α et β des nombres rationnels quelconques; procédé pour effectuer cette opération. (835).

Il faut que $a^2v + b^2w$, et $a^2 + b^2vw$ soient les puissances exactes

$$(2m+1)^{\text{ième}} \quad \text{et} \quad 2m^{\text{ième}}$$

des nombres rationnels positifs k et k'.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI.

Boncompagni (*B.*). — Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath, intitolato : *Regule Abaci* (1-90), suivi de la publication des *Regule Abaci*. (91-134).

La Bibliothèque de l'Université de Leyde, la Bibliothèque Nationale de Paris et la Bibliothèque du Vatican possèdent chacune un manuscrit de cet Ouvrage important. Après les avoir minutieusement décrits, l'auteur en relève les variantes et en fait l'historique. Le manuscrit de Leyde provient de la bibliothèque de Scaliger, léguée par lui à l'Université; le manuscrit de Paris était

conservé autrefois dans la bibliothèque de Saint-Victor. Après avoir énuméré les Catalogues dans lesquels les manuscrits en question sont cités, l'auteur passe aux mentions d'Adelard de Bath que l'on trouve dans divers travaux d'Adelung, de Michel Chasles, de Thomas Wright, de Moritz Cantor, de Thomas-Henri Martin, etc. C'est surtout Michel Chasles qui s'est occupé de cette question dans ses *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'Abacus.*

Passant à l'examen de l'Ouvrage, l'auteur remarque qu'Adelard se reconnaît trois prédécesseurs. Le plus ancien est Boëce, à l'arithmétique duquel ont puisé la plupart des abacistes du moyen âge; puis vient Gerbert (c'est probablement de ses *Regule de Abaco computi* dont il s'agit); et enfin un mathématicien français nommé Guichardus.

Adelard traite surtout de la division; il en connaît trois : la *divisio ferrea* ou division par différence qui consiste essentiellement dans l'emploi d'un diviseur fictif plus grand que le vrai; la *divisio aurea*, assez semblable à celle que nous employons aujourd'hui; enfin la *divisio permixta*, combinaison des deux précédentes. Il distingue, en outre, cinq sortes (*species*) de divisions, suivant la nature du diviseur et du dividende, donnant des règles et des exemples pour chacun des cas. Suit une nomenclature des fractions d'*asses*, indispensables, comme on sait, dans la manière de compter des Romains. Adelard en indique vingt-quatre avec leurs noms et signes correspondants. Le prince Boncompagni fait remarquer que douze de ces fractions sont mentionnées par Varron, dans son Ouvrage *De lingua latina;* quatorze par Volusius Marcianus dans l'*Assis distributio;* huit dans Isidore de Séville, et dix-huit dans le *Vocabularium* de Papias (XIe siècle). La chaîne de la tradition est donc interrompue. Le Chapitre sur les fractions duodécimales présente une particularité remarquable; tout un passage assez étendu s'accorde presque mot pour mot avec ce que nous trouvons sur le même sujet dans un Traité intitulé *Liber Abaci*, composé par un élève de Gerbert, nommé Bernelino. Ce Traité, publié en 1867, par M. A. Olleris, fait partie d'un assez grand nombre de manuscrits. M. le prince Boncompagni en a comparé huit, qui tous contenaient le passage en question.

L'auteur termine par quelques considérations touchant Adelard et son temps. Il se nomme simplement Adelardus; mais, d'après MM. Tanner, Wright et d'autres, il serait identique avec le moine Adelbart de Bath, qui a laissé des traductions d'Euclide, des *Tables astronomiques* de Al Kharizmi, de l'*Introduction mineure* de Abu Ma'schar Gia'far, des *Prestigii astronomici* de Thebit-ben Chora, et enfin un Traité sur l'astrolabe. Les dates de la vie de cet auteur peuvent être facilement précisées. Adelard fait mention du roi Henri Ier d'Angleterre, qui a régné de 1100 à 1135 et, de plus, il a dédié deux de ses Ouvrages aux évêques Guillaume de Syracuse et Richard de Bayeux. Or, Guillaume assistait au concile de Latran en 1112, et Richard occupait le siège de Bayeux de 1113 à 1133. Adelard a donc vécu dans la moitié du XIIe siècle.

Steinschneider (*Maurice*). — Étude sur Zarkali, astronome arabe du XIe siècle, et ses Ouvrages. (171-182).

C'est un « premier article » traitant principalement des sources servant de complément à un autre publié à la suite d'une Notice de Bernaudino Baldi, inséré dans le *Bullettino* pour 1874.

Il n'y a qu'un seul Arabe qui ait dit quelque chose sur Zarkali : c'est le vizir Al Kifli; le court passage qu'il nous a laissé et une Notice un peu plus longue du juif Isaac Israëli, sont à peu près tout ce que le moyen âge nous a légué sur Zarkali. Les siècles immédiatement postérieurs ne fournissent qu'un seul écrivain : Bernadino Baldi. Mais la moisson devint plus ample dans les temps modernes. L'auteur cite Montucla (*Histoire des Mathématiques*), J.-B.-Jos. Delambre (*Histoire de l'Astronomie du moyen âge*), L.-P.-A. Sédillot(*Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes*), Joachim Selewel (*Géographie du moyen âge*), Hammer-Purgstall (*Literaturgeschichte der Araber*), Henry-Thomas Colebrook (*Miscellaneous essays*).

M. Steinschneider termine son article par quelques observations sur le nom, la ville natale et le temps de Zarkali. Il n'est pas parvenu à élucider complètement les deux premières questions. Le nom, qui ne se retrouve pas ailleurs dans les Ouvrages arabes, a paru déjà étrange à Al Kifti et, quant à la ville, le surnom de Kortubi (de Cordoue) n'est que l'addition d'un écrivain postérieur (Casiri). Nous sommes plus heureux quant au temps. Presque tous les témoignages s'accordent à placer Zerkali entre 1060 et 1080.

M. Steinschneider nous promet une liste complète des Ouvrages de Zerkali et une étude sur ses imitateurs ainsi que sur les mentions de ses Ouvrages par d'autres auteurs.

Henry (*Charles*). — Supplément à la bibliographie de Gergonne. (211-218).

C'est l'indication de quarante-trois Mémoires, publiés sans nom d'auteur dans les *Annales de Mathématiques* et qui doivent être attribués à Gergonne, d'après un exemplaire que le rédacteur légua à la Bibliothèque de la Sorbonne.

Wiedeman (*Eilardo*). — Sull'ottica degli Arabii. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (219-225).

Ce travail concerne surtout les Ouvrages du célèbre savant Ibn al Haitam, mieux connu sous le nom d'Alhazen; il s'appelait en réalité Abn Ali Mohamed ben el Hasan Ibn el Heitem el Basri. La dernière particule de son nom indique qu'il était originaire de Basra; il ne peut donc être rangé au nombre des auteurs arabes proprement dits, mais plutôt parmi les auteurs des peuples écrivant l'arabe; en ce temps, tout l'Orient écrivait en arabe comme l'Occident en latin.

Les grands mérites d'Ibn al Haitam en Optique étaient reconnus déjà par ses compatriotes. Ainsi Ibn Khaldûn l'appelle « le plus célèbre parmi les Musulmans qui ont écrit sur cette Science ». Il devient donc doublement curieux d'examiner ses œuvres; heureusement qu'elles ont été conservées jusqu'à nos jours, à très peu d'exceptions près. Il ne manque, en effet, qu'un seul des Traités cités Ibn Ali Osebiah comme appartenant à Ibn el Haitam. Ces ouvrages se trouvent dans deux manuscrits dont l'un est à Londres et l'autre à Leyde. Le manuscrit de Londres contient les articles optiques suivants :

1° Sur la lumière des étoiles;
2° Sur la lumière;

3° Sur les miroirs concaves paraboliques ;

4° Sur la lumière de la Lune;

tandis que celui de Leyde renferme l'*Optique* avec un Commentaire de Kamale'd din Abn'l Hasan al Farisi, suivi d'autres Essais physiques sur l'arc-en-ciel, sur les éclipses, les ombres, etc., le tout d'après Ibn al Haitam et Avicenne. Enfin on y trouve un extrait du manuscrit de Londres. L'un et l'autre manuscrit sont très bien écrits, mais les dessins sont bien supérieurs dans celui de Leyde.

Voici les points sur lesquels l'auteur a insisté :

I. On trouve dans le manuscrit de Leyde un dessin de l'appareil employé par Ibn al Haitam pour déterminer l'indice de réfraction.

II. Dans l'introduction au Traité sur la sphère ardente, on trouve un théorème d'après lequel l'angle de réfraction du verre est plus petit que la moitié et plus grand que le quart de l'angle de l'incidence; la preuve en est faite d'après Ptolémée. L'auteur y a joint une table des angles de réfraction, correspondant à divers angles d'incidence, pris de 5 en 5°. Le manuscrit, corrompu en cet endroit, ne permet pas de déterminer comment on était arrivé à connaître les résultats, exprimés en degrés, minutes et secondes; toutefois, M. Wiedemann estime que la méthode est probablement identique avec celle qu'a décrite Ibn al Haitam dans son *Optique*.

III. Ibn al Haitam s'est aidé de Ptolémée. Il le cite manifestement quand il s'agit de prouver qu'en passant d'un corps dans un autre plus dense le rayon de lumière s'approche de la perpendiculaire, tandis qu'il s'en éloigne en passant dans un corps plus rare.

IV. Un passage dans le manuscrit de Londres prouve qu'une série de progrès importants dans la théorie des miroirs sphériques, attribués généralement à Roger Bacon, avaient été déjà l'œuvre d'Ibn al Haitam. Ce dernier étant très connu dans l'Occident, il est très probable que le moine anglais lui a emprunté cette part de ses connaissances.

Henry (*Charles*). — Notice sur un manuscrit inédit de Claude Mydorge (271-278), suivi des Extraits du Traité de Géométrie de Claude Mydorge (Manuscrit fonds français, n° 656, de la Bibliothèque Nationale de Paris). (279-350).

C'est une publication de 1008 énoncés de problèmes graphiques se rapportant à la Géométrie élémentaire; les solutions les plus intéressantes seront données dans le tome XVI.

Govi (*Gilberto*). — Alcune lettere inedite di Galileo Galilei. (351-379).

Ces lettres proviennent, à l'exception d'une seule, de la bibliothèque ambrosienne et sont adressées à son fondateur, le célèbre cardinal Federigo Borromeo. Trois d'entre elles sont destinées à accompagner des envois d'ouvrages nouvellement imprimés du savant florentin; les lettres à Welser sur les taches solaires (1613), le discours sur la comète (1619) et le *Saggiatore* (1623). La lettre imprimée sous le n° 3 nous montre qu'en 1617 le cardinal avait encore des doutes sur l'emploi du télescope; Galilée, alité par la fièvre, se fait fort de les lever à la prochaine entrevue. La sixième lettre est adressée à Raffaello

Staccoli, auditeur du duc Ferdinand II de Toscane. Elle porte la date de 1631 et provient des archives des Médicis. Galilée y exprime son opinion sur un plan de canalisation de l'Arno, soumis au grand-duc par un certain Coccapani. Il estime qu'il faut accorder à l'inventeur les privilèges demandés, mais seulement après qu'il aura fait connaître plus spécialement les moyens dont il entend se servir.

Ces lettres sont surtout intéressantes par les commentaires de M. Govi. C'est ainsi que, à propos des lettres sur les taches solaires, il nous fait l'historique de la brouille de Galilée avec le P. Scheiner. Ce sont les attaques du Père qui furent l'origine des lettres de Galilée, adressées, comme celles de son adversaire, à Marcus Welser, duumvir d'Augsbourg. L'impression de ces lettres fut surveillée à Rome par le prince Federigo Cesi. Le cardinal Borromeo, par une lettre qui a été conservée, remercia fort courtoisement le philosophe de son attention. Il était évidemment très bien disposé à son égard; cependant il avait encore quelques doutes. Une lettre de Cavalieri, que M. Govi a trouvée dans la Bibliothèque Nationale de Florence, et dont il publie le passage essentiel, nous apprend que le cardinal s'attendait à voir les étoiles fixes agrandies par le télescope à peu près comme les planètes.

Dans le commentaire sur la quatrième lettre, l'auteur retrace l'histoire du malentendu qui survint entre Galilée et les jésuites du Collège Romain. Le philosophe avait été aigri contre cet ordre par les démarches du P. Scheiner, par une thèse soutenue contre lui, en 1611, à l'Université de Mantoue : *Sur la hauteur des montagnes de la Lune*, et surtout par la condamnation du système de Copernic, prononcée grâce à l'influence du jésuite cardinal Bellarmin. Il saisit donc l'occasion de se venger. Le P. Grassi, du Collège Romain, avait publié une brochure anonyme : *De tribus cometis anni* 1618, *disputatio astronomica*. Galilée la fait suivre d'un *Discorso sulle comete*, publié sous le nom de son élève Guiducci, mais dont il ne fait pas de difficulté de reconnaître la paternité dans la lettre à Federigo Borromeo. Il y attaqua assez vivement quelques opinions émises par Grassi. Cette attaque fit un très mauvais effet à Rome; une lettre Ciampoli vient nous le prouver. Grassi répondit peu après par la *Libra astronomica*, publiée à Pérouse. Il dirigea ses attaques directement contre Galilée, quoique celui-ci ne se fût pas nommé dans le *Discorso*. C'est ainsi qu'il provoqua le célèbre savant à entrer en lice. Galilée ne manqua pas de répondre à l'appel : il répliqua par le célèbre *Saggiatore*.

C'est de cet Ouvrage que M. Govi traite spécialement dans son commentaire sur la cinquième lettre. Il s'applique spécialement à éclaircir l'affaire de Stigliani. Ce dernier avait été chargé par Galilée de corriger les épreuves imprimées à Rome. Il s'était si mal acquitté de sa tâche, que Galilée fut obligé de faire imprimer séparément, à Florence, un errata comprenant 209 fautes. Mais, en outre, il avait eu l'audace inouïe d'interpoler un passage où il se faisait comparer à Dante par Galilée qui n'avait jamais lu ses Ouvrages. Il eut également l'audace de nier cette interpolation; mais, outre le témoignage d'un contemporain, Giralama Aleandri, voici que le manuscrit original du *Saggiatore* vient confirmer cette allégation. Ce manuscrit, qui est en possession de M. Govi, est écrit, il est vrai, par un secrétaire de Galilée; mais il porte des annotations de sa propre main. Or on n'y trouve pas le passage en question.

D'ailleurs, le *Saggiatore* ne fut pas la seule réponse aux attaques du [illegible] même, Guiducci fit paraître une *Lettre au P. Tarquinio Gal-*



est également en état de nous fournir des explications très co
à trouver dans les archives de Florence les requêtes présenté
au Grand-Duc et les réponses qui lui furent faites. Il les re
ment. Il paraît que tout dépendait de Galilée chargé officielle
de l'affaire. Son avis ne semble pas avoir été favorable. Aus
très probablement avorté.

Le travail de M. Govi contient encore une foule de rensei
personnages inconnus, comme le Dr Giggi, le marquis d'Oriol
dans les lettres et intéressants pour leurs relations avec Galil

Aristide Marre. — Appendice au Triparty en
nombres de Nicolas Chuquet Parisien. (413-460)

1. La plupart des problèmes contenus dans cet Appendice s
de la *Règle des premiers,* appellation de l'Algèbre qui appart
à Nicolas Chuquet.

2. Les emprunts faits par Estienne de la Roche au man
fonds français de la Bibliothèque nationale de Paris ne se
147 feuillets du Triparty : on en constate partout, du premier
et particulièrement dans les feuilles numérotées 148-208. P
énoncées dans l'Appendice, il en est un très grand nombre
mot pour mot dans les deux éditions du livre d'Estienne de l

3. Le problème n° 105 de l'Appendice met en lumière l'exis
maticien français du XVe siècle, maistre Barthélemy de Romar

Dr. D. Bierens de Haan. — Bibliographie néerl
rico-scientifique des ouvrages importants dont l
nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, sur les scien
tiques et physiques, avec leurs applications. (51
717).

Une bibliographie scientifique manquait jusqu'ici à la li
daise. M. Bierens de Haan vient combler cette lacune, après
bien des difficultés. Les bibliothèques publiques dans les Pays

chaque auteur quelques détails biographiques. Dans le volume pour 1881 la bibliographie va jusqu'à la lettre K.

Dr. Eilardo Wiedemann. — Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi. Pesi specifici. Traduzione del Dr. Alfonso Sparagna. (718-720).

Mahomed al Gaffari a composé en 917 de la Hegira (1511-1512 après J.-C.) un Ouvrage traitant *des choses naturelles précieuses.* M. Wiedemann y a trouvé un passage où se trouvent mentionnés les poids spécifiques de divers métaux et pierres précieuses, ainsi que la méthode de l'investigation. Les chiffres sont très exacts, ainsi que le prouve l'auteur en comparant, dans une table, les chiffres de Mohamed, ceux de deux autres auteurs arabes et enfin nos chiffres modernes. Quant à la méthode, on a employé celle du déplacement d'un volume d'eau dans un vase plein. La forme de ce vase a été conservée dans l'ouvrage d'Al-Khazînî intitulé : *Balance de la Sagesse.*

Maurice Steinschneider. — Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham. (721-740).

L'Ouvrage en question est mentionné par Jehnda ben Samuel ben Ablas, auteur juif du XIIIe siècle. Dans le chapitre XV de son livre, *Jaïr Netib,* Jehnda recommande comme recueil astronomique le livre d'Abn li Aben Haitham. C'est évidemment l'ouvrage en question. Nous n'en possédons plus l'original arabe. Mais en revanche on en a trouvé quatre traductions dont deux latines et deux hébraïques. L'auteur examine minutieusement ces traductions et les manuscrits dans lesquels elles se trouvent.

1. Une version latine faite d'après la version espagnole dressée, par l'ordre d'Alphonse d'Espagne, par le juif Abraham.

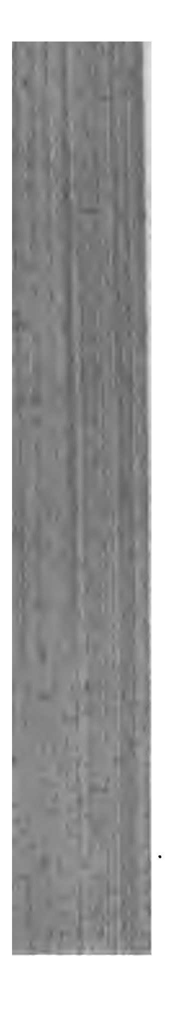
2. Une version hébraïque par Jacob ben Machir (Prophatius), qui se trouve dans un grand nombre de manuscrits (M. Steinschneider en cite huit). Dans plusieurs de ces manuscrits le traducteur n'est pas nommé, de sorte qu'on a pu commettre toute sorte de confusion dans les catalogues. Un seul manuscrit (celui du Vatican) est précédé d'une préface du traducteur, qui permet de préciser plusieurs points de sa biographie, entièrement inconnue jusque-là.

3. La version latine d'Abraham de Balmes, d'après la traduction de Jacob, pour le cardinal Grimani.

4. Une seconde version hébraïque, faite par Salomo Ibn Pater Kohen, médecin de Burgos, dont il existe quatre manuscrits.

La traduction de Jacob ben Machir n'est pas divisée en chapitres numérotés; cependant on y distingue différentes rubriques commençant invariablement par les mots : *Traité* (*Ma'arnar*) *sur,* etc. M. Steinschneider donne leurs titres. Leur examen suffit pour prouver que l'ouvrage d'Ibn al-Haitam n'est pas une cosmographie comme celui d'Al-Fergani, mais plutôt un livre spécial d'Astronomie.

La version latine que nous avons marquée comme n° 1 se distingue des autres par sa division en chapitres. Il y a aussi une table des matières; mais dans le seul manuscrit que nous possédions de cette version (il se trouve dans la Bibliothèque Bodléienne, à Oxford), l'énoncé ne commence qu'au chapitre XXVII. Plusieurs chapitres, d'ailleurs, de cette traduction ne se retrouvent



L'ouvrage d'Ibn al Haitam, quoique très spécial, n'était pr abrégé; au moins Averroès, dans son abrégé de l'Almageste (par une traduction hébraïque de Jacob Anatoli) le classe livre est d'ailleurs cité par Levi ben Gerson (ou Leo de B commentaire d'Averroès. Il paraît que Levi avait vu la traduc

Ce travail est complété par la publication d'extraits de plu scrits précités.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. CLEBSCH u gegenwärtig herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER ([1])

Tome XVII; 1880.

Wedekind (*L.*). — Le rapport anharmonique et l'in des formes binaires biquadratiques. (1-20).

Comme suite à ses travaux antérieurs ([2]), l'auteur donne u du rapport anharmonique et de l'invariant absolu pour une non réglée du second ordre; et en particulier pour une sphère comment, pour une valeur particulière donnée $\lambda = (\cos\omega)^2$, construire géométriquement et se calculer analytiquement. Cet est appliquée à quelques questions relatives aux intégrales e positions harmoniques et équiharmoniques sont discutées avec

Rosanes (*J.*). — Sur la théorie des coniques. (21-3

Trois coniques f, φ, ψ, situées dans un même plan, peuvent t un théorème d'Hermite, être considérées comme polaires co points ξ, η, ζ, par rapport à une courbe du troisième ordre ainsi que les trois points, est susceptible d'une seule détermi existe, entre les points et les coniques, cette relation, que la p par rapport à φ est identique à la polaire de η par rapport à exprimera par les équations

encore vérifiées par deux autres systèmes de trois points. Ces trois systèmes de trois points sont, dans leur position respective, soumis à trois conditions, de telle sorte que sept de ces neuf points peuvent être choisis à volonté, tandis que le huitième et le neuvième sont alors des points de deux droites coordonnées projectivement. Réciproquement, si ces trois relations de position ont lieu entre neuf points, on pourra déterminer les coniques correspondantes f, φ, ψ.

Gall (*von*). — Le système de formes complet d'une forme binaire de huitième ordre. (31-51). — Sur le système complet d'une forme binaire de huitième ordre. (139-152). — Extrait d'une Lettre à la Rédaction des *Mathem. Annalen.* (456).

En se fondant sur les méthodes développées par Gordan (*Binäre Formen*, Leipzig, 1875), l'auteur donne le système de la forme binaire du huitième ordre, en le réduisant, dans son premier Mémoire, à 96 formes. Après avoir pris connaissance du tableau publié par Sylvester dans l'*American Journ. of Math.*, et qui contient 70 formes, l'auteur parvient, dans les articles suivants, à réduire le système à 71 formes, de sorte qu'il ne diffère plus maintenant du résultat obtenu par Sylvester que relativement à une seule forme, qu'il considère comme irréductible.

Klein (*F.*). — Sur la définition géométrique de la projectivité pour les figures fondamentales du premier degré (*Stufe*). (52-54).

Darboux (*G.*). — Sur le théorème fondamental de la Géométrie projective. (Extrait d'une Lettre à M. Klein). (55-61; fr.).

Les fondements de la Géométrie établis par v. Staudt reposent essentiellement sur ce théorème : « Si deux séries d'éléments se correspondent de telle manière qu'à quatre éléments quelconques de l'une des séries, formant une proportion harmonique, correspondent quatre éléments également en rapport anharmonique, la correspondance est définie par cette unique propriété, et elle coïncide avec la transformation homographique ». Tandis que M. Klein, en mentionnant il y a quelques années ce théorème ([1]), avait cru devoir compléter la démonstration de v. Staudt par la condition que, de la correspondance de deux séries, que l'on peut construire, d'un nombre infini d'éléments, on puisse toujours conclure aussi la correspondance des éléments-limites corrélatifs; M. Darboux fait voir, par la voie analytique aussi bien que par la Géométrie, que le théorème en question peut être démontré en toute rigueur sans admettre de nouvelles hypothèses.

Klein (*F.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques du module. (62-70).

Ce Mémoire expose les points de vue généraux sous lesquels l'auteur a déjà traité, dans des travaux antérieurs ([2]), la théorie des fonctions elliptiques du

---

([1]) *Mathem. Annalen*, t. VI et VII.
([2]) *Mathem. Annalen*, t. XIV et XV.

module, et a pour but de développer les principes fondamentaux d'une théorie générale de ces fonctions. Il s'agit ici de *toutes* les fonctions uniformes d'une variable ω, qui restent invariables par les substitutions linéaires à coefficients entiers de déterminant égal à 1,

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Ces substitutions peuvent se classer suivant trois points de vue différents : 1° d'après les sous-groupes qu'elles contiennent; 2° d'après la nature arithmétique des coefficients de la substitution; 3° d'après le genre (la connexion) du polygone fondamental correspondant à un sous-groupe. C'est surtout la dernière classification qui est importante dans la théorie des modules appartenant à un groupe. Si l'on a $p = 0$, on pourra choisir un module algébrique correspondant de telle sorte que ce module ne passe qu'une seule fois par une valeur donnée quelconque dans l'intérieur du polygone fondamental. Mais, si l'on a $p > 0$, il faudra, pour désigner le point unique du polygone, considérer au moins deux modules à la fois, entre lesquels existera alors une équation du degré p correspondant. Dans le premier cas, on a un module principal; dans le second, on en a plusieurs, formant un sytème complet. Tous les modules appartenant au sous-groupe peuvent s'exprimer rationnellement, pour $p = 0$, au moyen du module principal, et dans les autres cas au moyen des modules du système complet. Si, de plus, ω' et ω sont liés entre eux par une substitution d'un sous-groupe désigné, alors, dans le cas de $p = 0$, il est non seulement nécessaire, mais encore suffisant que le module principal calculé pour ω coïncide avec le module principal calculé pour ω'. Mais si l'on a $p > 0$, la même conséquence exige l'égalité de tous les modules d'un système complet. L'auteur cite pour exemples l'invariant absolu comme module principal de toutes les substitutions de ω, la racine $\nu^{\text{ième}}$ du $\varkappa^2$ de Legendre, l'irrationalité icosaédrique comme module principal du cinquième degré (*Stufe*), et le système complet des modules du septième degré. En outre, dans la seconde partie de son travail, il fait voir comment ces idées générales peuvent s'appliquer à la théorie des transformations.

Gierster (*J.*). — Sur les relations entre les nombres de classes des formes quadratiques binaires de déterminant négatif. (Première et seconde Note). (71-84).

Les huit formules que M. Kronecker a établies entre les nombres de classes des formes quadratiques de déterminant négatif sont tirées des équations modulaires ordinaires par une formation de résultantes. C'est dans le même sens que l'auteur, dans sa première Note, étudie les équations modulaires des corps réguliers, en particulier celle qui appartient à l'icosaèdre. Dans la seconde Note, il se pose le problème d'aborder la même question d'une manière analogue pour les formes, en nombre infini des équations modulaires construites par Klein. Dans les correspondances modulaires de degré (*Stufe*) *m*, le nombre des coïncidences est compté de deux manières, une fois arithmétiquement, l'autre fois algébriquement. Le dénombrement arithmétique, qui, dans le présent travail, est effectué pour un degré égal à un nombre premier quelconque, fournit une somme de nombres de classes. Le dénombrement algébrique, au contraire, est d'abord restreint au cas où les modules de congruence considérés sont des modules principaux. On obtient alors une suite de relations entre des

nombres de classes, parmi lesquelles figurent aussi les formules de Kronecker. Les résultats généraux sont calculés pour le septième degré (*Stufe*).

***önig* (*J.*).** — Développement en série suivant les fonctions de Bessel. (85-86).

Remarque sur le Mémoire de M. Souine (*Math. Ann.*, t. XVI), avec renvoi à la représentation donnée par l'auteur (*Math. Ann.*, t. V) des fonctions sous forme de séries infinies.

***Brill* (*A.*).** — Sur le théorème d'addition et le problème de l'inversion des fonctions elliptiques. (87-102).

L'auteur fait voir comment l'introduction des fonctions Z et Θ de Jacobi se déduit avec facilité de l'intégrale de troisième espèce, en partant de cette intégrale comme forme normale, exprimée par une intégrale double.

***Brill* (*A.*).** — Sur les points d'inflexion des courbes du quatrième ordre ayant des points doubles. (103-106 et 517-522).

Les douze points d'inflexion d'une courbe du quatrième ordre à deux points doubles peuvent être considérés comme points fondamentaux d'un faisceau doublement infini de courbes du quatrième ordre. Dans les deux Notes en question, l'auteur nous montre comment on peut former l'équation de ce faisceau.

***Schur* (*F.*).** — Sur la théorie des complexes de rayons du second ordre. (107-109).

« Si une forme quadratique de six variables représente un complexe de droites du second degré en coordonnées ponctuelles de droites, ses formes adjointes, qui au moyen du facteur variable constituent un faisceau simplement infini, représenteront, en coordonnées tangentielles de droites, les complexes du second degré avec la même surface de singularité. »

***Marx* (*W.*).** — Démonstration synthétique du théorème d'Euler sur les rayons de courbure. (110-114).

***Cayley* (*A.*).** — Sur un théorème relatif aux fonctions Θ multiples. (115-122; ang.).

Démonstration de ce théorème :

$$e^{-n(u_1,\ldots;\mu',\nu')}\,\Theta(u_1+2\varpi'_1;\ \mu,\nu)=e^{-2\pi i\Sigma\mu_\alpha\nu'_\alpha}\,\Theta(u_1,\ldots;\ \mu+\mu',\nu+\nu').$$

Les fonctions Θ dépendent de la fonction quadratique générale

$$G(u_1,\ldots,u_\rho;\ n_1,\ldots,n_\rho)$$

de 2ρ variables, et les caractéristiques $\nu_1,\ldots,\nu_\rho;\ \mu_1,\ldots,\mu_\rho$ sont des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires.

***Harnack* (*Ax.*).** — Sur la série trigonométrique et sur la représentation d'une fonction arbitraire. (123-132).

La nouvelle méthode dont l'auteur s'est servi, dans ce Mémoire, pour établir les principes généraux de la théorie des séries de Fourier est plus complète-

ment développée dans le tome XIX des *Math. Ann.* et dans le *Bulletin des Sc. math. et astron.*

Klein (*F.*). — Sur les formes normales en nombre infini de l'intégrale elliptique de première espèce. (132-138).

L'intégrale normale de Legendre

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

se présente dans la classification de l'auteur comme une intégrale de second degré (*Stufe*), parce que le module du second degré y apparaît comme unique constante. On obtient des formes normales aussi légitimes de degré supérieur, en partant de la représentation des fonctions doublement périodiques donnée par Hermite :

$$\rho x_0 = \sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n),$$
$$\rho x_1 = \sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho x_{n-1} = \sigma(u-n_1)\sigma(u-n_2)\ldots\sigma(u-n_n),$$

que l'on peut interpréter comme une courbe elliptique dans l'espace de $n-1$ dimensions, ou, suivant l'expression de l'auteur, comme une courbe elliptique de $n^{\text{ième}}$ degré. Les intégrales elliptiques appartenant à ces courbes dépendent, dans chaque cas, d'*une seule* constante, qui est un module du troisième, du quatrième, du cinquième,... degré. Le moyen de calculer les formes normales (irrationnelles) repose sur le choix des constantes $a_i, b_i, \ldots, n_i$; on les prend égales aux $n^{\text{ièmes}}$ parties des périodes. Le troisième degré s'obtient à l'aide de la courbe plane du troisième ordre, et sa forme normale se déduit de la théorie des points d'inflexion. Pour le quatrième degré, on a affaire à une courbe gauche du quatrième ordre et à la théorie des plans osculateurs stationnaires. Pour le cinquième rang, la représentation algébrique dépend de l'intersection de cinq surfaces du second degré dans l'espace de quatre dimensions.

Schubert (*H.*). — Étude du triangle par la géométrie numérique. (153-212).

Comme il serait impossible de résumer en peu de mots le riche contenu de ce Mémoire, nous préférons renvoyer le lecteur au texte original.

Enneper (*A.*). — Sur une équation entre les fonctions ϑ. (213-216).

Démonstration des équations ([1])

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&-\vartheta'(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta'(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\&+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta'(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta'(z)\\&\quad=\vartheta'_1(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_1(z+x)\vartheta_1(x+y);\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \frac{d^2\tau}{dx^2}=\tau\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left[2k^2\sin^2\text{am}\,\frac{2Kx}{\pi}-(1+k^2)\frac{1}{\sin^2\text{am}\,\dfrac{2Ky}{\pi}}\right],$$

([1]) Hermite, *Comptes rendus*, t. LXXXV; 1877.

où l'on a

$$\tau = g\frac{\mathfrak{S}(x+\nu)}{\mathfrak{S}(x)}e^{-x\frac{\mathfrak{S}'_1(\nu)}{\mathfrak{S}_1\nu}};$$

$$(3)\quad kk'^2\frac{\sin\operatorname{am}u}{d\mathrm{K}} = \cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u\left[\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}-k'^2\right)+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right] - k^2\sin\operatorname{am}u\cos^2\operatorname{am}u.$$

Gordan (*P.*). — Sur le système de formes complet de la forme biquadratique $f_1 = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (216-233).

Cette forme biquadratique spéciale, importante pour la théorie des équations du septième degré, se change en elle-même au moyen de 168 substitutions linéaires, et par suite possède seulement quatre covariants linéairement indépendants. L'auteur, qui n'a pas encore publié sa démonstration du nombre fini des formes du système des formes biquadratiques ternaires générales, donne pour celles-ci le système total correspondant, lequel se compose de 54 formations. Le premier Chapitre contient les méthodes générales; le second commence à traiter la construction des formes pour la forme biquadratique *générale,* et poursuit cette recherche aussi loin qu'on peut le faire sans calculs trop prolixes. Dans le Chapitre III, il emploie les simplifications qui se présentent pour la forme particulière dont il s'agit, et il développe complètement les formes correspondantes.

Bianchi (*L.*). — Sur les formes normales du troisième et du cinquième degré (*Stufe*) de l'intégrale elliptique de première espèce. (234-262).

Ce travail contient un développement des théorèmes établis dans la Note de M. Klein, citée plus haut, sur les formes normales de l'intégrale elliptique, et en particulier l'auteur y développe la représentation algébrique de l'intégrale de cinquième degré au moyen de cinq formes quadratiques, dépendantes seulement de l'irrationnalité icosaédrique.

Noether (*M.*). — Sur la représentation invariante des fonctions algébriques. (263-284).

Dans la théorie des fonctions algébriques, une courbe algébrique

$$(1)\qquad f(s, z) = 0$$

est considérée, avec toutes les courbes qui peuvent s'en déduire par des substitutions rationnelles, uniformes réversibles, comme appartenant *à une même classe.* D'après cela, et en particulier dans la théorie des fonctions abéliennes, on a à résoudre le problème de représenter toutes les fonctions rationnelles σ de s et de z, sous la condition $f = 0$, c'est-à-dire toutes les fonctions algébriques σ de z appartenant à une classe, sous forme qui soit indépendante de la relation (1) choisie dans cette classe.

Les quotients des formes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre φ ont le caractère invariant, et il en est par suite de même pour toute fonction de ces quotients. Réciproquement, toute fonction rationnelle σ de s et z peut se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle homogène de dimension zéro par rapport aux φ, à la seule exception près du cas où $f = 0$ représente une courbe hyperel-

liptique, c'est-à-dire une courbe sur laquelle il existe une série linéaire de couples de points. Alors on n'a plus à s'occuper que de relations entre ces rapports des φ. Pour déterminer les dimensions du numérateur et du dénominateur de ces expressions dans les p fonctions φ, qui sont linéairement indépendantes entre elles, il faut traiter la question du nombre des relations d'un ordre quelconque μ entre les p fonctions. On fait voir que ce nombre reste constant dans tous les cas, et dépend uniquement du genre p de la classe; sa valeur est (le cas hyperelliptique étant seul excepté), pour l'ordre $\mu > 1$,

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\mu-1)}{\mu!}-(2\mu-1)(p-1).$$

Au § 5, l'auteur étudie les fonctions d'ordre μ des φ dans quelques cas spéciaux, et détermine le nombre des relations du $\mu^{\text{ième}}$ ordre dans le cas des courbes hyperelliptiques. Ce nombre a pour valeur

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\mu-1)}{\mu!}-\mu(p-1)-1.$$

Dans les § 6 à 7, on discute, comme exemple du mode de conception dont on a développé les principes, les courbes qui ont avec la courbe fondamentale, en tous les points d'intersection, un contact du premier ordre. On arrive ainsi à des résultats, relativement aux systèmes de courbes de contact, qui ont une bien plus grande extension que ceux que l'on pourrait obtenir par la seule considération des courbes adjointes.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (285-328).

Ce Mémoire traite des équations aux dérivées partielles entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z, telles que leur solution complète puisse s'exprimer au moyen de deux, de trois, ..., ou d'un plus grand nombre d'équations entre $z, x_1, \ldots, x_n$ et n constantes arbitraires; et l'auteur fait voir comment, étant donnée une équation aux dérivées partielles, on peut reconnaître si elle possède cette propriété. Les méthodes générales pour $n=3$ et $n=4$ sont développées dans le cas particulier de deux équations intégrales.

Freyberg (*J.*). — Équation pour la détermination des points de contact des tangentes doubles des courbes du quatrième degré, (329-331).

Cette Note renferme une exposition très claire et très simple du calcul de Hesse pour la représentation de la courbe bien connue du quatorzième ordre, sous forme symbolique.

Mayer (*A.*). — Sur les intégrales générales des équations différentielles de la Dynamique, et leur réalisation par les méthodes de Lie. (337-354).

L'auteur dit, dans son Introduction : « Pour le mouvement d'un système de points matériels, soumis seulement à des attractions intérieures, et pouvant se mouvoir comme un corps solide libre, les principes généraux de la Mécanique

fournissent dix intégrales. Ces dix intégrales se partagent en deux groupes, de caractère tout à fait différent. Le premier groupe se compose seulement de l'unique intégrale de la force vive, laquelle (jointe aux équations de condition qui peuvent exister dans le système, ainsi qu'aux positions et aux vitesses initiales données pour les points) contient toutes les données nécessaires pour la détermination univoque du mouvement, et par suite est elle-même nécessairement, à elle seule, l'expression analytique du problème dynamique. Le second groupe est formé de trois intégrales des aires et des six intégrales du centre de gravité qui ont lieu sans aucun changement, de quelque manière que la fonction des forces soit exprimée au moyen des distances mutuelles des points. Ces dernières intégrales, ne correspondant pas seulement à un problème de Dynamique, mais à une infinité de problèmes, ne sont pas nécessairement uniques. La réponse à la question de savoir s'il existe encore d'autres intégrales générales de cette seconde espèce est le sujet du premier paragraphe de ce travail.

A la démonstration de la non-existence d'autres principes généraux de Mécanique de même nature que les principes cités se rattache ensuite, dans les paragraphes suivants, cette seconde question : Jusqu'à quel point, dans l'état actuel des méthodes d'intégration, peut-on, au moyen de ces intégrales générales, pousser la solution d'un problème de la dynamique d'un système de points matériels? Lie a donné la réponse à cette question pour le problème des trois corps ou pour un système de points libres. Pour un système restreint par des équations de condition, la réponse s'obtient, d'une manière claire et évidente, par un calcul fondé sur un théorème de Jacobi ([1]), et donné par Mathieu ([2]). Toutefois, il faut encore, pour la démonstration du théorème, des développements de calculs considérables. Le théorème général donné par Lie ([3]) est déjà en réalité suffisant à lui seul pour répondre à la question proposée.

Cantor (*G.*). — Sur les multitudes de points groupés en ligne droite. (355-358).

Suite de l'article publié dans le tome XV.

La présente Note se rapporte à un groupe de points du second genre, c'est-à-dire qui ne possèdent pas un nombre fini de groupes dérivés. L'auteur fait voir comment on peut ici détacher de la série infinie des dérivées de nouveaux groupes de points, en extrayant le groupe des points communs à tous les dérivés. Il en résulte un groupe, que nous désignerons par $P^{(\infty)}$, et au moyen duquel on pourra former de la même manière de nouveaux groupes. On remarquera aussi l'exemple qui montre qu'un groupe de points du second genre ne doit, dans aucun intervalle aussi petit que l'on voudra, être *dense en tout lieu*.

Gordan (*P.*). — Sur la représentation typique de la forme ternaire biquadratique $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (359-378).

Après avoir développé, dans le Mémoire analysé plus haut, le système complet de cette forme biquadratique, l'auteur résout, dans le premier Chapitre du présent travail, le problème d'exprimer toute forme rationnelle au moyen d'un

---

([1]) *Journal de Borchardt*, t. LX.

([2]) *Journal de Liouville;* 1874. — *Dynamique analytique;* 1878.

([3]) *Mathem. Annalen*, t. XI.

système de formes associées. Un tel système se compose, dans le cas présent, de la fonction f, d'un invariant i, de trois covariants ψ, Δ, Ω, du sixième, du quatorzième et du vingt et unième degré respectivement, et de deux formes intermédiaires linéaires, qui sont, par rapport aux x, des degrés respectifs 8 et 9, et de la forme intermédiaire identique u_x.

Dans le Chapitre II, on démontre que la forme biquadratique spéciale considérée est complètement caractérisée par la condition

$$f_\psi^2 - \frac{i}{8} u_x^2 = 0,$$

et donne la solution du problème de transformer une fonction f, d'ailleurs quelconque, satisfaisant à cette condition, dans la forme canonique

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1.$$

Enfin, le problème généralisé : *Étant données les valeurs numériques des formes canoniques f, Δ, ψ, Ω, satisfaisant à la relation numérique qui doit exister entre elles, déterminer les inconnues x_1, x_2, x_3,* est complètement résolu au moyen de la représentation type, sous forme explicite.

Markof (*A.*). — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (379-399; fr.).

« L'auteur a démontré, dans son premier Mémoire ([1]), qu'à toute classe de formes binaires quadratiques de déterminant positif donné correspond une certaine suite de nombres positifs entiers

$$(J) \qquad \ldots, \alpha_{-\xi}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

et réciproquement; le rapport entre $2\sqrt{D}$ et le minimum de ces formes est égal au maximum de la somme

$$\alpha_x + \cfrac{1}{\alpha_{x+1} + \cfrac{1}{\alpha_{x+2} + \ddots}} + \cfrac{1}{\alpha_{x-1} + \cfrac{1}{\alpha_{x-2} + \ddots}} = \frac{2}{L_x},$$

où l'indice x est un nombre variable.

» Après avoir fait différentes suppositions relativement à la suite (J) et avoir fait varier l'indice x, on arrive aux résultats suivants :

» Pour chaque nombre positif $l \leqq \frac{2}{3}$, on peut trouver une infinité de suites (J) satisfaisant à la condition $L_x \geqq l$, pour tout indice x.

» A tout nombre positif $l > \frac{2}{3}$ correspond un nombre limité de suites (J), satisfaisant à la condition $L_x \geqq l$, pour tout indice x.

» Si la suite (J) satisfait à la condition $L_x \geqq l > \frac{2}{3}$, pour tout indice x il lui correspond dans ce cas un certain système, composé d'un nombre limité de suites W, V, ..., S, R, dont l'une W ne contient pas de termes égaux w_0, toutes les suivantes se déduisant les unes des autres par une formule donnée.

([1]) *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies* (*Math. Annalen*, t. XV).

» Dans ce second Mémoire, l'auteur détermine la période de la suite (J) et le maximum de la somme $\frac{2}{L_x}$, les nombres ϖ^0, v^0, ..., s^0, r^0 étant connus. »

Neumann (*C.*). — Les principes de l'Électrodynamique. (400-434).

Ce Mémoire, imprimé depuis l'année 1868 ([1]), contient essentiellement deux études de principes importantes pour les lois des phénomènes électriques. D'abord l'auteur fait la supposition que la tendance au mouvement d'un point fixe vers un autre, représentée par le potentiel, se transmet, non pas instantanément, mais progressivement, et se propage ainsi dans l'espace avec une certaine vitesse constante, extrêmement grande. De cette hypothèse et de la supposition que le principe d'Hamilton se réalise sans restriction, résulte la réalité de la loi de Weber. Il montre en second lieu que cette loi se fonde sur un potentiel, duquel, par la variation relativement aux coordonnées, on peut déduire, absolument comme on le fait du potentiel newtonien, les composantes de la force par la différentiation. Il établit en même temps la conclusion qui admet le principe de la force vive pour la loi de Weber. Ces recherches sont enrichies en partie d'éclaircissements que Riemann avait exposés dans ses leçons (professées en 1861 et publiées par Hattendorff en 1876). Cependant l'auteur, dans un Appendice, fait remarquer avec raison que l'idée de l'introduction d'un potentiel électrodynamique, en en déduisant les forces par la variation des coordonnées, a été publiée par lui pour la première fois, indépendamment de Riemann, dans une exposition détaillée.

Krause (*M.*). — Sur la transformation linéaire des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (435-447).

— Sur la multiplication des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (448-455).

La première de ces études a pour objet la composition de la transformation linéaire générale au moyen de six transformations de nature plus simple, et elle donne une Table de la transformation des seize fonctions θ. Dans le second Mémoire, l'auteur développe les formules de multiplication des fonctions θ, en se fondant sur le théorème d'addition, et, à l'aide de la transformation linéaire et de la substitution des demi-périodes, il déduit une série d'équations pour la détermination des coefficients.

Schubert (*H.*). — La relation trilinéaire entre trois figures fondamentales du premier degré (*Einstufigen Grundgebilden*). (457-472).

Trois figures à une dimension g, g', g'' sont dites *trilinéaires entre elles* lorsque, entre leurs éléments x, x', x'', il existe une équation

$$\begin{aligned} xx'x'' + ax'x'' + a'x''x + a''xx' \\ + bx + b'x' + b''x'' = C. \end{aligned}$$

([1]) *Gratulationsschrift der Tübinger Universität zum fünfzigjärigen Jubiläum der Bonner Universität.*

Le cas le plus simple d'une relation trilinéaire se produit sur trois séries rectilignes de points dans l'espace, lorsque, en dehors de ces suites, on prend un point fixe, et que l'on considère comme correspondants entre eux trois points situés dans un même plan que ce point fixe. Si les trois droites sont dans le même plan, la droite de jonction de deux points quelconques sur deux des droites coupera la troisième droite au point correspondant; les trois séries de points sont dites en relation rectiligne.

Dans ce Mémoire, l'auteur étudie : 1° les six éléments singuliers de toute relation trilinéaire; 2° les relations de rapports anharmoniques entre deux groupes ternaires d'éléments correspondants et les six points singuliers; 3° le caractère qui indique si une relation trilinéaire est rectiligne; 4° la construction linéaire d'un nouveau groupe ternaire; 5° les propriétés et la construction linéaire de la surface générale du troisième degré engendrée par trois faisceaux plans trilinéaires; 6° les dégénérescences des relations trilinéaires.

Dyck (*W.*). — Sur la formation et l'étude du groupe et de l'irrationnalité des surfaces régulières de Riemann. (473-516).

Une surface régulière de Riemann est définie comme une surface étendue en N feuilles sur le plan complexe, et qui, par un groupe de N transformations, consistant dans l'échange des feuilles, reprend sans altération son état primitif. Dans le présent travail, l'auteur expose les méthodes générales pour obtenir la propriété du groupe et sa composition au moyen de groupes partiels, ainsi que l'irrationnalité de la surface, d'après sa définition géométrique. Dans le dernier paragraphe, il traite spécialement comme exemple les surfaces régulières de genre 1 et leurs relations avec le problème de la transformation des fonctions elliptiques.

Dyck (*W.*). — Note sur une surface régulière de Riemann du genre 3 et sur la *courbe normale* du quatrième ordre. (510-516).

Il s'agit d'une surface à 96 feuilles, dont les feuilles se relient entre elles en un point par 12 groupes de 8 feuilles chacun, en un autre point par 32 groupes de 3, en un troisième par 48 groupes de 2. L'auteur discute son irrationnalité.

Mayer (*A.*). — Sur la solution donnée par Pfaff du problème de Pfaff. (523-530).

Recherche des conditions qui doivent être remplies pour que l'on puisse appliquer la méthode de Pfaff à l'intégration de l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_m dx_m = 0.$$

Scheibner (*W.*). — Sur les valeurs asymptotiques des coefficients du développement d'une puissance quelconque du rayon vecteur suivant l'anomalie moyenne (¹). (531-544).

(¹) Une traduction anglaise de cet article a paru dans l'*Astronomical Journal* de Gould, Cambridge (Mass.) : août 1856.

Scheibner (*W.*). — Sur les valeurs asymptotiques des coefficients dans les développements ordonnés suivant l'anomalie moyenne (¹). (545-560).

Ces articles contiennent une méthode générale très élégante pour la détermination asymptotique des coefficients des développements en séries suivant l'anomalie moyenne, en particulier pour l'équation du centre, problème traité déjà par Carlini (Milan, 1817), puis repris par Jacobi. Laplace l'a partiellement résolu dans le tome V de la *Mécanique céleste*.

Königsberger (*L.*). — Extension du théorème d'Abel sur la forme des intégrales de fonctions algébriques qui admettent une expression algébrique ou logarithmique. (561-564).

Klein (*F.*). — Sur certaines valeurs partielles des fonctions Θ. (565-574).

Schubert (*H.*). — Remarque sur la détermination du nombre des lignes torsales d'une surface réglée. (575-576).

Tome XVIII; 1881.

Schur (*F.*). — Sur les courbes et les surfaces engendrées par des figures fondamentales collinéaires. (1-22).

Ces recherches concernent la génération des surfaces du troisième ordre au moyen de trois systèmes plans (*Ebenenbündel*) collinéaires et des courbes planes du troisième ordre au moyen de trois systèmes plans collinéaires; elles montrent que, inversement, une courbe du troisième ordre, ou une surface du troisième ordre, peut être engendrée, et cela d'une infinité de façons, au moyen de systèmes collinéaires. D'une façon plus précise, on est conduit pour les courbes à trois réseaux de coniques dont la courbe triple est la courbe du troisième ordre et, pour les surfaces du troisième ordre, à une surface du second degré, relativement à laquelle les droites d'un double-six de Schlaefli (*Schlaefli'sche Doppelsechs*) sont polaires réciproques. Au moyen de quatre systèmes de plans (*Ebenenbündel*) collinéaires, on engendre une courbe gauche du sixième ordre, de troisième espèce, avec 7 points doubles apparents. Ces courbes constituent une multiplicité 24^{uple}. Outre ces courbes, l'auteur étudie les courbes du sixième ordre formées de points qui sont les points conjugués d'un plan par rapport à un faisceau de surfaces du second degré. Il est ainsi amené à la détermination d'un faisceau de surfaces du second ordre qui constituent les premières polaires des points d'un plan par rapport à une surface du troisième ordre. Finalement il étudie les surfaces du quatrième ordre engendrées par quatre systèmes collinéaires dans l'espace. Il montre ainsi que les surfaces dépendent de 33 constantes.

(¹) Extrait des *Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*; mai 1856.

Zeuthen. — Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (33-68).

Dans le célèbre Mémoire intitulé : *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracés sur l'hyperboloïde à une nappe* (*Comptes rendus*, t. LIII), M. Chasles rapporte les courbes d'une surface du second ordre à un système de coordonnées sur la surface. Une valeur donnée de l'une ou de l'autre des coordonnées détermine une génératrice de l'une ou de l'autre des deux séries. Ces coordonnées peuvent servir aussi à établir une projectivité entre deux figures sur la surface. Si x, y sont les coordonnées d'un point quelconque de l'une des figures, on déterminera le point correspondant de l'autre, soit par

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad y' = \frac{ay + b}{cy + d},$$

soit par

$$x' = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad y' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Les nouvelles coordonnées x' et y' déterminant respectivement des génératrices de la même série que x et y, on voit qu'il existe deux espèces de figures projectives. Nous verrons que dans les deux cas elles sont projectives dans le sens propre du mot, l'une pouvant être formée de l'autre par une suite de projections centrales successives, et qu'elles sont les seules figures sur une surface du second ordre qui méritent ce nom.

Les propriétés des figures projectives que nous déduirons, dans le § 2, d'une définition géométrique identique à la définition analytique que nous venons de donner, sont applicables, non seulement au cas où la surface a des génératrices réelles, mais aussi à celui où la surface a des génératrices imaginaires, ce qui n'empêche pas les figures d'être réelles. Seulement, dans une partie des constructions indiquées dans le § 2, on fait usage d'éléments qui sont imaginaires dans ce cas; dans le § 3, nous y substituons des opérations réelles.

Les applications de la théorie des figures projectives sur une surface du second ordre sont analogues à celles de la théorie des séries projectives de points d'une conique plane. Le problème de l'inscription de polygones dont les côtés passent par des points donnés se résout aussi pour une surface par trois essais (§ 4), et la théorie de ces polygones présente beaucoup d'analogie avec la théorie connue de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique plane. On trouve par exemple que, de même qu'il existe une relation entre les points d'intersection d'une droite avec une conique et avec les côtés d'un polygone inscrit à un nombre pair de côtés, il existera une relation entre la trace sur un plan d'une surface du second ordre et la trace d'un polygone inscrit à un nombre impair de côtes. Pour le cas d'un pentagone, cette même relation a été trouvée, mais exprimée d'une manière bien différente, par M. Paul Serret [1].

De même que le théorème de Desargues sur un quadrilatère inscrit à une co-

---

(1) *Géométrie de direction*, p. 571.

nique s'applique à la construction de la conique, celui dont nous venons de parler sur un pentagone inscrit à une surface s'applique à la construction de la surface (§ 6). Malgré la différence de la forme du théorème, la construction d'une courbe gauche du quatrième ordre par huit points, qui fait une partie principale de la construction de la surface, s'est montrée identique à celle de M. Serret ([1]), pendant que la construction que nous avons trouvée du huitième point commun aux surfaces du second degré passant par sept points donnés est différente de celle de M. Serret ([2]), mais aussi simple.

Notre sujet nous a semblé mériter d'être exposé d'une manière élémentaire, ce que nous avons essayé de faire dans les § 2-4 et 6-7, qui sont indépendants des § 1 et 5. Dans le § 1, j'ai exposé quelques considérations plus générales sur les transformations d'ordre supérieur d'une surface de second degré en elle-même, qui m'ont guidé dans mes premières études des figures projectives sur la surface. J'y démontre notamment une formule énumérative analogue à celle qui exprime le principe de correspondance plane, dont on aurait pu la déduire par une projection stéréographique, mais j'ai préféré en donner une démonstration directe. »

König (*J.*). — Sur les systèmes finis de formes dans la théorie des fonctions rationnelles. (69-77).

L'auteur résume ainsi le résultat général de ses recherches. Toutes les fonctions rationnelles d'un nombre quelconque de variables, satisfaisant à des conditions données quelconques, peuvent être exprimées rationnellement au moyen d'un nombre fini de telles fonctions, convenablement choisies.

König (*J.*). — Sur la théorie des résolvantes. (78-81).

Krey (*H.*). — Sur un cas particulier de la correspondance univoque des points de deux surfaces. (84-90).

Quatre équations homogènes biquaternaires :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) &= 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) &= 0, \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) &= 0, \end{aligned}$$

définissent un couple de surfaces liées l'une à l'autre d'une façon univoque; soient m_i, n_i les degrés respectifs de f_i par rapport aux x et aux y; les surfaces sont des ordres

$$m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3$$

et

$$n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3.$$

L'auteur détermine les nombres qui caractérisent les singularités des deux surfaces.

([1]) *Géométrie de direction*, p. 273.
([2]) *Géométrie de direction*, p. 314.

Pasch (*M.*). — Note sur les courbes rationnelles. (91-92).

L'équation d'une courbe rationnelle n'est autre chose que la relation algébrique qui existe entre les trois formes algébriques binaires; l'auteur la discute de ce point de vue.

Pasch. — Note sur les formes ternaires à déterminant fonctionnel évanouissant. (93-94).

Entre trois formes homogènes du $n^{ième}$ degré sans diviseur commun à déterminant fonctionnel nul, existe une équation irréductible de degré ν, d'espèce o, ν étant un diviseur de n.

Brill (*A.*). — Sur les courbes gauches algébriques qui ont la forme d'un lacs (¹). (95-98).

L'auteur donne des courbes gauches du quatrième, du sixième et du dixième ordre formées d'entrelacements susceptibles d'être réduits à un nœud.

Rohn (*K.*). — Sur les diverses formes de la surface de Kummer. (99-159).

Voir *Bulletin*, 2ᵉ série, t. V.

Klein. — Remarque sur les surfaces du quatrième ordre. (160).

L'auteur indique une surface du quatrième ordre composée de neuf parties réelles distinctes.

Mehler. — Sur une fonction voisine des fonctions sphériques et cylindriques et sur son application à la théorie de la distribution électrique. (161-194).

L'auteur montre d'abord comment la distribution de l'électricité sur un cône limité à son sommet, sous l'influence de forces électriques extérieures ayant leur point central sur l'axe; ou encore sur la surface engendrée par la révolution d'un segment de cercle autour de sa corde, peut être représentée d'une façon très simple au moyen d'une fonction très voisine des fonctions spécifiques et des fonctions cylindriques (fonctions de Fourier-Bessel) et satisfaisant à une équation différentielle de même forme que les dernières. M. Mehler désigne ces nouvelles fonctions sous le nom de *fonctions coniques;* elles permettent de résoudre les problèmes analogues pour les hyperboloïdes de révolution et pour deux calottes sphériques limitées à un même cercle. Les fonctions coniques sont définies, d'abord pour des valeurs réelles de θ et μ, par l'intégrale

$$K^{\mu}(\cos\theta) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\theta)}}.$$

Cette même définition s'étend aux valeurs imaginaires de μ et conduit en

(¹) Le mot *lacs* est pris dans le sens qu'il a dans l'expression *lacs d'amour*.

particulier à l'équation relative aux fonctions sphériques

$$P^n(\cos\theta) = K^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta).$$

La fonction cylindrique $I(xi)$ se présente comme cas limite, pour μ infiniment grand et θ infiniment petit, le produit $\mu\theta$ ayant une limite finie x.

Les fonctions coniques peuvent encore être représentées par l'intégrale suivante, qui subsiste aussi pour les valeurs imaginaires de μ,

$$K^\mu(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\theta)}}.$$

Cette représentation conduit à la nouvelle formule

$$P^n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\beta)}}.$$

Pour les fonctions cylindriques l'auteur appelle l'attention sur l'intégrale

$$I(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

qui peut être obtenue comme cas particulier de l'intégrale par lui donnée pour représenter K^μ. Le dernier paragraphe concerne le théorème d'addition pour les fonctions sphériques, et aussi la représentation des fonctions de deux variables par une intégrale triple, analogue à l'intégrale de Fourier : on parvient ainsi aux deux développements spéciaux

$$K^\mu(-y) = \frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y},$$

$$\frac{1}{x-y} = \pi\int_0^\infty \mu\,\frac{\tan g(\mu\pi i)}{i\cos(\mu\pi i)}\,K^\mu(x)K^\mu(-y)\,d\mu,$$

qui ont leurs analogues dans la théorie des fonctions sphériques.

Neumann (*C.*). — Sur les fonctions coniques de Mehler et sur leur application aux problèmes électrostatiques. (195-236).

Dans ce travail, l'auteur applique les fonctions coniques de Mehler au problème électrostatique pour une surface conoïde, c'est-à-dire pour la surface engendrée par la révolution d'un arc de cercle autour de sa corde, dans le cas où il n'y a point de forces extérieures et aussi dans le cas général où il existe de telles forces. Enfin l'auteur étudie des surfaces limitées d'une part par une surface conoïde, de l'autre par une surface sphérique.

Les fonctions coniques s'introduisent en exprimant l'inverse de la distance de deux points en coordonnées bipolaires. Ayant fixé deux points A, A' sur l'axe des abscisses à une distance a de l'origine, un point, situé au-dessus de l'axe des x, aux distances ρ, ρ' des deux pôles A, A', est défini par les deux équations

$$\frac{\rho}{\rho'} = e^{-\sigma}, \quad \text{angle}(\rho, \rho') = \omega;$$

on a en outre

$$\rho\rho' = \frac{4a^2}{2\cos i\theta - 2\cos\omega} = \frac{4a^2}{\psi},$$

les courbes $\omega =$ const. sont des arcs de cercle ayant AA' pour corde; les courbes $\theta =$ const. sont des cercles orthogonaux aux précédents.

Pour la densité électrique sur un conoïde de longueur d'axe $2a$, de paramètre ω, chargé d'électricité jusqu'à une tension donnée C, on parvient à l'expression suivante :

$$\Delta = C\frac{\Psi\sqrt{\psi}}{4\pi^2 a\sin\omega}\int_0^\infty \frac{dq\cos q\theta}{K_q(\cos\omega)},$$

et, pour la masse totale d'électricité, on a

$$M = C2a\int_0^\infty \frac{d_q C_q L_q(\cos\omega)}{K_q(\cos\omega)},$$

où

$$K_q(\mu) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \mu)}},$$

$$\alpha_q(\mu) = K_q(-\mu).$$

Le potentiel de la couche pour un point extérieur $(\theta_1, \omega_1, \psi_1)$ est

$$V = C\sqrt{\psi}\int_0^\infty \frac{d_q C_q K_q(\mu) L_q(\mu)\cos q\theta_1}{K_q(\mu)},$$

où

$$\mu = \cos\omega_1, \quad \theta_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}.$$

La déduction de ces formules repose sur une proposition générale de Calcul intégral relative aux fonctions circulaires, proposition que l'auteur a établie dans son Mémoire *Ueber die nach Kreis-, Kugel- u. Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen*. M. Neumann donne en outre des formules générales pour la distribution sous l'influence de forces extérieures données et discute le même problème pour un conducteur formé de deux sphères réunies par un conoïde.

Klein. — Sur les fonctions de Lamé. (237-246).

Les fonctions de Lamé relatives à l'indice n sont, abstraction faite d'un facteur où peuvent figurer les éléments λ, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$, des fonctions entières en λ^2. Il y en a $\tau + 1$ de même classe et de degré τ. On savait que les racines de l'équation $\varepsilon(\lambda) = 0$ étaient toutes réelles, distinctes et comprises entre 0 et c, b étant inférieur à c. En partant de considérations géométriques nouvelles, l'auteur montre comment se distribuent les racines de diverses fonctions dans les intervalles de 0 à b et de b à c; il montre qu'il y a toujours une et seulement une fonction admettant k racines dans le premier intervalle et $\tau - k$ dans le second, en sorte que les fonctions d'un même type se trouvent complètement distinguées par la distribution des racines dans ces intervalles.

Pour les fonctions générales de Lamé du $p^{\text{ième}}$ ordre, l'auteur montre d'une façon analogue comment les racines des fonctions appartenant à une même classe se distribuent dans les p intervalles.

Netto (E.). — Remarques sur les équations abéliennes. (247-251).

Dans ce travail l'auteur définit les équations les plus générales qui peuvent être résolues algébriquement par la méthode d'Abel.

Schur. — Sur le théorème fondamental de la Géométrie projective. (252-254).

Cette Note concerne la démonstration donnée par M. Darboux (*Math. Annal.*, t. XVII) du théorème fondamental de Staudt.

Stolz. — Rôle de Bolzano dans l'histoire du Calcul infinitésimal. (255-279).

Cet important travail historique est destiné à appeler l'attention sur les écrits en partie oubliés de Bernhard Bolzano. Bolzano est né à Prague en 1781, il y est mort en 1848; dans une suite de Mémoires publiés entre 1810 et 1817, il exposa les principes de l'analyse des fonctions réelles d'une façon nouvelle et y introduisit des notions dont l'importance ne peut plus être méconnue. Voici les titres des écrits dont il est question.

1. *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik.* 1. Lief. Prag, 1810.

2. *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erweisen.* Prag, 1816.

3. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen jezwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Prag, 1817.

4. *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.* Leipzig, 1817.

5. *Dr. Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky.* Leipzig, 1851.

Faà de Bruno. — Trois Notes sur la théorie des formes. (280-288).

I. Sur un théorème général dans la théorie des formes binaires.

Si dans une forme binaire on fait la substitution

$$x = pX + qY,$$
$$y = p'X + q'Y,$$

les opérations dites δ et δ_1 sont équivalentes aux opérations

$$p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq} \quad \text{et} \quad p\frac{d}{dp'} + q\frac{d}{dq'}.$$

II. Sur le jacobien des formes binaires.

III. Théorème général sur les déterminants fonctionnels.

Soit, en général, D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P & \Delta P & \Delta^2 P \\ Q & \Delta Q & \Delta^2 Q \\ R & \Delta R & \Delta^2 R \\ .. & ... & ... \end{vmatrix},$$

où chaque colonne est dérivée de la première par l'opération Δ quelconque répétée une, deux fois, etc., de suite et en sorte que la dernière colonne ne renferme que des constantes par rapport à Δ; on aura

$$\Delta D = 0.$$

Holzmüller (*G.*). — Étude complète d'une transformation isogonale représentée par une fraction du second degré. (289-318).

Il s'agit de la transformation définie par l'équation

$$Z = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

et de la transformation inverse

$$z = Z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Gierster (*J.*). — Les sous-groupes du groupe de Galois des équations modulaires pour le cas d'un degré premier de transformation. (319-365).

Le théorème suivant résume les résultats essentiels du travail de l'auteur : « En dehors des sous-groupes cycliques et métacycliques déjà connus, il ne peut y avoir de contenus dans le groupe de Galois de l'équation modulaire que trois espèces de sous-groupes : ce sont les groupes tétraédriques, octaédriques, icosaédriques de 12, 24, 60 substitutions et de plus il y a :

» Des groupes tétraédriques pour chaque degré de transformation q.

» Des groupes octaédriques pour $q \equiv \pm 1$, mod 8.

» Des groupes icosaédriques pour $q \equiv \pm 1$, mod 5. »

Rupp (*O.*). — Sur la dépendance entre les caractères d'une surface réglée définie par ses directrices et les caractères de ces directrices. (267-310).

L'auteur traite des surfaces réglées engendrées par une droite qui rencontre une fois trois courbes données, ou deux fois une courbe donnée et une fois une autre courbe donnée, ou trois fois une courbe donnée.

Rausenberger. — Théorie de la périodicité générale (379-417).

L'auteur appelle *fonction périodique* une fonction transcendante $F(x)$ jouissant de la propriété

$$F[\varphi_1(x)] = F(x),$$

où $\varphi_1(x) = y$ désigne une fonction algébrique quelconque de x, définie par une

équation $f(x, y) = 0$. Si une fonction admet l'équation de périodicité

$$y = \varphi_1(x),$$

elle admet aussi les équations de périodicité $y = \varphi_k(x)$, $y = \varphi_{-k}(x)$, où $\varphi_k(x)$ signifie l'opération $\varphi_1(x)$ répétée k fois, et où $\varphi_{-k}(x)$ est la fonction inverse de $\varphi_k(x)$. En mettant maintenant dans $F(x)$, à la place de x, une fonction algébrique $\psi_1(x)$, on aura

$$F[\psi_1(x)] = F[\varphi_1\psi_1(x)],$$

et, en désignant $F[\psi_1(x)]$ par $F_1(x)$, on déduit de l'égalité

$$F_1[\psi_{-1}(x)] = F(x)$$

que la fonction $F_1(x)$ admet l'équation de périodicité $y = \psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x)$.

Cette substitution fonctionnelle permet de ramener les diverses espèces de périodes à certains types normaux. Les fonctions à période fermée (*wiederkehrende Periode*) sont les fonctions pour lesquelles on a $\psi_n(x) = x$. Toutes les fonctions $\varphi_1(x)$ de cette nature se déduisent de la substitution $y = \alpha x$, où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. L'équation de périodicité rationnelle en x et y la plus générale possible se ramène à l'une ou l'autre des deux formes normales

$$y = px, \quad y = x + n,$$

qui ne peuvent se réduire l'une à l'autre par aucune substitution algébrique et pour lesquelles il convient d'observer que toute forme $y = x + n$ se ramène à la forme $y = x + m$ par une substitution linéaire, tandis que la forme $y = px$ ne se ramène à la forme $y = qx$ par une substitution algébrique que si q est une puissance commensurable de p.

Pour les fonctions à équation de périodicité irrationnelle, on se borne à étudier les équations dont les répétitions sont de même multivocité (*Vieldeutigkeit*) que la fonction périodique elle-même; l'auteur établit le théorème suivant :

Toutes les équations de périodicité du $n^{\text{ième}}$ degré qui, répétées, restent du $m^{\text{ième}}$ degré proviennent d'une équation linéaire par la substitution d'une fonction rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré à la place de x et de y.

Enfin l'auteur traite brièvement des fonctions à deux équations de périodicité rationnelles échangeables et parvient à ce théorème :

Toute fonction univoque à période multiplicatrice peut être transformée en une fonction univoque à double période additive, au moyen d'une substitution transcendante.

Klein (F.). — Sur les corps limités par des surfaces homofocales du second degré. (410-247).

Dans ce Mémoire, l'auteur montre comment la solution que Lamé a développée pour le problème du potentiel dans le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être étendue aux corps limités par six surfaces d'un système homofocal, ou par un moindre nombre.

Schröter (H.). — Sur l'hexagone gauche formé par trois couples de génératrices parallèles d'un hyperboloïde à une nappe. (428-442).

Thomae (*J.*). — Sur les fonctions algébriques qui appartiennent à une surface donnée de Riemann. (443-447).

Construction d'une fonction algébrique représentée sur une surface à quatre feuillets avec des points d'embranchement (*Windungspunkt*) donnés.

Veronese (*G.*). — Nombre des équations indépendantes qui relient les caractères généraux d'une courbe dans l'espace à n dimensions. (448).

Une courbe dans un espace à n dimensions a $3n$ caractères généraux, entre lesquels il existe $3(n-1)$ équations indépendantes.

Bachmann. — Sur la théorie de Galois des équations algébriques. (449-468).

L'exposition de M. Bachmann évite l'emploi de la théorie des substitutions, au moyen de laquelle M. Camille Jordan, dans son commentaire sur Galois (*Math. Ann.*, t. I), a expliqué la méthode de résolution de Galois et repose essentiellement sur le concept des corps numériques (*Zahlenkörper*) (Dedekind, *Sur la théorie des nombres entiers algébriques*) et sur le concept d'irréductibilité.

Mehler (*G.*). — Sur la théorie de la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs. (469-506).

L'auteur ouvre une nouvelle voie pour obtenir, au moyen d'intégrales définies, les résultats obtenus précédemment au moyen de séries et traite le cas de deux surfaces sphériques, concentriques ou non.

Dyck (*W.*). — Recherche d'une représentation explicite de la surface de Riemann qui correspond à la résolvante de Galois des équations modulaires pour la transformation de degré premier des fonctions elliptiques (507-527).

Hurwitz (*A.*). — Fondements d'une théorie indépendante des fonctions modulaires elliptiques et théorie des équations au multiplicateur de premier grade (*Stufe*). (528-592).

Dans la première Partie l'auteur traite des transformations linéaires à coefficients entiers, telles que

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

de déterminant $+1$, des sous-groupes qu'elles contiennent, de leur représentation au moyen du polygone fondamental; il définit les fonctions modulaires et les formes modulaires de la $k^{\text{ième}}$ dimension; ces dernières sont des fonctions analytiques univoques, homogènes de la $k^{\text{ième}}$ dimension de deux arguments ω_1, ω_2 qui restent invariables quand on soumet les arguments à une transformation linéaire homogène quelconque d'un sous-groupe contenu dans l'ensemble des transformations précédentes; les fonctions modulaires sont les quotients de deux formes modulaires de même dimension.

M. Hurwitz en étudie la représentation analytique et les relations algébriques. La seconde Partie contient une théorie des équations au multiplicateur, même dans le cas d'un degré de transformation composé, théorie fondée sur les recherches générales dont on vient de parler.

Du Bois-Reymond. — Sur les fonctions de représentation (593-603).

La preuve de l'égalité

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx f(x)\varphi(x,h) = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x,h)\,dx$$

suppose : 1° que

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x,h)\,dx$$

est indépendante de a, finie et déterminée ; 2° que

$$\lim \int_{a_1}^a \varphi(x,h)\,dx = 0,$$

quand $a_1 - a$ et $\frac{1}{h}$ tendent vers zéro simultanément et indépendamment.

Mangold (H.). — Sur une propriété caractéristique des surfaces développables.

Ce théorème : *Deux segments egaux et parallèles à un troisième sont égaux entre eux,* ne se généralise, pour une surface courbe, que pour les surfaces développables.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3ᵉ série.

Tome II; 1883, 1ᵉʳ semestre.

Rouché (E.). — Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle. (5-16).

Cette Note, tirée de la 5ᵉ édition du *Traite de Geometrie* de MM. Rouché et de Comberousse, résume d'une façon fort claire les travaux de M. Hermite et de M. Lindemann, qui ont fait faire à cette question si souvent débattue un pas définitif.

Le théorème auquel on parvient consiste en ce que *le nombre π ne saurait être*

(¹) Voir *Bulletin,* VII_2, 177.

racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels (réels ou imaginaires). On peut consulter sur ce sujet : HERMITE, *Mémoire sur la fonction exponentielle*, 1874; et LINDEMANN, *Comptes rendus*, t. XCV, et *Mathematische Annalen*, t. XX, 1882.

Laguerre. — Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles. (16-34).

Application de la théorie des semi-droites et des cycles, due à l'auteur. Celui-ci démontre que l'anticaustique est un *hypercycle cubique;* il étudie ensuite les tangentes par un point sur une tangente donnée, la tangente parallèle à une semi-droite donnée, les tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle, le cycle osculateur en un point donné, et quelques autres propriétés encore. Enfin, il termine par quelques considérations plus générales sur les anticaustiques d'une courbe algébrique quelconque, et sur la théorie des hypercycles.

Picart (A.). — Note sur les équations linéaires aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes, du deuxième et du troisième ordre. (34-43).

Variété de la méthode de Legendre, ayant pour objet de généraliser celle de Laplace sur l'intégration des équations linéaires du deuxième ordre ramenées préalablement à la forme $S + Pp + Qq = V$. Le procédé de M. Picart s'applique à l'équation linéaire complète.

Cesaro (E.). — Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. (43-46).

On sait que cette formule est la suivante :

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}.$$

M. Cesaro y parvient d'une manière fort originale, et en s'appuyant sur la formule de Wallis.

Cesaro (E.). — Sur l'existence de certains polyèdres. (46-47).

Démonstration de cette proposition : *Il n'y a que cinq espèces de polyèdres dont tous les angles solides ont* $2n$ *arêtes et toutes les faces* n *côtés.*

Lebon (E.). — Remarque sur l'intersection de deux quadratiques réglées. (47-48).

Lorsque deux quadratiques réglées ont un plan principal commun P, une génératrice commune et leurs sections par un autre plan principal Q homothétiques, leur intersection est formée de deux génératrices et d'une conique parallèle au plan Q.

QUESTION PROPOSÉE : 1430. (48).

Picart (*A.*). — Théorie nouvelle du calcul des variations. (49-64).

L'auteur pose dès le début le problème général de la variation d'une intégrale multiple, et en donne une analyse pour le cas d'une intégrale triple, avec une seule fonction des variables. L'article se termine par l'indication de quelques applications, toujours pour le cas d'une intégrale triple, le plus intéressant à cet égard.

Laguerre. — Sur quelques propriétés des cycles. (65-74).

Applications d'une théorie dont il a été question plus haut. L'auteur introduit ici la notion de la *distance de deux cycles;* il définit ainsi la distance des points de contact d'une semi-droite tangente aux deux cycles. Il tire grand profit de cette notion pour établir plusieurs propriétés, notamment sur les coniques et leurs directions asymptotiques.

Laquière. — Construction géométrique des caustiques par réflexion. (74-76).

Détermination directe du point brillant, d'où l'on peut déduire ensuite la construction du centre de courbure de la courbe miroir.

Legoux (*A.*). — Généralisation d'un théorème relatif aux points d'inflexion des cubiques planes. (77-82).

L'auteur prend l'équation, en coordonnées homogènes,

$$U = x^\alpha y^\beta z^\gamma + k u^\delta = 0.$$

Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1$, et $\delta = 3$, on a un système de cubiques. Dans le cas général, on a des courbes d'ordre δ, et c'est sur la distribution des points d'inflexion (réels ou imaginaires) de ces courbes que l'auteur établit une intéressante série de propriétés.

Catalan (*E.*). — Sur la circonférence des neuf points. (82-84).

Application de la théorie des triangles *annexes* d'un triangle donné, lesquels résultent d'une construction des plus élémentaires, que l'auteur définit.

Cesaro (*E.*). — Propriétés d'une courbe de poursuite. (85-89).

Deux mobiles M, μ partent en même temps d'un point O; M parcourt une trajectoire quelconque; μ occupe à chaque instant le centre de gravité du chemin parcouru par M. La trajectoire de μ est une courbe de poursuite sur M. M. Cesaro en donne des propriétés fort intéressantes.

Concours d'admission a l'École centrale en 1882. — Première et seconde session : Composition en Géométrie analytique, en Géométrie descriptive, en Triangle, en Physique et en Chimie. Énoncés. (89-95).

Bibliographie. — P. Mansion : Introduction à la théorie des déterminants. Compte rendu par H. Brocard.

Publications récentes. (96).

Laguerre. — Sur les courbes de direction de la troisième classe. (97-109).

C'est encore une application de la théorie des cycles et des semi-droites. Les propriétés établies dans cet article se rattachent à celles de l'anticaustique par réflexion de la parabole pour des rayons incidents parallèles. L'auteur montre que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Picart (A.). — Représentation des fonctions d'une ou de plusieurs variables, entre de certaines limites de ces variables, par des séries procédant suivant les valeurs relatives à un indice variable et multipliées par des coefficients constants, d'une fonction qui satisfait à une certaine forme d'équations aux différentielles ordinaires ou partielles du second ordre. (109-118).

Ce titre est un peu long, mais l'article n'en présente pas moins d'intérêt. L'auteur examine successivement le cas d'une variable et celui de deux variables. Il s'attache à démontrer en toute rigueur que la série obtenue représente la fonction donnée.

Laquière. — Quelques propriétés d'une classe de courbes spirales. (118-129).

Ces courbes sont celles dont la tangente tourne avec une vitesse angulaire d'orientation proportionnelle à celle du rayon vecteur mené d'un pôle fixe au point de contact. Leur équation générale est $\rho = a \cos^p \frac{\omega}{p}$. M. Laquière en étudie les podaires, les tangentes, les asymptotes, les rayons de courbure et les caustiques par réflexion du pôle.

Cesaro (E.). — Théorème de Géométrie. (129-133).

Détermination des droites pouvant engendrer une surface développable, parmi celles qui sont invariablement liées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale en chaque point d'une courbe.

Chateau (C.). — Solution géométrique des questions 1395 et 1387. (133-136).

Propriétés de l'hyperbole.

Chauchat (L.). — Solution analytique des questions 1387 et 1395. (136-138).

PUBLICATIONS RÉCENTES. (138-143).

QUESTIONS PROPOSÉES : 1431 à 1436. (143-144).

Laurent (*H.*). — Mémoire sur la théorie de l'élimination. (145-160).

L'auteur se propose de faire connaître une méthode nouvelle, le nombre des équations étant supérieur d'une unité à celui des inconnues. Dans ce but, il introduit la notion des polynômes *réduits*, que nous ne pouvons définir ici, mais qui semble être d'une application heureuse et féconde à la théorie de l'élimination.

Caron (*J.*). — Note sur la ponctuation. (161-166).

Examinant la projection horizontale d'un système de surfaces, l'auteur suppose qu'une verticale se déplace de manière à percer successivement le plan horizontal dans toutes les régions. L'étude de ce déplacement lui permet d'énoncer plusieurs propriétés dignes d'intérêt, sur les parties vues et cachées.

Humbert. — Sur les triangles conjugués à une conique et sur les tétraèdres conjugués à une quadratique. (167-188).

M. Humbert s'est proposé d'exposer, relativement aux triangles polaires des coniques, aux diamètres conjugués des quadratiques et à leurs tétraèdres polaires, une méthode de calcul nouvelle. Il met, de deux manières différentes, le premier membre de l'équation d'une conique en coordonnées homogènes sous la forme d'une somme de trois carrés, et cela le conduit très directement et très simplement à la détermination d'un triangle polaire. Les coordonnées tangentielles s'appliquent à cette méthode, aussi bien que les coordonnées ponctuelles.

L'application aux diamètres conjugués des quadratiques est presque immédiate; et sur ce sujet plusieurs questions intéressantes sont traitées.

Enfin, l'article se termine par l'indication d'une méthode tout à fait analogue, pour l'étude des tétraèdres polaires des quadriques. On prend le premier membre de l'équation de la surface (en coordonnées homogènes) sous la forme d'une somme de quatre carrés.

Ocagne (*M. d'*). — Addition à une Note sur un mode de détermination des courbes planes. (189-192).

Cette Note avait paru dans le même Recueil (3e série, t. I, p. 40). Il s'agit de propriétés relatives aux normales et aux centres de courbure.

QUESTION PROPOSÉE : 1437. (192).

Antomari (*X.*). — Relations entre les distances d'un foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes. (193-208).

Cet article ne représente que le commencement du Mémoire de M. Antomari. Les relations qu'il met en lumière semblent nouvelles, et elles sont, comme il le

fait remarquer, susceptibles d'applications intéressantes. La première Partie se rapporte aux distances d'un foyer à quatre points. Après avoir établi une série de théorèmes concernant les relations dont il s'agit, l'auteur en fait application à la détermination des foyers dans l'ellipse.

Forestier. — Équation aux carrés des différences de l'équation générale du quatrième degré. (209-219).

L'auteur s'est proposé de simplifier, pour ce cas, les méthodes de Sylvester et de Bézout, la première conduisant à un déterminant du huitième ordre qui contient 40320 termes, la seconde obligeant ainsi à des calculs inextricables. Le procédés indiqués sont relativement très courts, fractionnent le calcul et permettent d'obtenir chaque coefficient séparément et d'une manière tout à fait indépendante.

Ocagne (M. d'). — Sur un algorithme algébrique. (220-226).

Cet algorithme, qui n'est autre que celui désigné par Wronski sous le nom de fonction *aleph*, ainsi que nous le fait connaître M. d'Ocagne, représente le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, où l'on remplace tous les coefficients par l'unité. Application de cet algorithme à la théorie des séries.

Ibach (L.-F.). — De quelques propriétés d'une famille de polygones que l'on peut former avec un polygone donné. (226-233).

On divise les côtés d'un polygone dans des rapports donnés, et il en résulte, en joignant les points de division, un nouveau polygone. Expression de l'aire de ce polygone; cas du triangle; démonstration de plusieurs propriétés de ces polygones. Quelques-unes gagneraient à être énoncées avec plus de rigueur et de clarté.

Legoux (A.). — Note sur un faisceau de surfaces d'ordre quelconque. (233-236).

L'équation $x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta + k w^\varepsilon = 0$ représente un système de surfaces d'ordre quelconque. M. Legoux en recherche la hessienne. Cet article n'est que le commencement de son Mémoire. Il est regrettable, ainsi que nous l'avons fait remarquer jadis, qu'on fractionne à l'excès des publications qui gagneraient à pouvoir être lues dans leur ensemble.

Genty. — Note de Géométrie infinitésimale. (237-239).

Intéressante propriété de deux courbes planes, qui conduit heureusement à une construction très simple du centre de courbure de l'ellipse.

QUESTIONS PROPOSÉES : 1438 à 1446. (239-240).

Walecki. — Démonstration du théorème de d'Alembert. (241-248).

Il s'agit de la proposition algébrique fondamentale : *Toute équation a une*

racine. La démonstration dont il s'agit reproduit, avec quelques développements et une simplification due à M. Laguerre, une Note insérée aux *Comptes rendus*, 19 mars 1882.

Colin. — Problème de Géométrie. (248-249).

Sur une droite qui enveloppe un cercle.

Ocagne (*M. d'*). — Note sur la transformation par semi-droites réciproques. (249-252).

Application de la théorie des cycles et des semi-droites de M. Laguerre.

Ocagne (*M. d'*). — Sur l'enveloppe de certaines droites variables. (252-259).

Il s'agit de la corde variable d'une courbe plane : 1° quand cette corde est de longueur constante; 2° quand l'arc est de longueur constante; 3° quand la somme de l'arc et de la corde est constante; 4° quand la corde est vue d'un point fixe sous un angle constant; 5° quand les tangentes aux extrémités de la corde forment un angle constant.

Fouret (*G.*). — Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de pôles principaux d'inversion. (259-262).

On sait qu'un pôle principal d'inversion est un point tel que la transformation reproduit la courbe donnée. L'auteur démontre qu'il n'existe pas de courbe anallagmatique plane satisfaisant à la condition proposée; et que seule la circonférence se transforme en elle-même en prenant un pôle d'inversion quelconque. Extension à l'espace.

Fouret (*G.*). — Sur quelques identités trigonométriques. (262-265).

Démonstration nouvelle et applications de la formule

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} + \frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a \sin b \sin c} = 0.$$

Weill. — Sur le discriminant de l'équation du quatrième degré. (265-266).

L'auteur donne sous forme simple la condition pour que l'équation du quatrième degré ait une racine double.

Cesaro (*E.*). — Théorème de Géométrie. (266-267).

Addition au théorème indiqué plus haut. (129-133).

Kœnigs (*G.*). — Sur le complexe formé par les axes d'une surface du second ordre. (267-272).

Ici, on appelle *axe*, d'après M. Reye, toute droite normale au plan polaire d'un de ces points. L'article contient l'énoncé et la démonstration d'un grand nombre de propriétés de ces axes ainsi définis.

Laquière (*E.-M.*). — Recherche des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles déterminés. (272-287).

La solution que donne M. Laquière est élémentaire et géométrique. Il la fait suivre d'une formule donnant l'équation de l'ensemble des huit circonférences qui satisfont à la question. Il étend enfin les résultats obtenus à la Géométrie dans l'espace, et aux seize sphères qui résolvent le problème analogue, pour quatre sphères données.

Questions proposées : 1447 à 1450. (287-288). A. L.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VII; 1883. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.



FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME VII.

ERRATA.

—

IIe PARTIE.

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lire
214	14..............	plan carré	plus grand carré
»	14..............	$b=+1$	$b=a+1$
»	24..............	les premiers entre eux	premiers entre eux
215	3..............	$d+1$ groupes	d groupes
»	6..............	les d autres (E_d)	les $d-1$ autres (E_d)
»	29..............	des réduites	des périodes
216	5..............	*ajouter :* dans tous les cas où cette coïncidence est possible	

8543 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME VII; 1883. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

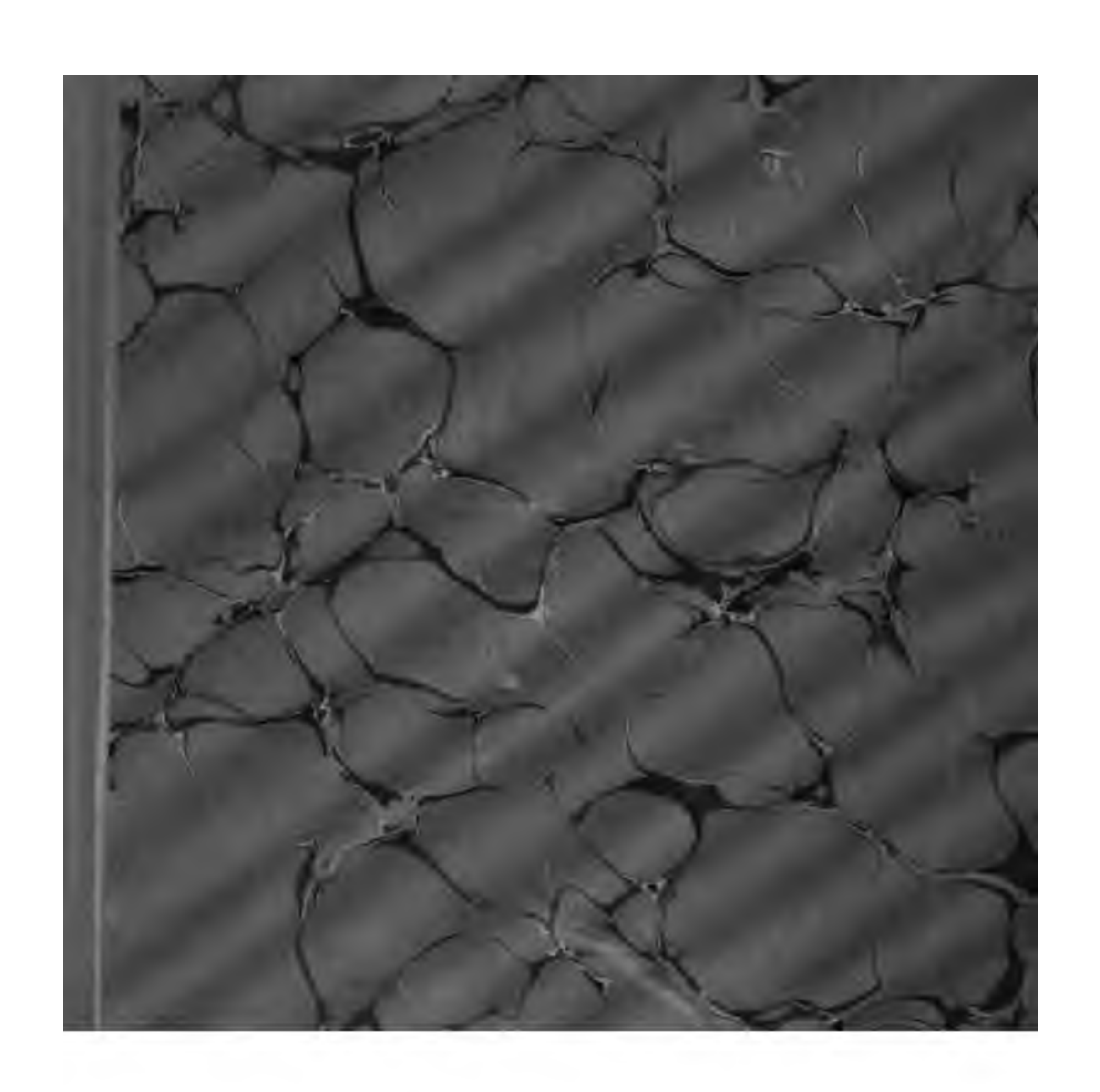
RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

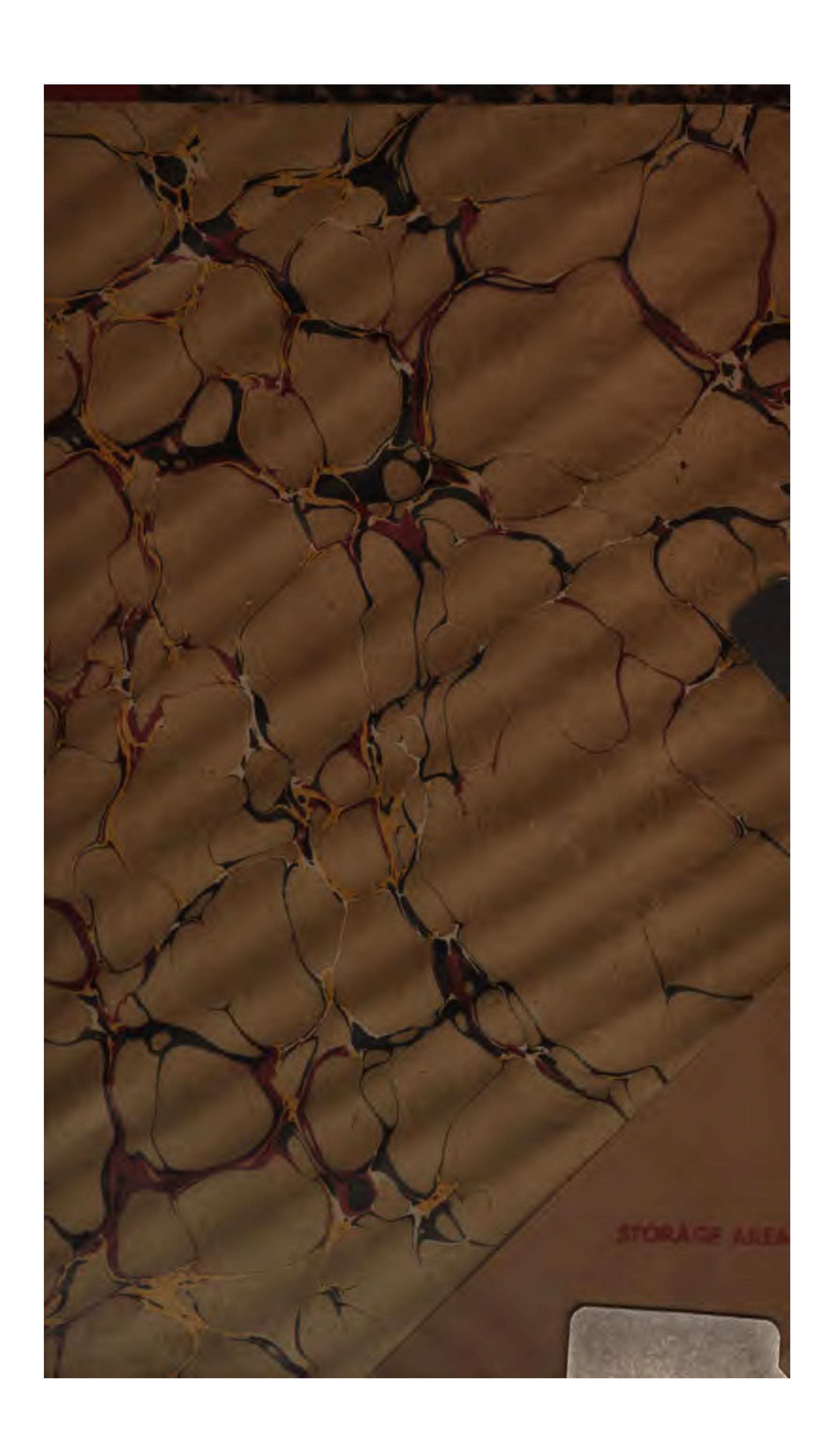
Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. T. XVII-XVIII; 1880-1880. — 228-249.
Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. T. VII-IX; 1880-1882. — 146-152.
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 3e série, t. I-II; 1882-1883. — 18-25, 177-185, 249-256.
The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 5e série, t. XI-XII; 1878-1881. — 44-61.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. T. CLXVI-CLXXI; 1876-1880. — 104-116.
Revue d'artillerie. T. XIX-XXI; octobre 1881 à mars 1883. — 86-89.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.






STORAGE AREA

